X1-028 (2005/01/07)

تانسور ِ انرژی‌ـ تکانه I

محمد خرمی mamwad@mailaps.org

سیستم ی شامل ِ میدان و ذره بررسی می‌شود. نشان داده می‌شود تانسور ِ انرژی‌ـ تکانه یِ کانونیک ِ متناظر با میدان معادله یِ پی‌وسته‌گی را بر نمی‌آورَد، اما مجموع ِ این تانسور و تانسور ِ انرژی‌ـ تکانه یِ ذرات معادله یِ پی‌وسته‌گی را بر می آورَد.

0 مقدمه

در نظریه یِ میدان‌ها یِ کلاسیک (مکانیک ِ محیط‌ها یِ پی‌وسته) دیده می‌شود اگر برهم‌کنش‌ها یِ سیستم به یک ی از مختصه‌ها یِ فضا و زمان بسته‌گی نداشته باشند یک رابطه یِ پی‌وسته‌گی بین ِ یک چگالی و یک چگالی‌یِ‌جریان داریم. اگر چگالی‌یِ‌جریان در مرز ِ فضایی صفر شود (یا فضا مرز نداشته باشد)، انتگرال ِ این چگالی ثابت ِ حرکت می‌شود. این چگالی و این چگالی‌یِ‌جریان را از تانسور ی می‌سازند که به آن تانسور ِ انرژی‌ـ تکانه می‌گویند. این که پی‌وسته‌گی یِ این چگالی‌ها و چگالی‌یِ‌جریان‌ها ناشی از تقارن ِ سیستم تحت ِ انتقال‌ها یِ فضایی یا زمانی است، اسم‌گذاری یِ تانسور ِ انرژی‌ـ تکانه را توجیه می‌کند. اما یک کار ِ دیگر هم می‌شود کرد و آن این است که برهم‌کنش ِ تعداد ی ذره و میدان را در نظر بگیریم و نشان دهیم در این حالت رابطه‌ها یِ

پی‌وسته‌گی یی داریم که ناشی از تقارن ِ سیستم تحت ِ انتقال ِ فضا و زمان اند؛ و در این رابطه‌ها چیز ی که اسم َ ش را چگالی یِ (یا چگالی‌یِ‌جریان ِ) انرژی یا تکانه یِ میدان گذاشته ایم با چگالی یِ (یا چگالی‌یِ‌جریان ِ) انرژی یا تکانه یِ ذرات جمع می‌شود. به این ترتیب، انرژی یا تکانه یِ میدان چیز ی است که اگر به انرژی یا تکانه یِ ذرات اضافه شود، مجموع پایسته می‌ماند.

1 سیستم‌ها یِ از مرتبه یِ اول

سیستم ی را در نظر بگیرید که متغیر ِ دینامیکی یِ آن یک (یا چند) میدان باشد. می‌گوییم این سیستم از مرتبه یِ اول است (یا تحول ِ این سیستم از یک کنش ِ مرتبه‌یِ‌یک می آید) اگر این شرایط برقرار باشد.

i یک تابعی یِ کنش (S) از میدان هست، که تحول ِ میدان از آن به دست می‌آید. معادله یِ حرکت بین ِ زمان‌ها یِ t_1 و t_2

$$[\forall\ (t,\mathbf{r})\mid t_1<t<t_2]\ :\ \mathcal{E}(t,\mathbf{r};\phi)=0, \qquad (1)$$

است که

$$\mathcal{E}(t,\mathbf{r};\phi):=\frac{\delta S}{\delta\phi(t,\mathbf{r})}, \qquad (2)$$

و $\mathbf{r}$ مکان است.

ii کنش انتگرال ِ یک چگالی‌یِ‌لَگرانژی ($\mathcal{L}$) رو یِ فضا زمان است، که این چگالی‌یِ‌لَگرانژی تابع ِ فقط میدان و مشتق‌ها یِ اول ِ آن نسبت به فضا و زمان (و احیاناً خود ِ فضا و زمان) است. به‌طور ِ دقیق‌تر،

$$[\forall\ (t,\mathbf{r})\mid (t,\mathbf{r})\in\Omega]\ :\ \frac{\delta S}{\delta\phi(t,\mathbf{r})}=\frac{\delta S_\Omega}{\delta\phi(t,\mathbf{r})}, \qquad (3)$$

که

$$S_\Omega(\phi)=\int_\Omega \mathrm{d}^{D+1}r\ \mathcal{L}[r,\phi(r),\partial\phi(r)]. \qquad (4)$$

r مکان و زمان، D بُعد ِ فضا، و Ω یک ناحیه یِ باز در فضازمان است.

در کل ِ این متن، سیستم‌ها یی که بررسی می‌شوند از مرتبه یِ یک اند.
دیده می‌شود برا یِ سیستم ی که با چگالی‌یِ‌لَگرانژی یِ $\mathcal{L}$ توصیف می‌شود،

$$\mathcal{E}(r;\phi)=\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi}-\partial_\mu\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi_{,\mu}}\right), \tag{5}$$

که در آن r^0 همان t است. در کل ِ این متن، شاخص‌ها یِ یونانی مقدارها یِ 0 تا D و شاخص‌ها یِ لاتین مقدارها یِ 1 تا D را می‌گیرند. ∂_μ مشتق نسبت به r^μ با درنظرگرفتن ِ بسته‌گی یِ ϕ و مشتق‌ها یِ آن به r^μ است:

$$\partial_\mu\left\{F[r,\phi(r),\phi_{,\nu}(r)]\right\}:=\partial^\phi_\mu\left\{F[r,\phi(r),\phi_{,\nu}(r)]\right\}$$
$$+\frac{\partial F}{\partial\phi(r)}\,\partial_\mu\phi+\frac{\partial F}{\partial\phi_{,\nu}(r)}\,\partial_\mu(\phi_{,\nu}), \tag{6}$$

و

$$F[r+a,\phi(r),\phi_{,\nu}(r)]-F[r,\phi(r),\phi_{,\nu}(r)]=:a^\mu\,\partial^\phi_\mu\{F[r,\phi(r),\phi_{,\nu}(r)]\}$$
$$+o(a). \tag{7}$$

هم‌چنین،

$$\phi_{,\nu}:=\partial_\nu\phi. \tag{8}$$

تانسور ِ انرژی‌ـ تکانه یِ کانونیک (Θ) را چنین تعریف می‌کنیم.

$$\Theta^\mu{}_\nu:=\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi_{,\mu}}\,\phi_{,\nu}-\delta^\mu{}_\nu\,\mathcal{L}. \tag{9}$$

دیده می‌شود

$$\partial_\mu\,\Theta^\mu{}_\nu=\left[\partial_\mu\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi_{,\mu}}\right)\right]\,\phi_{,\nu}+\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi_{,\mu}}\,\partial_\mu(\phi_{,\nu})-\partial_\nu\mathcal{L},$$

$$=-[\mathcal{E}(r;\phi)]\,\phi_{,\nu}+\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi}\,\phi_{,\nu}+\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi_{,\mu}}\,\partial_\mu(\phi_{,\nu})-\partial_\nu\mathcal{L},$$

$$= -[\mathcal{E}(r;\phi)]\,\phi_{,\nu} - \partial^{\phi}_{\nu}\mathcal{L}. \tag{10}$$

از این‌جا دیده می‌شود اگر چگالی‌ِلَگرانژی صریحاً به r^{ν} وابسته نباشد، رو یِ لاک (یعنی اگر معادله یِ حرکت برقرار باشد) طرف ِ چپ صفر است:

$$\partial^{\phi}_{\nu}\mathcal{L} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \partial_{\mu}\,\Theta^{\mu}{}_{\nu} \stackrel{\mathrm{ns}}{=} 0. \tag{11}$$

این‌ها را می‌شود در مثلاً فصل ِ 13 از [1] یافت. دیده می‌شود تقارن تحت ِ انتقال در یک ی از راستاها یِ فضازمان به یک معادله یِ پی‌وسته‌گی می‌انجامد. این است که اسم ِ تانسور ِ انرژی‌ـ تکانه را توجیه می‌کند.

2 انرژی و تکانه یِ ذرات

سیستم ی متشکل از یک مجموعه ذره را در نظر بگیرید که با لَگرانژی یِ L توصیف می‌شود که تابع ِ مکان‌ها و سرعت‌ها یِ ذره‌ها (و احیاناً زمان) است. معادله یِ حرکت برا یِ این سیستم

$$\mathcal{E}_{a\,i}(t,\mathbf{q}) = 0 \tag{12}$$

است، که

$$\mathcal{E}_{a\,i}(t,\mathbf{q}) := \frac{\delta S_{(t_1,t_2)}}{\delta q^i_a(t)}, \tag{13}$$

و

$$S_{(t_1,t_2)} = \int_{t_1}^{t_2} \mathrm{d}t\; L[t,\mathbf{q}(t),\dot{\mathbf{q}}(t)]. \tag{14}$$

$\mathbf{q}_a$ مکان ِ ذره یِ a و $\mathbf{q}$ نماینده یِ مکان ِ همه یِ ذره‌ها است، و $t_1 < t < t_2$. دیده می‌شود

$$\mathcal{E}_{a\,i}(t,\mathbf{q}) = \frac{\partial L}{\partial q^i_a} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i_a}\right). \tag{15}$$

از تعریف ِ معادله یِ حرکت نتیجه می‌شود

$$\dot{p}_{a\,i} = -\mathcal{E}_{a\,i} + \frac{\partial L}{\partial q^i_a}, \tag{16}$$

که

$$p_{a\,i} := \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i_a}. \tag{17}$$

هم‌چنین با تعریف ِ

$$p_0 := L - \sum_a p_{a\,i}\,\dot{q}^i_a, \tag{18}$$

دیده می‌شود

$$\dot{p}_0 = \sum_a \mathcal{E}_{a\,i}\,\dot{q}^i_a + \partial^q_0 L, \tag{19}$$

که ∂^q یعنی مشتق‌گیری بدون ِ درنظرگرفتن ِ بسته‌گی یِ $\mathbf{q}$ و $\dot{\mathbf{q}}$ به زمان. (روشن است که p_0 منفی یِ همیلتنی یِ سیستم است.) این‌ها را می‌شود در مثلاً فصل ِ 3 از [1] یافت.

فرض کنید بخواهیم چیز ی مثل ِ چگالی یِ تکانه و چگالی‌یِ‌جریان ِ تکانه تعریف کنیم. طبیعی است برا یِ هر ذره چگالی یِ تکانه را حاصلِ‌ضرب ِ تکانه در یک دلتا یِ دیرَک [a] (در محل ِ ذره) تعریف کنیم، و چگالی‌یِ‌جریان ِ تکانه را چگالی یِ تکانه در سرعت ِ ذره:

$$\begin{aligned} \rho_i &:= \sum_a \delta[\mathbf{r} - \mathbf{q}_a(t)]\,p_{a\,i}, \\ \mathbf{J}_i &:= \sum_a \delta[\mathbf{r} - \mathbf{q}_a(t)]\,p_{a\,i}\,\dot{\mathbf{q}}_a(t). \end{aligned} \tag{20}$$

این دورابطه را می‌شود در

$$J^\mu_i := \sum_a \delta[\mathbf{r} - \mathbf{q}_a(t)]\,p_{a\,i}\,\dot{q}^\mu_a(t), \tag{21}$$

ترکیب کرد، که در آن تعریف کرده ایم

$$\begin{aligned} J^0_i &:= \rho_i, \\ q^0_a &:= t. \end{aligned} \tag{22}$$

با توجه به رابطه ي

$$\partial_\mu\{\delta[\mathbf{r}-\mathbf{q}_a(t)]\,\dot{q}_a^\mu(t)\}=0, \tag{23}$$

دیده می‌شود اگر Q_a تابع ِ فقط t باشد،

$$\partial_\mu\left\{\sum_a \delta[\mathbf{r}-\mathbf{q}_a(t)]\,Q_a(t)\,\dot{q}_a^\mu(t)\right\}=\sum_a \delta[\mathbf{r}-\mathbf{q}_a(t)]\,\dot{Q}_a(t). \tag{24}$$

پس

$$\begin{aligned}\partial_\mu\,J_i^\mu &= \sum_a \delta[\mathbf{r}-\mathbf{q}_a(t)]\,\dot{p}_{a\,i}(t),\\ &= \sum_a \delta[\mathbf{r}-\mathbf{q}_a(t)]\,\left(-\mathcal{E}_{a\,i}+\frac{\partial L}{\partial q_a^i}\right).\end{aligned} \tag{25}$$

دیده می‌شود این چگالی و چگالی‌ِجریان معادله ي پی‌وسته‌گی را بر نمی‌آورند، مگر این که مشتق ِ L نسبت به q^i ِ همه ي ذره‌ها صفر باشد. البته

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\sum_a p_{a\,i}\right)\overset{\text{ns}}{=}\sum_a\frac{\partial L}{\partial q_a^i}, \tag{26}$$

که یعنی اگر طرف ِ راست صفر شود (سیستم تحت ِ انتقال ِ هم‌زمان ِ همه ي ذره‌ها در راستا ي i تقارن داشته باشد) انتگرال ِ چگالی ي مئلفه ي i ِ تکانه ثابت است، هر چند چگالی ي J_i^μ رابطه ي پی‌وسته‌گی را بر نمی‌آورَد.

در مورد ِ مئلفه ي صفر ِ تکانه، وضع از این هم بدتر است، چون راه ِ واضح ی برا ي تجزیه ي p_0 به شکل ِ مجموع ی از $p_{a\,0}$ ها دیده نمی‌شود. p_0 ممکن است جمله‌ها یی داشته باشد که شامل ِ مکان و سرعت ِ چند ذره اند، یعنی ناشی از برهم‌کنش ِ ذره‌ها با هم اند. اگر L را بشود به شکل ِ مجموع ی از L_a ها نوشت، که L_a به ازا ي هر a شامل ِ فقط مکان و سرعت ِ ذره ي a باشد، آن وقت می‌شود تعریف کرد

$$p_{a\,0}:=L_a-p_{a\,i}\,\dot{q}_a^i, \tag{27}$$

و در این حالت J_0^μ هم مثل ِ (21) اما با $p_{a\,0}$ به جا ي $p_{a\,i}$ تعریف می‌شود. در نتیجه،

$$J_\nu^\mu:=\sum_a \delta[\mathbf{r}-\mathbf{q}_a(t)]\,p_{a\,\nu}\,\dot{q}_a^\mu(t). \tag{28}$$

مانسته یِ (25) هم می‌شود

$$\partial_\mu J_0^\mu = \sum_a \delta[\mathbf{r}-\mathbf{q}_a(t)]\,(\mathcal{E}_{a\,i}\,\dot q_a^i + \partial_0^q L_a). \tag{29}$$

در این حالت هم چگالی یِ p_0 و چگالی یِ‌جریان ـِ p_0 رابطه یِ پی‌وسته‌گی را بر نمی آورند، مگر مشتق ـِ صریح ـِ همه یِ L_a ها نسبت به زمان صفر باشد. سرانجام، مانسته یِ (26) می‌شود

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\sum_a p_{a\,0}\right) \overset{\text{ns}}{=} \sum_a \partial_0^q L, \tag{30}$$

که یعنی اگر طرف ـِ راست صفر شود (سیستم تحت ـِ انتقال ـِ زمان تقارن داشته باشد) انتگرال ـِ چگالی یِ مئلفه یِ 0 ـِ تکانه ثابت است، هر چند چگالی یِ J_0^μ رابطه یِ پی‌وسته‌گی را بر نمی آورَد.

رابطه یِ پی‌وسته‌گی نشانه یِ نوع ی پایسته‌گی یِ موضعی است. دیده می‌شود تقارن تحت ـِ انتقال ـِ فضا یا زمان برا یِ برقراری یِ رابطه یِ پی‌وسته‌گی بین ـِ چگالی و چگالی یِ‌جریان ـِ تکانه یا انرژی کافی نیست، هر چند برا یِ پایسته‌گی یِ تکانه یا انرژی یِ کل کافی است. توصیف ـِ کیفی یِ این پدیده آن است که برهم‌کنش ـِ ذرات با هم موضعی نیست، پس پایسته‌گی یِ تکانه یِ کل ممکن است به این شکل برآورده شود که تکانه یِ یک ذره (در یک جا) کم شود، و تکانه یِ ذره یِ دیگر ی (در یک جا یِ دیگر) زیاد شود. در این حالت تکانه یِ کل پایسته مانده، اما این پایسته‌گی موضعی نیست.

3 برهم‌کنش ـِ میدان با ذره

سیستم ی شامل ـِ یک (یا چند) میدان و یک (یا چند ذره) را در نظر بگیرید. چگالی یِ‌لَگرانژی یِ چنین‌سیستم ی به شکل ـِ

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(\mathbf{q},\dot{\mathbf{q}},\phi,\partial\phi,r) = {}& \mathcal{L}_{\mathrm{F}}(\phi,\partial\phi,r)\\ &+ \sum_a \delta[\mathbf{r}-\mathbf{q}_a(t)]\,\tilde L_a(\mathbf{q}_a,\dot{\mathbf{q}}_a,\phi,\partial\phi,t)\end{aligned} \tag{31}$$

است. در سیستم ی که چگالی یِ‌لَگرانژی یَش به شکل ـِ بالا باشد، معادله یِ حرکت ـِ میدان شامل ـِ مکان ـِ هر یک ذره‌ها است و هر ذره به شکل ـِ چشمه ای نقطه‌ای رفتار

می‌کند. معادله یِ حرکت ِ هر ذره هم شامل ِ مکان و سرعت و شتاب ِ آن ذره، و نیز میدان در مکان ِ آن ذره است. ذره‌ها با هم برهم‌کنش ِ مستقیم ندارند. مثال ِ چنین‌سیستم ی برهم‌کنش ِ ذره‌ها یِ باردار با میدان ِ الکترومغناطیسی است.

برا یِ سیستم ی که چگالی‌یِ‌لَگرانژی یِ آن (31) است، معادلات ِ حرکت می‌شوند

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_{\mathrm{F}} + \sum_a \delta[\mathbf{r} - \mathbf{q}_a(t)]\,\frac{\partial \tilde{L}_a}{\partial \phi} - \sum_a \partial_\mu \left\{ \delta[\mathbf{r} - \mathbf{q}_a(t)]\,\frac{\partial \tilde{L}_a}{\partial \phi_{,\mu}} \right\}, \qquad (32)$$

$$\mathcal{E}_{a\,i} = \left(\frac{\partial \tilde{L}_a}{\partial q_a^i} + \frac{\partial \tilde{L}_a}{\partial r^i} \right)\bigg|_{\mathbf{r}=\mathbf{q}_a(t)} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\frac{\partial \tilde{L}_a}{\partial \dot{q}_a^i}\bigg|_{\mathbf{r}=\mathbf{q}_a(t)} \right]. \qquad (33)$$

در این‌جا $\mathcal{E}_{\mathrm{F}}$ همان $\mathcal{E}$ ولی با $\mathcal{L}_{\mathrm{F}}$ به جا یِ $\mathcal{L}$ است. (33) را می‌شود چنین نوشت

$$\mathcal{E}_{a\,i} = \frac{\partial L_a}{\partial q_a^i} - \dot{p}_{a\,i}, \qquad (34)$$

که

$$L_a(\mathbf{q}_a, \dot{\mathbf{q}}_a, t) := \tilde{L}_a(\mathbf{q}_a, \dot{\mathbf{q}}_a, \phi, \partial\phi, t)\Big|_{\mathbf{r}=\mathbf{q}_a(t)}. \qquad (35)$$

$p_{a\,0}$ هم مثل ِ (27) تعریف می‌شود، و در نتیجه

$$\dot{p}_{a\,0} = \mathcal{E}_{a\,i}\,\dot{q}_a^i + \partial_0^q \tilde{L}_a\Big|_{\mathbf{r}=\mathbf{q}_a(t)}. \qquad (36)$$

4 معادلات ِ پی‌وسته‌گی

از (10) نتیجه می‌شود

$$\begin{aligned} A_\nu :&= \partial_\mu \left[-\Theta^\mu_{\mathrm{F}\,\nu} - \sum_a \delta[\mathbf{r} - \mathbf{q}_a(t)]\,\frac{\partial \tilde{L}_a}{\partial \phi_{,\mu}}\,\phi_{,\nu} \right] \\ &= \mathcal{E}\,\phi_{,\nu} + \partial_\nu^\phi \mathcal{L}_{\mathrm{F}} + \sum_a (\partial_\nu^\phi - \partial_\nu)\{\delta[\mathbf{r} - \mathbf{q}_a(t)]\,\tilde{L}_a\} \\ &= \mathcal{E}\,\phi_{,\nu} + \partial_\nu^\phi \mathcal{L}_{\mathrm{F}} + \sum_a \delta[\mathbf{r} - \mathbf{q}_a(t)]\,[(\partial_\nu^\phi - \partial_\nu)\tilde{L}_a], \end{aligned} \qquad (37)$$

که $\Theta_{\rm F}$ شبیه ِ Θ تعریف می‌شود، اما با $\mathcal{L}_{\rm F}$ به جا یِ $\mathcal{L}$. شاخص ِ ν را یک بار فضایی و یک بار زمانی می‌گیریم. داریم

$$\partial_i^\phi \tilde{L}_a = 0. \tag{38}$$

به این ترتیب، با استفاده از (34) معادله یِ (37) برا یِ حالت ِ $\nu = i$ می‌شود

$$A_i = \mathcal{E}\,\phi_{,i} + \partial_i^\phi \mathcal{L}_{\rm F} + \sum_a \delta[\mathbf{r} - \mathbf{q}_a(t)]\;\left(\frac{\partial \tilde{L}}{\partial q_a^i} - \mathcal{E}_{a\,i} - \dot{p}_{a\,i}\right). \tag{39}$$

برا یِ حالت ِ $\nu = 0$ داریم

$$(\partial_0^\phi - \partial_0)\tilde{L}_a = (\partial_0^{q\phi} - \partial_0^q)\tilde{L}_a, \tag{40}$$

که در آن $\partial^{q\phi}$ یعنی مشتق‌گیری بدون ِ درنظرگرفتن ِ بسته‌گی یِ ϕ و $\partial\phi$ و $\mathbf{q}$ و $\dot{\mathbf{q}}$ به زمان. از این‌جا (37) در حالت ِ $\nu = 0$ می‌شود

$$A_0 = \mathcal{E}\,\phi_{,0} + \partial_0^\phi \mathcal{L}_{\rm F} + \sum_a \delta[\mathbf{r} - \mathbf{q}_a(t)]\,[\partial_0^{q\phi}\tilde{L}_a + \mathcal{E}_{a\,i}\,\dot{q}_a^i - \dot{p}_{a\,0}]. \tag{41}$$

معادله‌ها یِ (39) و (41) را می‌شود در یک معادله ترکیب کرد:

$$A_\nu + \sum_a \delta[\mathbf{r} - \mathbf{q}_a(t)]\,\dot{p}_{a\,\nu} = \mathcal{E}\,\phi_{,\nu} + \sum_a \delta[\mathbf{r} - \mathbf{q}_a(t)]\,\mathcal{E}_{a\,i}\,c_\nu^i$$

$$+\partial_\nu^\phi \mathcal{L}_{\rm F} + \sum_a \delta[\mathbf{r} - \mathbf{q}_a(t)]\,\partial_\nu^{\rm exp}\tilde{L}_a, \tag{42}$$

که در آن،

$$c_\nu^i := \begin{cases} \dot{q}^i, & \nu = 0 \\ \\ -\delta_\nu^i, & \nu \neq 0 \end{cases}, \tag{43}$$

و

$$\partial_\nu^{\rm exp}\tilde{L}_a := \begin{cases} \partial_0^{q\phi}\tilde{L}_a, & \nu = 0 \\ \\ \dfrac{\partial \tilde{L}_a}{\partial q_a^i}, & \nu \neq 0 \end{cases}. \tag{44}$$

ضمناً (43) را می‌شود به شکل ِ بسته‌تر ِ

$$c_\nu^i = \partial_\nu[q^i(t) - r^i] \tag{45}$$

نوشت.

از (24) داریم

$$\sum_a \delta[\mathbf{r}-\mathbf{q}_a(t)]\,\dot{p}_{a\,\nu} = \partial_\mu \left\{\sum_a \delta[\mathbf{r}-\mathbf{q}_a(t)]\,p_{a\,\nu}(t)\,\dot{q}_a^\mu(t)\right\}, \tag{46}$$

و از آن‌جا (42) می‌شود

$$\partial_\mu\,\tau^\mu{}_\nu = \mathcal{E}\,\phi_{,\nu} + \sum_a \delta[\mathbf{r}-\mathbf{q}_a(t)]\,\mathcal{E}_{a\,i}\,c^i_\nu + \partial^\phi_\nu \mathcal{L}_{\mathrm{F}} + \sum_a \delta[\mathbf{r}-\mathbf{q}_a(t)]\,\partial^{\exp}_\nu \tilde{L}_a, \tag{47}$$

که

$$\tau^\mu{}_\nu := \tau^\mu_{\mathrm{F}\,\nu} + \tau^\mu_{\mathrm{I}}{}_\nu + \tau^\mu_{\mathrm{M}\nu}, \tag{48}$$

و

$$\begin{aligned}
\tau^\mu_{\mathrm{F}\,\nu} &:= -\Theta^\mu_{\mathrm{F}\nu},\\
\tau^\mu_{\mathrm{I}}{}_\nu &:= -\sum_a \delta[\mathbf{r}-\mathbf{q}_a(t)]\,\frac{\partial \tilde{L}_a}{\partial \phi_{,\mu}}\,\phi_{,\nu},\\
\tau^\mu_{\mathrm{M}\nu} &:= \sum_a \delta[\mathbf{r}-\mathbf{q}_a(t)]\,p_{a\,\nu}\,\dot{q}^\mu_a(t).
\end{aligned} \tag{49}$$

معادله‌ها یِ (47) و (48) می‌گویند اگر سیستم تحت ِ انتقال ِ یک ی از مئلفه‌ها یِ فضازمان تقارن داشته باشد، یک چگالی و چگالی‌یِ‌جریان هست که رو یِ لاک رابطه یِ پی‌وسته‌گی را بر می‌آورَد. این چگالی و چگالی‌یِ‌جریان شامل ِ یک بخش است که از میدان می‌آید، یک بخش که از برهم‌کنش ِ ذره‌ها با میدان می‌آید، و یک بخش که از ذره‌ها می‌آید. تقارن نسبت به انتقال ِ زمان یعنی زمان در $\mathcal{L}_{\mathrm{F}}$ و $\tilde{L}_a$ ها فقط از طریق ِ میدان و مکان ِ ذره‌ها ظاهر شود. تقارن نسبت به انتقال ِ فضا یعنی فضا در $\mathcal{L}_{\mathrm{F}}$، و نیز مکان ِ هر ذره در لَگرانژی یَش، فقط از طریق ِ میدان ظاهر شود.

البته این پی‌وسته‌گی زمان ی برقرار است که برهم‌کنش ِ ذره‌ها با هم فقط از طریق ِ میدان باشد. در این حالت تکانه ای که از یک ذره گرفته می‌شود مستقیماً به یک ذره یِ دیگر نمی‌رسد بل که به میدان منتقل می‌شود، و به همین خاطر است که پایسته‌گی موضعاً برقرار می‌شود.

5 مرجع

[1] Herbert Goldstein, Charles Poole, & John Safko; "Classical mechanics", 3rd edition (Addison Wesley, 2002)

6 اسم ِ خاص

[a] Dirac