X1-035 (2006/01/08)

بیضی‌گون ِ دوار ِ توپر ِ یک‌نواخت‌باردار

محمد خرمی mamwad@mailaps.org

پتانسیل ِ الکتریکی ي حاصل از یک بیضی‌گون ِ دوار ِ توپر ِ یک‌نواخت‌باردار، بر حسب ِ مختصات ِ بیضوی محاسبه می‌شود.

0 مقدمه

چنان که در [1] هم آمده، در سه بُعد دو نوع مختصات ِ بیضوی تعریف می‌کنند. تعریف ِ این مختصات بر حسب ِ مختصات ِ استوانه‌ای ساده‌تر است. در نوع ِ اول، مختصات ِ (u,ϕ,v) از رو ي مختصات ِ استوانه‌ای ي (ρ,ϕ,z) چنین تعریف می‌شود.

$$
\begin{aligned}
\rho &= c\,\cosh u\,\cos v,\\
z &= c\,\sinh u\,\sin v. \qquad (1)
\end{aligned}
$$

گستره ي (u,v) را می‌شود $0\le u<\infty$ و $-(\pi/2)\le v\le(\pi/2)$، یا $-\infty<u<\infty$ و $0\le v\le(\pi/2)$ گرفت. در حالت ِ اول، رویه‌ها ي $u=\mathrm{const}$ بیضی‌گون‌ها ي دوار ِ پخ اند، و رویه‌ها ي $v=\mathrm{const}$ نیم‌هذلولی‌گون‌ها ي یک‌پارچه. در حالت ِ دوم، رویه‌ها ي $u=\mathrm{const}$ نیم‌بیضی‌گون‌ها ي دوار ِ پخ اند، و رویه‌ها ي $v=\mathrm{const}$ هذلولی‌گون‌ها ي

یک‌پارچه. این رویه‌ها یِ مختصاتی، از دوران ِ (حولِ‌محورِ z ِ) بیضی‌ها یا هذلولی‌ها یی به دست می‌آیند که دوران‌یافته یِ کانون‌ها یِشان دایره یِ $(\rho = c, z = 0)$ است.

بر حسب ِ این مختصات، لَپلَسی می‌شود

$$\nabla^2 = \frac{1}{D^2(u,v)} \left(\frac{1}{\cosh u} \frac{\partial}{\partial u} \cosh u \frac{\partial}{\partial u} + \frac{1}{\cos v} \frac{\partial}{\partial v} \cos v \frac{\partial}{\partial v} \right) + \frac{1}{c^2 \cosh^2 u \cos^2 v} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2}, \tag{2}$$

که

$$\begin{aligned} D^2(u,v) &:= c^2 (\cosh^2 u - \cos^2 v), \\ &= c^2 (\sinh^2 u + \sin^2 v). \end{aligned} \tag{3}$$

در نوع ِ دوم، مختصات ِ (s, ϕ, t) از رو یِ مختصات ِ استوانه‌ای یِ (ρ, ϕ, z) چنین تعریف می‌شود.

$$\begin{aligned} \rho &= c \sinh s \cos t, \\ z &= c \cosh s \sin t. \end{aligned} \tag{4}$$

گستره یِ (s, t) می‌شود $0 \le s < \infty$ و $-(\pi/2) \le t \le \pi/2$. رویه‌ها یِ $s = \text{const}$ بیضی‌گون‌ها یِ دوار ِ کشیده اند، و رویه‌ها یِ $t = \text{const}$ نیم‌هذلولی‌گون‌ها یِ دوپارچه. این رویه‌ها یِ مختصاتی دوران‌یافته یِ (حولِ‌محورِ z ِ) بیضی‌ها و هذلولی‌ها یی اند با کانون‌ها یِ $(\rho = 0, z = \pm c)$.

بر حسب ِ این مختصات، لَپلَسی می‌شود

$$\nabla^2 = \frac{1}{F^2(s,t)} \left(\frac{1}{\sinh s} \frac{\partial}{\partial s} \sinh s \frac{\partial}{\partial s} + \frac{1}{\cos t} \frac{\partial}{\partial t} \cos t \frac{\partial}{\partial t} \right) + \frac{1}{c^2 \sinh^2 s \cos^2 t} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2}, \tag{5}$$

که

$$F^2(s,t) := c^2\,(\cosh^2 s - \sin^2 t),$$
$$= c^2\,(\sinh^2 s + \cos^2 t). \tag{6}$$

بر حسب ِ هردو ي ِ این مختصات، معادله ي ِ پواسُن [a] جداشدنی است. بر حسب ِ مختصات ِ اول، این معادله می‌شود

$$\left[A + B + \left(\frac{1}{\cos^2 v} - \frac{1}{\cosh^2 u}\right)\,\frac{\partial^2}{\partial\phi^2}\right]\Phi_\mathrm{o} = -D^2(u,v)\,\varrho, \tag{7}$$

که Φ_o پتانسیل و ϱ چگالی ي ِ بار است، و

$$A := \frac{1}{\cosh u}\,\frac{\partial}{\partial u}\,\cosh u\,\frac{\partial}{\partial u},$$
$$B := \frac{1}{\cos v}\,\frac{\partial}{\partial v}\,\cos v\,\frac{\partial}{\partial v}. \tag{8}$$

بر حسب ِ مختصات ِ دوم، معادله ي ِ پواسُن [a] می‌شود

$$\left[C + E + \left(\frac{1}{\cos^2 t} + \frac{1}{\sinh^2 s}\right)\,\frac{\partial^2}{\partial\phi^2}\right]\Phi_\mathrm{p} = -F^2(s,t)\,\varrho, \tag{9}$$

که Φ_p پتانسیل و ϱ چگالی ي ِ بار است، و

$$C := \frac{1}{\sinh s}\,\frac{\partial}{\partial s}\,\sinh s\,\frac{\partial}{\partial s},$$
$$E := \frac{1}{\cos t}\,\frac{\partial}{\partial t}\,\cos t\,\frac{\partial}{\partial t}. \tag{10}$$

به ویژه اگر پتانسیل تابع ِ ϕ نباشد، معادله‌ها ي ِ (7) و (9) می‌شوند

$$\left(\frac{1}{\cosh u}\,\frac{\partial}{\partial u}\,\cosh u\,\frac{\partial}{\partial u} + \frac{1}{\cos v}\,\frac{\partial}{\partial v}\,\cos v\,\frac{\partial}{\partial v}\right)\Phi_\mathrm{o} = -D^2(u,v)\,\varrho, \tag{11}$$

و

$$\left(\frac{1}{\sinh s}\,\frac{\partial}{\partial s}\,\sinh s\,\frac{\partial}{\partial s} + \frac{1}{\cos t}\,\frac{\partial}{\partial t}\,\cos t\,\frac{\partial}{\partial t}\right)\Phi_\mathrm{p} = -F^2(s,t)\,\varrho. \tag{12}$$

1 بیضی‌گون ِ دوار ِ پخ

یک بیضی‌گون ِ دوار ِ پخ در نظر می‌گیریم که نیم‌محورها یِ بزرگ و کوچک َ ش، به ترتیب a و b اند. محور ِ تقارن ِ این بیضی‌گون را محور ِ z، و مرکز ِ آن را مبدئ ِ مختصات می‌گیریم. معادله یِ این بیضی‌گون در مختصات ِ بیضوی یِ نوع ِ اول با

$$c = \sqrt{a^2 - b^2} \tag{13}$$

می‌شود

$$u = u_0, \tag{14}$$

که

$$u_0 := \sinh^{-1} \frac{b}{\sqrt{a^2 - b^2}}. \tag{15}$$

فرض کنیم چگالی یِ بار ِ الکتریکی درون ِ این بیضی‌گون مقدار ِ ثابت ِ ϱ_0، و بیرون ِ آن صفر است:

$$\varrho = \varrho_0\, H(u_0 - u), \tag{16}$$

که H تابع ِ پله است. بر حسب ِ متغیرها یِ U و V و ثابت ِ Λ:

$$\begin{aligned} U &:= \sinh u,\\ V &:= \sin v,\\ \Lambda &:= c^2\, \varrho, \end{aligned} \tag{17}$$

معادله یِ پواسُن [a] می‌شود

$$\begin{aligned} (A+B)\,\Phi_{\mathrm{o}} &= -\Lambda\,(U^2 + V^2)\,H(U_0 - U),\\ &= -\frac{2\,\Lambda}{3}\,[P_2^A(U)\,P_0^B(V) + P_0^A(U)\,P_2^B(V)]\,H(U_0 - U), \end{aligned} \tag{18}$$

که P_l^B چندجمله‌ای یِ لُژاندر [b] از درجه یِ l است و

$$P_l^A(U) := i^{-l}\, P_l^B(i\, U). \tag{19}$$

به ویژه،

$$P_0^A(U) = 1,$$

$$P_2^A(U) = \frac{3\, U^2 + 1}{2},$$

$$P_0^B(V) = 1,$$

$$P_2^B(V) = \frac{3\, V^2 - 1}{2}. \tag{20}$$

ضمناً عمل‌گرها یِ A و B، بر حسب ِ U و V می‌شوند

$$A = \frac{\partial}{\partial U}\,(1 + U^2)\,\frac{\partial}{\partial U},$$

$$B = \frac{\partial}{\partial V}\,(1 - V^2)\,\frac{\partial}{\partial V}. \tag{21}$$

هم‌چنین،

$$U_0 := \frac{b}{\sqrt{a^2 - b^2}}. \tag{22}$$

هدف حل ِ معادله یِ (18) با شرایط ِ مرزی یِ

$$\left.\frac{\partial \Phi_{\mathrm{o}}}{\partial U}\right|_{U=0} = 0, \tag{23}$$

$$\lim_{U \to \infty} \Phi_{\mathrm{o}} = 0 \tag{24}$$

است.

P_l^B ویژه‌تابع ِ B با ویژه‌مقدار ِ $[-l\,(l+1)]$ است. پس نهاده یِ

$$\Phi_o(U,V) =: \Upsilon_0(U)\, P_0^B(V) + \Upsilon_2(U)\, P_2^B(V) \tag{25}$$

را در نظر می‌گیریم. چون P_l^B ها خطی‌مستقل اند، از معادله یِ (18) نتیجه می‌شود

$$A\,\Upsilon_0(U) = -\frac{2\,\Lambda}{3}\, P_2^A(U)\, H(U_0 - U), \tag{26}$$

$$(A-6)\,\Upsilon_2(U) = -\frac{2\,\Lambda}{3}\, P_0^A(U)\, H(U_0 - U). \tag{27}$$

شرایط ِ مرزی یِ (24) و (25) هم می‌شوند

$$\left.\frac{\mathrm{d}\Upsilon_0}{\mathrm{d}U}\right|_{U=0} = 0, \tag{28}$$

$$\lim_{U\to\infty} \Upsilon_0 = 0, \tag{29}$$

$$\left.\frac{\mathrm{d}\Upsilon_2}{\mathrm{d}U}\right|_{U=0} = 0, \tag{30}$$

$$\lim_{U\to\infty} \Upsilon_2 = 0. \tag{31}$$

نقطه یِ $U\to\infty$ یک تکینه‌گی یِ منظم برا یِ عمل‌گر ِ دیفرانسیل ِ A است. معادله یِ

$$[A - l\,(l+1)]\,\Pi_l^A(U) = 0, \tag{32}$$

را در نظر بگیرید. اگر رفتار ِ Π_l^A در $U\to\infty$ را به شکل ِ U^k بگیریم، با جاگذاری در معادله دیده می‌شود

$$k = l,\ -(l+1). \tag{33}$$

با فرض ِ این که l نامنفی باشد، جواب ِ متناظر با U^{-l-1} در $U\to\infty$ صفر می‌شود. این جواب را با $R_l^A(U)$ نمایش می‌دهیم. هم‌چنین، اگر l صحیح باشد یک جواب ِ معادله یِ (32) همان $P_l^A(U)$ است، که چندجمله‌ای است و به ازا یِ l ها یِ فرد فرد و به ازا یِ l ها یِ زوج زوج است. پس برا یِ l ها یِ صحیح ِ نامنفی، جواب ِ (32) می‌شود

$$\Pi_l^A = \mu\, P_l^A + \nu\, R_l^A. \tag{34}$$

بهنجارشِ R_l^A را چنان می‌گیریم که

$$R_l^A(U) = P_l^A(U)\, \cot^{-1} U + \tilde{P}_l^A(U), \tag{35}$$

که $\tilde{P}_l^A$ چندجمله‌ای یی از درجه یِ $(l-1)$ است، چنان که

$$[A - l\,(l+1)]\, \tilde{P}_l^A(U) = -2 \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}U}\, P_l^A(U). \tag{36}$$

از جمله،

$$R_0^A(U) = \cot^{-1} U,$$

$$R_2^A(U) = P_2^A(U)\, \cot^{-1} U - \frac{3}{2}\, U. \tag{37}$$

معادله یِ (26) هم‌راه با شرایطِ مرزی یِ (28) و (29) نتیجه می‌دهد

$$\Upsilon_0(U) = \begin{cases} -\dfrac{\Lambda}{9}\, P_2^A(U) + \alpha\, P_0^A(U), & U < U_0 \\ \beta\, R_0^A(U), & U > U_0 \end{cases}. \tag{38}$$

با استفاده از پی‌وسته‌گی یِ Υ_0 و مشتقِ‌اَش در $U = U_0$، ضریب‌ها یِ α و β به دست می‌آیند:

$$\alpha = -\frac{\Lambda}{9}\, \frac{W(P_2^A, R_0^A; U_0)}{W(R_0^A, P_0^A; U_0)},$$

$$\beta = -\frac{\Lambda}{9}\, \frac{W(P_2^A, P_0^A; U_0)}{W(R_0^A, P_0^A; U_0)}, \tag{39}$$

که W وُرُنسکی [c] است:

$$W(f, g; x) := f(x)\, g'(x) - g(x)\, f'(x). \tag{40}$$

با جاگذاری یِ (39) در (38) نتیجه می‌شود

$$\Upsilon_0(U)=\begin{cases}\dfrac{\Lambda}{6}\,(U_0^2-U^2)+\dfrac{\Lambda}{3}\,U_0\,(U_0^2+1)\,\cot^{-1}U_0, & U<U_0\\ \dfrac{\Lambda}{3}\,U_0\,(U_0^2+1)\,\cot^{-1}U, & U>U_0\end{cases}. \tag{41}$$

به همین ترتیب، معادله‌ ی (27) هم‌راه با شرایط ِ مرزی ی (30) و (31) نتیجه می‌دهد

$$\Upsilon_2(U)=\begin{cases}\dfrac{\Lambda}{9}\,P_0^A(U)+\gamma\,P_2^A(U), & U<U_0\\ \delta\,R_2^A(U), & U>U_0\end{cases}. \tag{42}$$

با استفاده از پی‌وسته‌گی ی Υ_2 و مشتق ِ‌ش در $U=U_0$، ضریب‌ها ی γ و δ به دست می‌آیند:

$$\gamma=\frac{\Lambda}{9}\,\frac{W(P_0^A,R_2^A;U_0)}{W(R_2^A,P_2^A;U_0)},$$

$$\delta=\frac{\Lambda}{9}\,\frac{W(P_0^A,P_2^A;U_0)}{W(R_2^A,P_2^A;U_0)}. \tag{43}$$

با گذاشتن ِ این‌ها در (42) نتیجه می‌شود

$$\Upsilon_2(U)=\begin{cases}\dfrac{\Lambda}{18}\,\{[3\,U_0\,(U_0^2+1)\,\cot^{-1}U_0-3\,U_0^2-2]\,(3\,U^2+1)+2\}, & U<U_0\\ \dfrac{\Lambda}{6}\,U_0\,(U_0^2+1)\,[(3\,U^2+1)\,\cot^{-1}U-3\,U], & U>U_0\end{cases}. \tag{44}$$

از (25)، (41)، و (44) نتیجه می‌شود

$$\Phi_{\rm o}=\Phi_{\rm o}^-\,H(U_0-U)+\Phi_{\rm o}^+\,H(U-U_0), \tag{45}$$

که

$$\Phi_{\rm o}^-=\frac{\Lambda}{36}\,\{[3\,U_0\,(U_0^2+1)\,\cot^{-1}U_0-3\,U_0^2-2]\,(3\,U^2+1)+2\}\,(3\,V^2-1)$$

$$+\frac{\Lambda}{6}\,(U_0^2-U^2)+\frac{\Lambda}{3}\,U_0\,(U_0^2+1)\,\cot^{-1}U_0 \tag{46}$$

و

$$\Phi_\mathrm{o}^+ = \frac{\Lambda}{12}\, U_0\, (U_0^2+1)\, \{4\, \cot^{-1} U + [(3\, U^2+1)\, \cot^{-1} U - 3\, U]\, (3\, V^2-1)\}. \quad (47)$$

این عبارت را می‌شود بر حسب ِ Q_o (بار ِ درون ِ بیضی‌گون) هم نوشت. داریم

$$Q_\mathrm{o} = \frac{4\,\pi}{3}\, \frac{\Lambda\, b\, a^2}{c^2}, \quad (48)$$

و

$$U_0\, (U_0^2+1) = \frac{b\, a^2}{c^3}. \quad (49)$$

از این‌جا،

$$\Phi_\mathrm{o}^+ = \frac{Q_\mathrm{o}}{16\,\pi\, c}\, \{4\, \cot^{-1} U + [(3\, U^2+1)\, \cot^{-1} U - 3\, U]\, (3\, V^2-1)\},$$

$$= \frac{Q_\mathrm{o}}{4\,\pi\, c}\, [R_0^A(U) + R_2^A(U)\, P_2^B(V)]. \quad (50)$$

نقاط ِ دور از بیضی‌گون متناظر اند با U ها یِ بزرگ. در این نقاط،

$$\Phi_\mathrm{o} \approx \frac{Q_\mathrm{o}}{4\,\pi\, c\, U},$$

$$\approx \frac{Q_\mathrm{o}}{4\,\pi\, r}, \quad (51)$$

که r فاصله از مرکز ِ بیضی‌گون است.

یک حالت ِ حدی این است که بیضی‌گون به قرص تبدیل شود. این یعنی حد ِ $b\to 0$ با a و Q_o ثابت. در این حالت a همان c است، و پتانسیل همه‌جا Φ_o^+ است. می‌شود دید چگالی یِ سطحی یِ قرص ِ حاصل چه قدر است. داریم

$$\sigma = -2\, \lim_{z\to 0^+} \left(\frac{\partial \Phi_\mathrm{o}}{\partial z}\right)_\rho,$$

$$= -2\, \lim_{z\to 0^+} \left[\left(\frac{\partial \Phi_\mathrm{o}}{\partial u}\right)_v \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)_\rho + \left(\frac{\partial \Phi_\mathrm{o}}{\partial v}\right)_u \left(\frac{\partial v}{\partial z}\right)_\rho\right]. \quad (52)$$

از این‌جا نتیجه می‌شود

$$\sigma = \frac{3\,Q_{\rm o}}{2\,\pi\,c^2}\,\sin v,$$

$$= \frac{3\,Q_{\rm o}}{2\,\pi\,c^2}\,\sqrt{1-(\rho/c)^2}. \qquad (53)$$

این چگالی یک‌نواخت نیست، و نباید هم باشد. به‌ساده‌گی دیده می‌شود عبارت ِ $\sqrt{1-(\rho/c)^2}$ نسبت ِ کلفتی ِ بیضی‌گون در فاصله ِی ρ از محور ِ z، به کلفتی ِی بیضی‌گون در محور ِ z، در حد ِ $b \to 0$ است. این چگالی ِی سطحی هم حد ِ چگالی ِی حجمی در کلفتی ِی بیضی‌گون، در $b \to 0$ است.

2 بیضی‌گون ِ دوار ِ کشیده

یک بیضی‌گون ِ دوار ِ کشیده در نظر می‌گیریم که نیم‌محورها ِی بزرگ و کوچک َ ش، به ترتیب a و b اند. محور ِ تقارن ِ این بیضی‌گون را محور ِ z، و مرکز ِ آن را مبدئ ِ مختصات می‌گیریم. معادله ِی این بیضی‌گون در مختصات ِ بیضوی ِی نوع ِ دوم با

$$c = \sqrt{a^2 - b^2} \qquad (54)$$

می‌شود

$$s = s_0, \qquad (55)$$

که

$$s_0 := \cosh^{-1}\frac{a}{\sqrt{a^2-b^2}}. \qquad (56)$$

فرض کنیم چگالی ِی بار ِ الکتریکی درون ِ این بیضی‌گون مقدار ِ ثابت ِ ϱ_0، و بیرون ِ آن صفر است:

$$\varrho = \varrho_0\, H(s_0 - s), \qquad (57)$$

بر حسب ِ متغیرها ِی S و T و ثابت ِ Λ:

$$
\begin{aligned}
S &:= \cosh s,\\
T &:= \sin t,\\
\Lambda &:= c^2\, \varrho,
\end{aligned}
\tag{58}
$$

معادله یِ پواسُن [a] می‌شود

$$
\begin{aligned}
(C+E)\,\Phi_{\mathrm{p}} &= -\Lambda\,(S^2-T^2)\,H(S_0-S),\\
&= -\frac{2\,\Lambda}{3}\,[P_2^C(S)\,P_0^E(T)-P_0^C(S)\,P_2^E(T)]\,H(S_0-S),
\end{aligned}
\tag{59}
$$

که P_l^E و P_l^C چندجمله‌ای‌ها یِ لُژاندر [b] از درجه یِ l اند. به ویژه،

$$
\begin{aligned}
P_0^C(S) &= 1,\\
P_2^C(S) &= \frac{3\,S^2-1}{2},\\
P_0^E(T) &= 1,\\
P_2^E(T) &= \frac{3\,T^2-1}{2}.
\end{aligned}
\tag{60}
$$

ضمناً عمل‌گرها یِ C و E، بر حسب ِ S و T می‌شوند

$$
\begin{aligned}
C &= \frac{\partial}{\partial S}\,(-1+S^2)\,\frac{\partial}{\partial S},\\
E &= \frac{\partial}{\partial T}\,(1-T^2)\,\frac{\partial}{\partial T}.
\end{aligned}
\tag{61}
$$

هم‌چنین،

$$
S_0 := \frac{a}{\sqrt{a^2-b^2}}. \tag{62}
$$

می‌شود با روش ی مشابه با روش ِ بخش ِ پیش پتانسیل ِ $\Phi_{\rm p}$ را حساب کرد. اما ساده‌تر این است که توجه کنیم عمل‌گر ِ C به عمل‌گر ِ A، و عمل‌گر ِ E به عمل‌گر ِ B مربوط است:

$$\begin{aligned} C &= A(U \to i\,S), \\ E &= B(V \to T), \end{aligned} \tag{63}$$

و از آن‌جا دیده می‌شود اگر $\Phi_{\rm o}$ جواب ِ (18) باشد، آن‌گاه $\Phi_{\rm p}$ با

$$\Phi_{\rm p}(S,T) := -\Phi_{\rm o}(i\,S,T) \tag{64}$$

جواب ِ (59) است. در این جاگذاری،

$$\cot^{-1}(i\,S) = -i\,\coth^{-1} S. \tag{65}$$

به این ترتیب،

$$\Phi_{\rm p} = \Phi_{\rm p}^{-}\,H(S_0 - S) + \Phi_{\rm p}^{+}\,H(S - S_0), \tag{66}$$

که

$$\begin{aligned} \Phi_{\rm p}^{-} &= \frac{\Lambda}{36}\,\{[-3\,S_0\,(S_0^2-1)\,\coth^{-1} S_0 + 3\,S_0^2 - 2]\,(3\,S^2-1) - 2\}\,(3\,V^2-1) \\ &\quad + \frac{\Lambda}{6}\,(S_0^2 - S^2) + \frac{\Lambda}{3}\,S_0\,(S_0^2-1)\,\coth^{-1} S_0 \end{aligned} \tag{67}$$

و

$$\Phi_{\rm p}^{+} = \frac{\Lambda}{12}\,S_0\,(S_0^2-1)\,\{4\,\coth^{-1} S - [(3\,S^2-1)\,\coth^{-1} S - 3\,S]\,(3\,V^2-1)\}. \tag{68}$$

این عبارت را می‌شود بر حسب ِ $Q_{\rm p}$ (بار ِ درون ِ بیضی‌گون) هم نوشت. داریم

$$Q_{\rm p} = \frac{4\,\pi}{3}\,\frac{\Lambda\,a\,b^2}{c^2}, \tag{69}$$

و

$$S_0\,(S_0^2-1) = \frac{a\,b^2}{c^3}. \tag{70}$$

از این‌جا،

$$\Phi_{\rm p}^{+} = \frac{Q_{\rm p}}{16\,\pi\,c}\,\{4\,\coth^{-1}S - [(3\,S^2-1)\,\coth^{-1}S - 3\,S]\,(3\,T^2-1)\},$$

$$= \frac{Q_{\rm p}}{4\,\pi\,c}\,[R_0^C(S) - R_2^C(S)\,P_2^B(T)], \qquad (71)$$

که

$$R_0^C(S) := \coth^{-1}(S),$$

$$R_2^C(S) := P_2^C(S)\,\coth^{-1}S - \frac{3}{2}\,S. \qquad (72)$$

$R_0^C(S)$ و $R_2^C(S)$ آن جواب‌ها یِ معادله یِ لُژاندر [b] با $l=0$ و $l=2$ اند، که در $S\to\infty$ مثل ِ S^{-l-1} رفتار می‌کنند. نقاط ِ دور از بیضی‌گون متناظر اند با S ها یِ بزرگ. در این نقاط،

$$\Phi_{\rm p} \approx \frac{Q_{\rm p}}{4\,\pi\,c\,S},$$

$$\approx \frac{Q_{\rm p}}{4\,\pi\,r}, \qquad (73)$$

که r فاصله از مرکز ِ بیضی‌گون است.

یک حالت ِ حدی این است که بیضی‌گون به میله تبدیل شود. این یعنی حد ِ $b\to 0$ با a و $Q_{\rm p}$ ثابت. در این حالت a همان c است، و پتانسیل همه‌جا $\Phi_{\rm p}^{+}$ است. می‌شود دید چگالی‌یِ‌طولی یِ میله یِ حاصل چه قدر است. داریم

$$\lambda = -2\,\pi\,\lim_{\rho\to 0}\left[\rho\,\left(\frac{\partial\Phi_{\rm p}}{\partial\rho}\right)_z\right],$$

$$= -2\,\pi\,\lim_{\rho\to 0}\left\{\rho\,\left[\left(\frac{\partial\Phi_{\rm p}}{\partial s}\right)_t\,\left(\frac{\partial s}{\partial\rho}\right)_z + \left(\frac{\partial\Phi_{\rm p}}{\partial t}\right)_s\,\left(\frac{\partial t}{\partial\rho}\right)_z\right]\right\}. \qquad (74)$$

از این‌جا نتیجه می‌شود

$$\lambda = \frac{Q_\mathrm{p}}{2\,c}\,[1 - P_2^C(\sin v)],$$
$$= \frac{3\,Q_\mathrm{p}}{4\,c}\,\left[1 - \left(\frac{z}{c}\right)^2\right]. \tag{75}$$

این چگالی یک‌نواخت نیست، و نباید هم باشد. می‌شود دید عبارت ِ $[1 - (z/c)^2]$ نسبت ِ مساحت ِ مقطع ِ بیضی‌گون در فاصله ی ِ z از صفحه ی ِ $x\,y$، به مساحت ِ مقطع ِ بیضی‌گون در صفحه ی ِ $x\,y$، در حد ِ $b \to 0$ است. این چگالی ی ِ طولی هم حد ِ چگالی ی ِ حجمی در مساحت ِ مقطع ِ بیضی‌گون، در $b \to 0$ است.

3 مرجع

[1] محمد خرمی؛ ”مختصات ِ بیضوی در چند مسئله ی ِ الکترومغناطیس“، X1-010 (2002/04/17)

4 اسم‌ها ی ِ خاص

[a] Poisson

[b] Legendre

[c] Wronski