X1-003 (2001/06/28)

تابعِ گرین‌ها یِ معادله یِ لَپلَس و معادله یِ پخش در کره و صفحه: انقباض

محمد خرمی mamwad@mailaps.org

تابعِ گرین [a]ِ معادله یِ لَپلَس [b] در صفحه را، از رو یِ تابعِ گرین [a]ِ همین معادله در کره، و با میل‌دادن ِ شعاع ِ کره به بی‌نهایت به دست می‌آوریم. همین کار را برا یِ معادله یِ پخش هم انجام می‌دهیم.

1 تابعِ گرین ِ معادله یِ لَپلَس در کره و صفحه

در نظر ِ اول، به نظر می‌رسد تابعِ گرین [a]ِ معادله یِ لَپلَس [b] رو یِ کره ای به شعاع ِ R، باید معادله یِ

$$\frac{1}{R^2}\nabla_\Omega^2 G_S(\hat{\mathbf{n}},\hat{\mathbf{n}}')=\frac{1}{R^2}\delta(\hat{\mathbf{n}},\hat{\mathbf{n}}') \tag{1}$$

را بر آورد. در این‌جا

$$\nabla_\Omega^2 := \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}+\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2}, \tag{2}$$

$\hat{\mathbf{n}}$ بردار ِ یکه ای است که جهت ِ آن با (θ,ϕ) مشخص می‌شود، (θ,ϕ) مختصه‌ها یِ زاویه‌ای در مختصات ِ کروی اند،

$$\int \mathrm{d}^2\Omega\, \delta(\hat{\mathbf{n}}, \hat{\mathbf{n}}') f(\hat{\mathbf{n}}') := f(\hat{\mathbf{n}}), \tag{3}$$

و

$$\mathrm{d}^2\Omega = \sin\theta\, \mathrm{d}\theta\, \mathrm{d}\phi. \tag{4}$$

اما معادله یِ (1) جواب ندارد. برا یِ دیدن ِ این، کافی است از دوطرف ِ آن رو یِ کره انتگرال بگیریم. نتیجه می‌شود

$$\int_S \mathrm{d}^2\Omega\, \nabla_\Omega^2 G(\hat{\mathbf{n}}, \hat{\mathbf{n}}') = 1. \tag{5}$$

اما داریم

$$\int_S \mathrm{d}^2\Omega\, \nabla_\Omega^2 G(\hat{\mathbf{n}}, \hat{\mathbf{n}}') = \oint_{\partial S} \mathrm{d}l_i\, \partial^i G(\hat{\mathbf{n}}, \hat{\mathbf{n}}'), \tag{6}$$

که در آن ∂S مرز ِ کره یِ S است. کره مرز ندارد، پس طرف ِ راست ِ رابطه یِ بالا، و در نتیجه طرف ِ چپ ِ رابطه یِ (5) صفر است.

برا یِ این که این ناسازگاری رفع شود، باید طرف ِ راست ِ معادله یِ (1) را چنان اصلاح کرد که انتگرال ِ آن صفر شود. معنی یِ این کار در الکتروستاتیک رو یِ کره آن است که بار ِ کل ِ کره باید صفر باشد. در واقع بر اساس ِ قضیه یِ گاؤس [c]، بار ِ کل ِ کره برابر است با انتگرال ِ مئلفه یِ عمود برمرز ِ میدان ِ الکتریکی رو یِ مرز ِ کره. اما کره مرز ندارد، پس این انتگرال صفر است، و بار ِ کل ِ کره هم باید صفر باشد.

یک راه ِ ساده یِ حل ِ مشکل این است که به طرف ِ راست ِ رابطه یِ (1) یک جمله یِ ثابت بیفزاییم، چنان که انتگرال ِ طرف ِ راست ِ این رابطه رو یِ کره صفر شود. به این ترتیب، معادله یِ تابعِ‌گرین [a] می‌شود

$$\frac{1}{R^2}\nabla_\Omega^2 G_S(\hat{\mathbf{n}}, \hat{\mathbf{n}}') = \frac{1}{R^2}\left[\delta(\hat{\mathbf{n}}, \hat{\mathbf{n}}') - \frac{1}{4\pi}\right]. \tag{7}$$

معادله یِ بالا تحت ِ چرخش ناوردا است. پس می‌شود $\hat{\mathbf{n}}'$ را همان $\hat{\mathbf{z}}$ گرفت. در این صورت G_S هم تابع ِ فقط θ می‌شود

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\sin\theta\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}G_S(\theta) = \delta(\hat{\mathbf{n}}, \hat{\mathbf{z}}) - \frac{1}{4\pi}. \tag{8}$$

یک راه ـِ حل ـِ معادله یِ بالا این است که دوطرف را بر حسب ـِ ویژه‌تابع‌ها یِ عمل‌گر ـِ طرف ـِ چپ ـِ معادله بسط دهیم. این‌ها چندجمله‌ای‌ها یِ لُژاندر [d] اند [1]:

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\sin\theta\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\mathrm{P}_l(\cos\theta) = -l(l+1)\mathrm{P}_l(\cos\theta). \tag{9}$$

داریم

$$\delta(\hat{\mathbf{n}},\hat{\mathbf{z}}) = \frac{1}{2\pi}\sum_{l=0}^{\infty}\frac{2l+1}{2}\mathrm{P}_l(\cos\theta). \tag{10}$$

به این ترتیب، با بسط ـِ

$$G_S(\theta) =: \frac{1}{2\pi}\sum_{l=0}^{\infty} G_l\,\mathrm{P}_l(\cos\theta) \tag{11}$$

نتیجه می‌شود

$$-\,l(l+1)G_l = \frac{2l+1}{2} - \frac{1}{2}\delta_{l\,0}. \tag{12}$$

جمله یِ دوم ـِ طرف ـِ راست ناشی از جمله یِ ثابت در طرف ـِ راست ـِ (8) است. این جمله باعث می‌شود طرف ـِ راست به ازا یِ $l=0$ صفر شود، و معادله یِ (12) در $l=0$ سازگار باشد.

جواب ـِ معادله یِ (12) می‌شود

$$G_l = -\frac{2l+1}{2l(l+1)}, \qquad l \neq 0, \tag{13}$$

و از آن‌جا

$$G_S(\theta) = \frac{1}{2\pi}\left[G_0 - \sum_{l=1}^{\infty}\frac{2l+1}{2l(l+1)}\mathrm{P}_l(\cos\theta)\right], \tag{14}$$

که در آن a_0 یک ثابت ـِ دل‌بخواه است. این ثابت را می‌شود چنان گرفت که G_S در $\theta=\theta_0$ صفر شود. برا یِ این کار،

$$G_0 = \sum_{l=1}^{\infty}\frac{2l+1}{2l(l+1)}\mathrm{P}_l(\cos\theta_0), \tag{15}$$

و از آن‌جا

$$G_S(\theta) = -\frac{1}{2\pi}\sum_{l=1}^{\infty}\frac{2l+1}{2l(l+1)}[\mathrm{P}_l(\cos\theta) - \mathrm{P}_l(\cos\theta_0)]. \tag{16}$$

حالا می‌خواهیم R را به بی‌نهایت میل دهیم و تابعِ‌گرین [a]ِ معادله یِ لَپلَس [b] رو یِ صفحه را به دست آوریم. به طور ِ دقیق‌تر، منظور این است که فاصله یِ نقطه یِ (θ,ϕ) از قطب ِ شمال ِ کره را ثابت می‌گیریم، و G_S را در حد ِ $R\to\infty$ حساب می‌کنیم. به این کار انقباض می‌گوییم. فاصله را می‌شود فاصله یِ رو یِ کره گرفت $(R\theta)$ یا طول ِ پاره‌خط ی که این دو نقطه را در فضا یِ سه‌بعدی به هم وصل می‌کند، $2R\sin(\theta/2)$. این‌ها در حد ِ $R\to\infty$ به یک نتیجه برا یِ θ منجر می‌شوند (در مرتبه یِ غالب). در واقع برا یِ کار ِ ما، کافی است بگیریم

$$\theta = \frac{\rho}{R} + O(R^{-2}). \tag{17}$$

جمله‌ها یِ مرتبه‌یِ‌بعد را می‌شود هر چیز ی گرفت. انتخاب ِ

$$\rho = 2R\sin(\theta/2), \tag{18}$$

کار را کم ی ساده‌تر می‌کند، و ما هم همین انتخاب را می‌کنیم. پس

$$G_P(\rho) = \lim_{R\to\infty} G_S\left[2\sin^{-1}\left(\frac{\rho}{2R}\right)\right]. \tag{19}$$

توجه کنید که در (16) یک زاویه یِ دیگر (θ_0) هم وجود دارد. در رابطه یِ (19)، منظور این است که این زاویه هم با رابطه ای مشابه با (18) بر حسب ِ ρ_0 نوشته شده است.

برا یِ ادامه یِ کار، به رفتار ِ چندجمله‌ای‌ها یِ لُژاندر [d] به ازا یِ مقدارها یِ نزدیک‌به‌یک ِ متغیر نیاز داریم. از (18) نتیجه می‌شود

$$x := \cos\theta = 1 - \frac{\rho^2}{2R^2}. \tag{20}$$

معادله یِ لُژاندر [d]:

$$(1-x^2)\frac{\mathrm{d}^2\mathrm{P}_l}{\mathrm{d}x^2} - 2x\frac{\mathrm{d}\mathrm{P}_l}{\mathrm{d}x} + l(l+1)\mathrm{P}_l = 0, \tag{21}$$

بر حسب ِ متغیر ِ ρ می‌شود

$$\left[\left(1-\frac{\rho^2}{4R^2}\right)\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\rho^2} + \left(1-\frac{3\rho^2}{4R^2}\right)\frac{1}{\rho}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\rho} + s^2 - \frac{1}{4R^2}\right]\mathrm{P}_l\left(1-\frac{\rho^2}{2R^2}\right) = 0, \tag{22}$$

که در آن

$$Rs := l + \frac{1}{2}. \tag{23}$$

دیده می‌شود در حد ِ $R \to \infty$، معادله یِ (22) به معادله یِ بِسِل [e]ِ مرتبه یِ صفر، با متغیر ِ $s\rho$ تبدیل می‌شود:

$$\left(\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}y^2} + \frac{1}{y}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y} + s^2\right) f(y) = 0. \tag{24}$$

به علاوه، P_l در $\rho = 0$ خوش‌رفتار است و مقدار َ ش یک است. تنهاجواب ِ معادله ی بِسِل [e] با این ویژه‌گی‌ها، تابعِ بِسِل [e]ِ نوع ِ اول است. پس،

$$\lim_{R\to\infty} \mathrm{P}_{Rs-(1/2)}\left(1 - \frac{\rho^2}{2R^2}\right) = \mathrm{J}_0(s\rho), \tag{25}$$

که در آن J_0 تابعِ بِسِل [e]ِ نوع ِ اول از مرتبه یِ صفر است.

حالا به رابطه یِ (16) بر می‌گردیم. بر حسب ِ متغیرها یِ ρ و s، این رابطه می‌شود

$$G_S(\theta) = -\frac{1}{2\pi R}\sum_{l=0}^{\infty}\frac{s}{s^2 - (4R^2)^{-1}}\Bigg[\,\mathrm{P}_{Rs-(1/2)}\left(1 - \frac{\rho^2}{2R^2}\right) - \mathrm{P}_{Rs-(1/2)}\left(1 - \frac{\rho_0^2}{2R^2}\right)\Bigg]. \tag{26}$$

عبارت ِ طرف ِ راست، در حد ِ $R \to \infty$ به انتگرال تبدیل می‌شود. پس

$$G_P(\rho) = -\frac{1}{2\pi}\int_0^{\infty}\mathrm{d}s\,\frac{\mathrm{J}_0(s\rho) - \mathrm{J}_0(s\rho_0)}{s}. \tag{27}$$

وجود ِ جمله یِ دوم ِ صورت ِ کسر لازم است، تا انتگرال واگرا نشود. به خاطر ِ این جمله، ضمناً تابعِ گرین [a] در $\rho = \rho_0$ صفر می‌شود. رابطه یِ بالا به این شکل ساده می‌شود.

$$\begin{aligned} G_P(\rho) &= -\frac{1}{2\pi}\int_0^{\infty}\mathrm{d}s\int_{\rho_0}^{\rho}\mathrm{d}z\,\mathrm{J}_0'(sz), \\ &= -\frac{1}{2\pi}\int_{\rho_0}^{\rho}\mathrm{d}z\int_0^{\infty}\mathrm{d}s\,\mathrm{J}_0'(sz), \\ &= -\frac{1}{2\pi}\int_{\rho_0}^{\rho}\mathrm{d}z\left[\frac{\mathrm{J}_0(sz)}{z}\right]_0^{\infty}, \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{\rho_0}^{\rho}\frac{\mathrm{d}z}{z}, \tag{28}$$

و از آن‌جا

$$G_P(\rho) = \frac{1}{2\pi}\ln\frac{\rho}{\rho_0}. \tag{29}$$

این همان چیز ی است که با حل ِ مستقیم ِ معادله یِ تابعِ‌گرین [a] در صفحه به دست می‌آید.

2 یک راه ِ ساده‌تر برا یِ به‌دست‌آوردن ِ تابعِ‌گرین ِ معادله یِ لَپلَس در کره و صفحه

یک راه ِ دیگر برا یِ به‌دست‌آوردن ِ G_S، استفاده از قضیه یِ گاؤس [c] است. از معادله یِ (8) رو یِ بخش ی از کره که با $\theta < \alpha$ مشخص می‌شود انتگرال می‌گیریم:

$$\begin{aligned}
2\pi\sin\alpha\, G_S'(\alpha) &= \int_{\theta<\alpha}\mathrm{d}^2\Omega\,\nabla_\Omega^2 G_S(\theta),\\
&= \int_{\theta<\alpha}\mathrm{d}^2\Omega\,\left[\delta(\hat{\mathbf{n}},\hat{\mathbf{z}}) - \frac{1}{4\pi}\right],\\
&= 1 - \frac{1-\cos\alpha}{2},\\
&= \frac{1+\cos\alpha}{2}.
\end{aligned} \tag{30}$$

از این‌جا،

$$\begin{aligned}
G_S'(\theta) &= \frac{1+\cos\theta}{4\pi\sin\theta},\\
&= \frac{\cos(\theta/2)}{4\pi\sin(\theta/2)},
\end{aligned} \tag{31}$$

و در نتیجه،

$$G_S(\theta)=\frac{1}{2\pi}\ln\frac{\sin(\theta/2)}{\sin(\theta_0/2)}. \qquad (32)$$

حالا با تعریف ـِ (18)، رابطه یِ (29) مستقیماً به دست می آید.

3 تابعِ گرین ـِ معادله یِ پخش در کره و صفحه

تابعِ گرین [a]ـِ معادله یِ پخش رو یِ کره ای به شعاع ـِ R، معادله یِ

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}-\frac{1}{R^2}\nabla_\Omega^2\right)F_S(\hat{\mathbf{n}},t;\hat{\mathbf{n}}',t')=\frac{1}{R^2}\delta(\hat{\mathbf{n}},\hat{\mathbf{n}}')\delta(t-t') \qquad (33)$$

را بر می آورد. این معادله هم چرخش‌ناوردا است. پس می‌شود $\hat{\mathbf{n}}'$ را $\hat{\mathbf{z}}$ گرفت، و در این صورت F_S تابع ـِ ϕ نخواهد بود. این معادله تحت ـِ انتقالِ‌زمان هم ناوردا است. پس t' را هم می‌شود صفر گرفت. به این ترتیب معادله یِ (33) به شکل ـِ ساده‌تر ـِ

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}-\frac{1}{R^2}\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right)F_S(\theta,t)=\frac{1}{R^2}\delta(\hat{\mathbf{n}},\hat{\mathbf{z}})\delta(t) \qquad (34)$$

در می آید. F_S را بر حسب ـِ چندجمله‌ای‌ها یِ لُژاندر [d] بسط می‌دهیم:

$$F_S(\theta,t)=:\frac{1}{2\pi}\sum_{l=0}^{\infty}F_l(t)\,\mathrm{P}_l(\cos\theta). \qquad (35)$$

نتیجه می‌شود

$$\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}+\frac{l(l+1)}{R^2}\right]F_l(t)=\frac{2l+1}{2R^2}\delta(t), \qquad (36)$$

که در آن از (10) استفاده شده است. جواب ـِ این معادله (با این شرط که تابعِ گرین [a] در $t<0$ صفر باشد) می‌شود

$$F_l(t)=\frac{2l+1}{2R^2}\exp\left[-\frac{l(l+1)}{R^2}t\right]\mathrm{H}(t), \qquad (37)$$

که در آن H تابع ـِ هِوی‌ساید [f] (پله یِ واحد) است:

$$\mathrm{H}(t):=\begin{cases}0, & t<0\\ 1, & t>0\end{cases}. \qquad (38)$$

به این ترتیب، تابعِ گرین [a]ـِ معادله یِ پخش در کره می‌شود

$$F_S(\theta,t)=\frac{1}{2\pi}\sum_{l=0}^{\infty}\frac{2l+1}{2R^2}\mathrm{P}_l(\cos\theta)\exp\left[-\frac{l(l+1)}{R^2}t\right]\mathrm{H}(t). \tag{39}$$

این‌جا هم می‌خواهیم تابعِ‌گرین [a]ـِ معادله یِ پخش در صفحه (F_P) را از انقباضِ تابعِ‌گرین [a]ـِ معادله یِ پخش در کره (F_S) به دست آوریم:

$$F_P(\rho,t)=\lim_{R\to\infty}F_S\left[2\sin^{-1}\left(\frac{\rho}{2R}\right),t\right], \tag{40}$$

که در آن ρ به شکلِ (18) تعریف شده است. با تعریفِ s به شکلِ (23)، F_S می‌شود

$$F_S(\theta,t)=\frac{1}{2\pi R}\sum_{l=0}^{\infty}s\,\mathrm{P}_{Rs-(1/2)}\left(1-\frac{\rho^2}{2R^2}\right)e^{-[s^2-(1/4)]t}\mathrm{H}(t). \tag{41}$$

در حدِ $R\to\infty$، سری یِ بالا به انتگرال تبدیل می‌شود و با استفاده از (25)، نتیجه می‌شود

$$F_P(\rho,t)=\frac{1}{2\pi}\mathrm{H}(t)\int_0^{\infty}\mathrm{d}s\,s\,\mathrm{J}_0(s\rho)e^{-s^2t}. \tag{42}$$

یک راه برا یِ محاسبه یِ طرفِ راستِ رابطه یِ بالا، استفاده از جدولِ انتگرال است، مثلاً [2].) اما انتگرالِ طرفِ‌راست را با تبدیلِ لَپلَس [b] هم می‌شود حساب کرد. اول توجه می‌کنیم که با تغییرِ‌متغیرِ $u:=s^2\rho^2$، نتیجه می‌شود

$$\int_0^{\infty}\mathrm{d}s\,s\,\mathrm{J}_0(s\rho)e^{-s^2t}=\frac{1}{2\rho^2}\int_0^{\infty}\mathrm{d}u\,\mathrm{J}_0(\sqrt{u})e^{-ut/\rho^2}. \tag{43}$$

پس مسئله تبدیل می‌شود به یافتنِ تبدیلِ‌لَپلَس [b]ـِ $\mathrm{J}_0(\sqrt{u})$. برا یِ این کار، توجه می‌کنیم که معادله‌یِ‌بِسِل [e]ـِ

$$\left(y\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}y^2}+\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}+y\right)\mathrm{J}_0(y)=0, \tag{44}$$

با تغییرِ‌متغیرِ $u:=y^2$ می‌شود

$$\left(4\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u}u\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u}+1\right)\mathrm{J}_0(\sqrt{u})=0. \tag{45}$$

تبدیلِ‌لَپلَس [b]ـِ $\mathrm{J}_0(\sqrt{u})$ را با $\mathcal{J}_0(r)$ نشان می‌دهیم:

$$\mathcal{J}_0(r):=\int_0^{\infty}\mathrm{d}u\,\mathrm{J}_0(u)e^{-ur}. \tag{46}$$

با ضرب ِ دوطرف ِ معادله ي (45) در e^{-ur}، و انتگرال‌گیری رو ي u، نتیجه می‌شود

$$\left(-4r\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}r+1\right)\mathcal{J}_0(r)=0. \tag{47}$$

این یک معادله ي دیفرانسیل ِ مرتبه‌ي‌یک برا ي $\mathcal{J}_0$ است. این معادله جداشدنی است:

$$\frac{\mathrm{d}\mathcal{J}_0}{\mathcal{J}_0}=\frac{1-4r}{4r^2}\mathrm{d}r, \tag{48}$$

که از آن نتیجه می‌شود

$$\mathcal{J}_0(r)=\frac{C}{r}\exp\left(-\frac{1}{4r}\right). \tag{49}$$

در این رابطه، C یک ثابت است. برا ي به‌دست‌آوردن ِ آن توجه می‌کنیم که

$$\int_0^\infty \mathrm{d}u\,\mathrm{J}_0'(u)e^{-ur}=r\mathcal{J}_0(r)-\mathrm{J}_0(0). \tag{50}$$

طرف ِ چپ ِ رابطه ي بالا، در حد ِ $r\to\infty$ به صفر می‌گراید. از این‌جا نتیجه می‌شود

$$\lim_{r\to\infty}[r\mathcal{J}_0(r)-\mathrm{J}_0(0)]=0, \tag{51}$$

و از آن‌جا به دست می‌آید $C=1$، یا

$$\mathcal{J}_0(r)=\frac{1}{r}\exp\left(-\frac{1}{4r}\right). \tag{52}$$

پس F_P می‌شود

$$F_P(\rho,t)=\frac{1}{4\pi t}\mathrm{H}(t)\exp\left(-\frac{\rho^2}{4t}\right). \tag{53}$$

این همان چیز ی است که با حل ِ مستقیم ِ معادله ي پخش در صفحه به دست می‌آید.

4 مرجع‌ها

[1] George B. Arfken & Hans J. Weber; “Mathematical methods for physicists”, forth edition (Academic Press, 1998) chapter 12

[2] I. S. Gradshteyn & I. M. Ryzhik; “Table of integrals, series, and products”, sixth edition (Academic Press, 2000) 631

5 اسم‌ها یِ خاص

[a] Green

[b] Laplace

[c] Gauss

[d] Legendre

[e] Bessel

[f] Heaviside