X1-033 (2005/09/03)

نفوذ ِ گاز از یک روزنه یِ ریز

محمد خرمی mamwad@mailaps.org

ظرف ی شامل ِ یک گاز ِ کامل ِ کلاسیک بررسی می‌شود، که روزنه یِ ریز ی دارد. گاز از این روزنه بیرون می‌رود، اما روزنه آن‌قدر ریز است که گاز ِ درون ِ ظرف یک‌نواخت می‌ماند. چگالی و دما یِ گاز ِ درون ِ ظرف بر حسب ِ زمان به دست می‌آید.

0 مقدمه

اگر در یک ظرف ِ شامل ِ گاز روزنه ای درست شود، گاز از این روزنه بیرون می‌رود. برا یِ یک گاز ِ کامل، آهنگ ِ خروج ِ گاز با میان‌گین ِ اندازه یِ سرعت ِ ملکول‌ها یِ گاز، چگالی یِ گاز (تعداد ِ ملکول‌ها یِ گاز بر حجم)، و مساحت ِ روزنه متناسب است [1]. چون ملکول‌ها یِ با سرعت ِ بیش‌تر سریع‌تر از ظرف بیرون می‌روند، میان‌گین ِ انرژی یِ ملکول‌ها یِ بیرون‌رفته بیش از میان‌گین ِ انرژی یِ ملکول‌ها یی است که در ظرف مانده اند. پس با گذشت ِ زمان میان‌گین ِ انرژی یِ ملکول‌ها یی که در ظرف مانده اند، و در نتیجه دما یِ گاز ِ درون ِ ظرف، و میان‌گین ِ اندازه یِ سرعت ِ ملکول‌ها یِ گاز کم می‌شود. پس معادله یِ دیفرانسیل ِ تعداد ِ ملکول‌ها یِ گاز بر حسب ِ زمان، به یک متغیر ِ دیگر ِ وابسته به زمان (دما) جفت شده است.

ممکن است تصور شود اگر روزنه خیل ی ریز باشد (چنان که آهنگ ِ خروج ِ گاز خیل ی کوچک باشد) می‌شود از تغییر ِ دما چشم پوشید. اما چنان که خواهیم دید، حتا اگر روزنه خیل ی ریز باشد وقت ی مقدار ِ چشم‌گیر ی از گاز بیرون رفته باشد، تغییر ِ دما قابل ِ چشم‌پوشی نیست، و در واقع دما بر حسب ِ کسر ِ ملکول‌ها یِ مانده در ظرف، اصولاً به اندازه یِ روزنه بسته‌گی ندارد.

در کل ِ این متن، گاز را کامل می‌گیریم. ضمناً فرض می‌کنیم روزنه آن‌قدر ریز است که گاز ِ درون ِ ظرف را همیشه می‌شود در تعادل ِ ترمودینامیکی گرفت.

1 تعداد ِ ملکول‌ها، و انرژی یِ کل ِ درون ِ ظرف

آهنگ ِ خروج ِ گاز از ظرف، برا یِ ملکول‌ها یی که سرعت ِشان در ناحیه یِ d^3v است

$$R(\mathbf{v})\,\mathrm{d}^3v = \left[\int \mathrm{d}X\ v_z\,H(v_z)\,N\,F(\mathbf{r}_0,\mathbf{v},X)\,A\right]\,\mathrm{d}^3v \qquad (1)$$

است، که $R\,\mathrm{d}^3v$ تعداد ِ ملکول‌ها یِ خارج‌شده بر زمان، H تابع ِ پله یِ واحد، N تعداد ِ ملکول‌ها یِ درون ِ ظرف، A مساحت ِ روزنه، $\mathbf{r}_0$ بردار ِ مکان ِ روزنه، $\mathbf{v}$ سرعت، X نماینده یِ درجه‌ها یِ آزادی یِ درونی یِ ملکول، و F چگالی یِ احتمال برا یِ ملکول‌ها یِ با مکان، سرعت، و درجه‌ها یِ آزادی یِ درونی یِ معین است. (x,y,z) مختصات ِ دِکَرتی اند، چنان که جهت ِ z عمود بر روزنه و به طرف ِ بیرون است.

از این پس فرض می‌کنیم تابع ِ چگالی نسبت به مکان یک‌نواخت است. به این ترتیب،

$$F(\mathbf{r},\mathbf{v},X) = \frac{1}{V}\,f(\mathbf{v},X), \qquad (2)$$

که V حجم ِ ظرف است. از این‌جا نتیجه می‌شود

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}t} &= -\int \mathrm{d}^3v\ R(\mathbf{v}),\\ &= -\langle v_z\,H(v_z)\rangle\,\frac{N}{V}\,A, \qquad (3)\end{aligned}$$

که $\langle Q\rangle$ میان‌گین ِ کمیت ِ Q، و t زمان است.

توزیع ـِ سرعت ـِ ملکول‌ها یِ بیرون ـِ ظرف، با توزیع ـِ سرعت ـِ ملکول‌ها یِ درون ـِ ظرف فرق دارد، چون ملکول‌ها یی که سرعت ـِشان بیش‌تر است سریع‌تر بیرون می‌روند. در واقع از رابطه یِ (1) دیده می‌شود اگر f چگالی یِ احتمال برا یِ ملکول‌ها یِ درون ـِ ظرف باشد، f_o (چگالی یِ احتمال برا یِ ملکول‌ها یِ بیرون ـِ ظرف) می‌شود

$$f_\mathrm{o}(\mathbf{v}, X) = \mathcal{N}\, v_z\, H(v_z)\, f(\mathbf{v}, X), \tag{4}$$

که $\mathcal{N}$ یک ثابت ـِ بهنجارش است. به این ترتیب، میان‌گین ـِ کمیت ـِ Q برا یِ ملکول‌ها یِ بیرون ـِ ظرف ($\langle Q\rangle_\mathrm{o}$) با میان‌گین ـِ همین کمیت برا یِ ملکول‌ها یِ درون ـِ ظرف ($\langle Q\rangle$) فرق دارد.

انرژی یِ درونی یِ ظرف بر تعداد ـِ ملکول‌ها را با u نشان می‌دهیم. این کمیت در واقع میان‌گین ـِ انرژی یِ یک ملکول ـِ گاز ($\langle E\rangle$) است. داریم

$$\frac{\mathrm{d}(N\, u)}{\mathrm{d}t} = \langle E\rangle_\mathrm{o}\, \frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}t}, \tag{5}$$

و از آن‌جا

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{N}\, (\langle E\rangle_\mathrm{o} - u)\, \frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}t}. \tag{6}$$

دیده می‌شود u به شرط ی ثابت است که $\langle E\rangle_\mathrm{o}$ و $\langle E\rangle$ برابر باشند. ضمناً در معادله یِ بالا می‌شود زمان را حذف کرد:

$$N\, \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}N} = \langle E\rangle_\mathrm{o} - u. \tag{7}$$

برا یِ یک گاز ـِ کامل ـِ کلاسیک، u دما یِ سیستم و در نتیجه توزیع ـِ سرعت را تعیین می‌کند. توزیع ـِ سرعت ـِ ملکول‌ها یِ درون ـِ ظرف هم توزیع ـِ سرعت ـِ ملکول‌ها یِ بیرون را تعیین می‌کند. پس $\langle E\rangle_\mathrm{o}$ هم با دانستن ـِ u معلوم است. از این‌جا دیده می‌شود u تابع ـِ فقط کسر ـِ ملکول‌ها یی است که در ظرف مانده اند، و با دانستن ـِ این کسر، به حجم ـِ ظرف و مساحت ـِ روزنه بسته‌گی ندارد. این نتیجه برا یِ هر گاز ـِ کامل ی (حتا نسبیتی) درست است. به این ترتیب،

$$\langle E\rangle_\mathrm{o} = g(u), \tag{8}$$

و از آن‌جا،

$$\int_{u_0}^{u} \frac{\mathrm{d}u'}{g(u') - u'} = \ln\left(\frac{N}{N_0}\right). \tag{9}$$

برا ی ِ این که جلوتر برویم، لازم است تابع ِ g را بشناسیم.

2 گاز ِ کامل ِ غیرِنسبیتی

برا ی ِ یک گاز ِ کامل ِ غیرِنسبیتی، داریم

$$f(\mathbf{v}, X) = f_1(v_z)\, f_2(v_x, v_y)\, f_3(X), \tag{10}$$

و

$$E = \frac{m}{2}\,(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2) + E_{\rm i}(X), \tag{11}$$

که m جرم ِ ملکول و $E_{\rm i}$ بخش ی از انرژی است که تابع ِ فقط درجه‌ها ی ِ آزادی ی ِ درونی است. از (4) و (10) و (11) نتیجه می‌شود

$$\begin{aligned} \langle [m\,(v_x^2 + v_y^2)/2] \rangle_{\rm o} &= \langle [m\,(v_x^2 + v_y^2)/2] \rangle, \\ \langle E_{\rm i} \rangle_{\rm o} &= \langle E_{\rm i} \rangle. \end{aligned} \tag{12}$$

به این ترتیب،

$$\langle E \rangle_{\rm o} = u + \langle (m\,v_z^2/2) \rangle_{\rm o} - \langle (m\,v_z^2/2) \rangle. \tag{13}$$

داریم

$$f_1(v_z) = \mathcal{N}'\, \exp\left(-\frac{m\,v_z^2}{2\,k_{\rm B}\,T}\right), \tag{14}$$

که $k_{\rm B}$ ثابت ِ بُلتس‌مان [a]، T دما، و $\mathcal{N}'$ یک ثابت ِ بهنجارش است. از این‌جا،

$$\langle (m\,v_z^2/2) \rangle_{\rm o} = k_{\rm B}\,T, \tag{15}$$

و

$$\langle (m\,v_z^2/2) \rangle = \frac{1}{2}\,k_{\rm B}\,T. \tag{16}$$

پس

$$\langle E\rangle_{\rm o} - u = \frac{1}{2}\, k_{\rm B}\, T. \tag{17}$$

برا یِ به‌دست‌آوردن ـِ g باید بسته‌گی یِ T به u را بدانیم. داریم

$$u = \frac{\alpha}{2}\, k_{\rm B}\, T, \tag{18}$$

که α تعداد ـِ درجه‌ها یِ آزادی یِ (مجذوری یِ مئثر ـِ) هر ملکول است. خود ـِ α تابع ـِ T (یا u) است، اما در ناحیه‌ها یِ بزرگ ی از T (یا u) ثابت است. با جاگذاری یِ (17) و (18) در (8) و (9)،

$$\int_{u_0}^{u} {\rm d}u'\ \frac{\alpha(u')}{u'} = \ln\left(\frac{N}{N_0}\right). \tag{19}$$

اگر α ثابت باشد،

$$\frac{u}{u_0} = \left(\frac{N}{N_0}\right)^{1/\alpha}. \tag{20}$$

دیده می‌شود هر چه α بزرگ‌تر باشد، تغییرات ـِ نسبی یِ میان‌گین ـِ انرژی یِ ملکول‌ها یِ گاز کم‌تر است.

3 آهنگ ـِ خروج ـِ ملکول‌ها

تغییر ـِ N با زمان از (3) به دست می‌آید. با فرض ـِ این که توزیع ـِ سرعت کروی‌متقارن است (یعنی به جهت ـِ سرعت بسته‌گی ندارد)، طرف ـِ راست ـِ (3) را می‌شود بر حسب ـِ میان‌گین ـِ اندازه یِ سرعت نوشت:

$$\begin{aligned}\langle v_z\, H(v_z)\rangle &= \langle v\, \{\cos(\theta)\, H[\cos(\theta)]\}\rangle,\\ &= \langle v\rangle\, \langle\cos(\theta)\, H[\cos(\theta)]\rangle,\\ &= \frac{1}{4}\, \langle v\rangle.\end{aligned} \tag{21}$$

به این ترتیب (3) و (6) به‌ترتیب می‌شوند

$$\frac{{\rm d}N}{{\rm d}t} = -\frac{A}{V}\, \frac{\langle v\rangle}{4}\, N, \tag{22}$$

و

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = -\frac{A}{V}\,\frac{\langle v\rangle}{4}\,(\langle E\rangle_{\mathrm{o}} - u). \tag{23}$$

این نتایج برا یِ گازها یِ کامل ِ نسبیتی هم درست اند. برا یِ گازها یِ کامل ِ غیرِنسبیتی،

$$f(\mathbf{v}, X) = \mathcal{N}''\,\exp\left(-\frac{m\,v^2}{2\,k_{\mathrm{B}}\,T}\right)\,f_3(X), \tag{24}$$

که $\mathcal{N}''$ یک ثابت ِ بهنجارش است. از این‌جا

$$\langle v\rangle = \left(\frac{8\,k_{\mathrm{B}}\,T}{\pi\,m}\right)^{1/2}. \tag{25}$$

با جاگذاری یِ این رابطه و رابطه‌ها یِ (17) و (18) در (23)، نتیجه می‌شود

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = -\frac{A}{V}\,\frac{1}{\sqrt{\pi\,m}}\,\left(\frac{u}{\alpha}\right)^{3/2}, \tag{26}$$

که نتیجه می‌دهد

$$\int_{u_0}^{u}\mathrm{d}u'\,\left[\frac{\alpha(u')}{u'}\right]^{3/2} = -\frac{A}{V}\,\frac{1}{\sqrt{\pi\,m}}\,t. \tag{27}$$

اگر α ثابت باشد،

$$u = u_0\,\left[1 + \frac{A}{V}\,\left(\frac{u_0}{4\,\pi\,m\,\alpha^3}\right)^{1/2}\,t\right]^{-2}. \tag{28}$$

این رابطه را می‌شود بر حسب ِ دما نوشت:

$$T = T_0\,\left[1 + \frac{A}{V}\,\left(\frac{k_{\mathrm{B}}\,T_0}{8\,\pi\,m\,\alpha^2}\right)^{1/2}\,t\right]^{-2}. \tag{29}$$

باز دیده می‌شود هر چه α بزرگ‌تر باشد تغییر ِ نسبی یِ دما کوچک‌تر است.

رابطه‌ها یِ (19) و (27) بسته‌گی یِ N به t را می‌دهند. اگر α ثابت باشد، این بسته‌گی را می‌شود صریح‌تر نوشت:

$$N = N_0\,\left[1 + \frac{A}{V}\,\left(\frac{k_{\mathrm{B}}\,T_0}{8\,\pi\,m\,\alpha^2}\right)^{1/2}\,t\right]^{-2\,\alpha}. \tag{30}$$

اگر α بسیار بزرگ باشد (عبارت ِ درون ِ کروشه تقریباً یک باشد)، رابطه یِ بالا می‌شود

$$N = N_0 \exp\left[-\frac{A}{V}\left(\frac{k_{\rm B}\,T_0}{2\,\pi\,m}\right)^{1/2} t\right]. \tag{31}$$

این همان نتیجه ای است که با فرض ِ ثابت‌بودن ِ دما از رابطه یِ (22) به دست می‌آید.

4 مرجع

[1] P. K. Pathria; "Statistical mechanics", (Pergamon Press, 1972) chapter 6

5 اسم ِ خاص

[a] Boltzmann