X1-035 (2006/01/08)

بیضیگون ِ دوار ِ توپر ِ یکنواخت-باردار

محمد خرمی mamwad@mailaps.org

پتانسیل ِ الکتریکی یِ حاصل از یک بیضیگون ِ دوار ِ توپر ِ یکنواخت-باردار، بر حسب ِ مختصات ِ بیضوی محاسبه میشود.

0 مقدمه

چنان که در [1] هم آمده، در سه بُعد دُ نوع مختصات ِ بیضوی تعریف میکنند. تعریف ِ این مختصات بر حسب ِ مختصات ِ استوانه‌ای ساده‌تر است. در نُع ِ اول، مختصات ِ (u, ϕ, v) از رو یِ مختصات ِ استوانه‌ای یِ (ρ, ϕ, z) چنین تعریف میشود.

$$\rho = c\,\cosh u\,\sin v,$$
$$z = c\,\sinh u\,\cos v. \tag{1}$$

گستره یِ (u, v) را میشود $(0 \le u < \infty, 0 \le v \le \pi)$، یا $(-\infty < u < \infty, 0 \le v \le (\pi/2))$ گرفت. در حالت ِ اول، رویه‌ها یِ $u = \text{constant}$ بیضیگونها یِ دوار ِ پخ اند، و رویه‌ها یِ $v = \text{constant}$ نیمه‌ذلولیگونها یِ یکپارچه. در حالت ِ دوم، رویه‌ها یِ $u = \text{constant}$ نیمبیضیگونها یِ

دوار ِ پخ اند، و رویه‌ها یِ $v = \text{constant}$ هذلولیگونها یِ یکپارچه. این رویه‌ها یِ مختصاتی، از دوران ِ (حوُلِ محورِ z ِ) بیضیها یا هذلولیها یی به دست می‌آیند که دورانیافته یِ کانونها یِشان دایره یِ $(\rho = c, z = 0)$ است.

بر حسب ِ این مختصات، لَپلَسی میشود

$$\nabla^2 = \frac{1}{D^2(u,v)}\left(\frac{1}{\cosh u}\frac{\partial}{\partial u}\cosh u\frac{\partial}{\partial u} + \frac{1}{\sin v}\frac{\partial}{\partial v}\sin v\frac{\partial}{\partial v}\right) + \frac{1}{c^2\cosh^2 u\sin^2 v}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2}, \qquad (2)$$

که

$$D^2(u,v) := c^2(\cosh^2 u - \sin^2 v), = c^2(\sinh^2 u + \cos^2 v). \qquad (3)$$

در نُع ِ دوم، مختصات ِ (s, ϕ, t) از رو یِ مختصات ِ استوانه‌ای یِ (ρ, ϕ, z) چنین تعریف میشود.

$$\rho = c\sinh s\sin t, \quad z = c\cosh s\cos t. \qquad (4)$$

گستره یِ (s, t) میشود $(0 \le s < \infty, 0 \le t \le v)$. رویه‌ها یِ $s = \text{constant}$ بیضیگونها یِ دوار ِ کشیده اند، و رویه‌ها یِ $t = \text{constant}$ نیمهذلولیگونها یِ دُپارچه. این رویه‌ها یِ مختصاتی دورانیافته یِ (حولِ محورِ z ِ) بیضیها و هذلولیها یی با کانونها یِ $(\rho = 0, z = \pm c)$ اند.

بر حسب ِ این مختصات، لَپلَسی میشود

$$\nabla^2 = \frac{1}{F^2(s,t)}\left(\frac{1}{\sinh s}\frac{\partial}{\partial s}\sinh s\frac{\partial}{\partial s} + \frac{1}{\sin t}\frac{\partial}{\partial t}\sin t\frac{\partial}{\partial t}\right) + \frac{1}{c^2\sinh^2 s\sin^2 t}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2}, \qquad (5)$$

که

$$F^2(s,t) := c^2(\cosh^2 s - \cos^2 t), = c^2(\sinh^2 s + \sin^2 t). \qquad (6)$$

بر حسب ِ هردُ یِ این مختصات، معادله یِ پُوَسُن [2] جداشدنی است. بر حسب ِ مختصات ِ اول، این معادله میشود

$$\left[A+B+\left(\frac{1}{\sin^2 v}-\frac{1}{\cosh^2 u}\right)\,\frac{\partial^2}{\partial\phi^2}\right]\Phi_{\rm o}=-D^2(u,v)\,\varrho, \tag{7}$$

که $\Phi_{\rm o}$ پتانسیل و ϱ چگالی یِ بار است، و

$$\begin{aligned} A&:=\frac{1}{\cosh u}\,\frac{\partial}{\partial u}\,\cosh u\,\frac{\partial}{\partial u},\\ B&:=\frac{1}{\sin v}\,\frac{\partial}{\partial v}\,\sin v\,\frac{\partial}{\partial v}. \end{aligned} \tag{8}$$

بر حسب ِ مختصات ِ دوم، معادله یِ پُوَسُن [2] میشود

$$\left[C+E+\left(\frac{1}{\sin^2 t}+\frac{1}{\sinh^2 s}\right)\,\frac{\partial^2}{\partial\phi^2}\right]\Phi_{\rm p}=-F^2(s,t)\,\varrho, \tag{9}$$

که $\Phi_{\rm p}$ پتانسیل و ϱ چگالی یِ بار است، و

$$\begin{aligned} C&:=\frac{1}{\sinh s}\,\frac{\partial}{\partial s}\,\sinh s\,\frac{\partial}{\partial s},\\ E&:=\frac{1}{\sin t}\,\frac{\partial}{\partial t}\,\sin t\,\frac{\partial}{\partial t}. \end{aligned} \tag{10}$$

به ویژه اگر پتانسیل تابع ِ ϕ نباشد، معادلهها یِ (7) و (9) میشوند

$$\left(\frac{1}{\cosh u}\,\frac{\partial}{\partial u}\,\cosh u\,\frac{\partial}{\partial u}+\frac{1}{\sin v}\,\frac{\partial}{\partial v}\,\sin v\,\frac{\partial}{\partial v}\right)\Phi_{\rm o}=-D^2(u,v)\,\varrho, \tag{11}$$

و

$$\left(\frac{1}{\sinh s}\,\frac{\partial}{\partial s}\,\sinh s\,\frac{\partial}{\partial s}+\frac{1}{\sin t}\,\frac{\partial}{\partial t}\,\sin t\,\frac{\partial}{\partial t}\right)\Phi_{\rm p}=-F^2(s,t)\,\varrho. \tag{12}$$

1 بیضیگون ِ دوار ِ پخ

یک بیضیگون ِ دوار ِ پخ در نظر میگیریم که نیممحورها یِ بزرگ و کوچک َش، به ترتیب a و b اند. محور ِ تقارن ِ این بیضیگون را محور ِ z، و مرکز ِ آن را مبدئ ِ مختصات میگیریم. معادله یِ این

بیضیگون در مختصات ِ بیضوی ی ِ نُع ِ اول با

$$c = \sqrt{a^2 - b^2} \tag{13}$$

می‌شود

$$u = u_0, \tag{14}$$

که

$$u_0 := \sinh^{-1} \frac{b}{\sqrt{a^2 - b^2}}. \tag{15}$$

فرض کنیم چگالی ی ِ بار ِ الکتریکی درون ِ این بیضیگون مقدار ِ ثابت ِ ϱ_0، و بیرون ِ آن صفر است:

$$\varrho = \varrho_0\, H(u_0 - u), \tag{16}$$

که H تابع ِ پله است. بر حسب ِ متغیرها ی ِ U و V و ثابت ِ Λ:

$$\begin{aligned} U &:= \sinh u, \\ V &:= \cos v, \\ \Lambda &:= c^2\, \varrho, \end{aligned} \tag{17}$$

معادله ی ِ پُوَسُن [2] میشود

$$\begin{aligned} (A + B)\, \Phi_{\mathrm{o}} &= -\Lambda\, (U^2 + V^2)\, H(U_0 - U), \\ &= -\frac{2\,\Lambda}{3}\, [P_2^A(U)\, P_0^B(V) + P_0^A(U)\, P_2^B(V)]\, H(U_0 - U), \end{aligned} \tag{18}$$

که P_l^B چندجمله‌ای ی ِ لُژاندر [3] از درجه ی ِ l است و

$$P_l^A(U) := i^{-l}\, P_l^B(i\, U). \tag{19}$$

به ویژه،

$$
\begin{aligned}
P_0^A(U) &= 1,\\
P_2^A(U) &= \frac{3\,U^2+1}{2},\\
P_0^B(V) &= 1,\\
P_2^B(V) &= \frac{3\,V^2-1}{2}.
\end{aligned}
\tag{20}
$$

ضمنَن عملگرها یِ A و B، بر حسب ِ U و V میشوند

$$
\begin{aligned}
A &= \frac{\partial}{\partial U}\,(1+U^2)\,\frac{\partial}{\partial U},\\
B &= \frac{\partial}{\partial V}\,(1-V^2)\,\frac{\partial}{\partial V}.
\end{aligned}
\tag{21}
$$

همچنین،

$$
U_0 := \frac{b}{\sqrt{a^2-b^2}}. \tag{22}
$$

هدف حل ِ معادله یِ (18) با شرایط ِ مرزی یِ

$$
\left.\frac{\partial \Phi_{\mathrm{o}}}{\partial U}\right|_{U=0} = 0, \tag{23}
$$

$$
\lim_{U\to\infty} \Phi_{\mathrm{o}} = 0 \tag{24}
$$

است.

P_l^B ویژه‌تابع ِ B با ویژه‌مقدار ِ $[-l\,(l+1)]$ است. پس نهاده یِ

$$
\Phi_{\mathrm{o}}(U,V) =: \Upsilon_0(U)\,P_0^B(V) + \Upsilon_2(U)\,P_2^B(V) \tag{25}
$$

را در نظر میگیریم. چون P_l^B ها خطیمستقل اند، از (18) نتیجه میشود

$$
A\,\Upsilon_0(U) = -\frac{2\,\Lambda}{3}\,P_2^A(U)\,H(U_0-U), \tag{26}
$$

$$
(A-6)\,\Upsilon_2(U) = -\frac{2\,\Lambda}{3}\,P_0^A(U)\,H(U_0-U). \tag{27}
$$

شرایط ِ مرزی یِ (24) و (25) هم میشوند

$$\left.\frac{\mathrm{d}\Upsilon_0}{\mathrm{d}U}\right|_{U=0} = 0, \tag{28}$$

$$\lim_{U\to\infty} \Upsilon_0 = 0, \tag{29}$$

$$\left.\frac{\mathrm{d}\Upsilon_2}{\mathrm{d}U}\right|_{U=0} = 0, \tag{30}$$

$$\lim_{U\to\infty} \Upsilon_2 = 0. \tag{31}$$

نقطه یِ $U\to\infty$ یک تکینه‌گی یِ منظم برا یِ عملگر ِ دیفرانسیل ِ A است. معادله یِ

$$[A - l\,(l+1)]\,\Pi_l^A(U) = 0, \tag{32}$$

را در نظر بگیرید. اگر رفتار ِ Π_l^A در $U\to\infty$ را به شکل ِ U^k بگیریم، با جاگذاری در معادله دیده میشود

$$k = l \ \vee \ k = -(l+1). \tag{33}$$

با فرض ِ این که l نامنفی باشد، جواب ِ متناظر با U^{-l-1} در $U\to\infty$ صفر میشود. این جواب را با $R_l^A(U)$ نمایش میدهیم. هم‌چنین، اگر l صحیح باشد یک جواب ِ معادله یِ (32) هم ان $P_l^A(U)$ است، که چندجمله‌ای است و به ازا یِ l ها یِ فرد فرد و به ازا یِ l ها یِ زُج زُج است. پس برا یِ l ها یِ صحیح ِ نامنفی، جواب ِ (32) میشود

$$\Pi_l^A = \mu\, P_l^A + \nu\, R_l^A. \tag{34}$$

بهنجارش ِ R_l^A را چنان میگیریم که

$$R_l^A(U) = P_l^A(U)\,\cot^{-1} U + \tilde{P}_l^A(U), \tag{35}$$

که $\tilde{P}_l^A$ چندجمله‌ای یی از درجه یِ $(l-1)$ است، چنان که

$$[A - l\,(l+1)]\,\tilde{P}_l^A(U) = -2\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}U}\,P_l^A(U). \tag{36}$$

از جمله،

$$R_0^A(U) = cot^{-1}U,$$
$$R_2^A(U) = P_2^A(U)\,\cot^{-1}U - \frac{3}{2}\,U. \tag{37}$$

معادله یِ (26) همراه با شرایطِ مرزی یِ (28) و (29) نتیجه میدهد

$$\Upsilon_0(U) = \begin{cases} -\dfrac{\Lambda}{9}\,P_2^A(U) + \alpha\,P_0^A(U), & U < U_0 \\ \beta\,R_0^A(U), & U > U_0 \end{cases}. \tag{38}$$

با استفاده از پیوسته‌گی یِ Υ_0 و مشتقَ‌ش در $U = U_0$، ضریبها یِ α و β به دست می‌آیند:

$$\alpha = -\frac{\Lambda}{9}\,\frac{W(P_2^A, R_0^A; U_0)}{W(R_0^A, P_0^A; U_0)},$$
$$\beta = -\frac{\Lambda}{9}\,\frac{W(P_2^A, P_0^A; U_0)}{W(R_0^A, P_0^A; U_0)}, \tag{39}$$

که W وُرُنسکی [4] است:

$$W(f, g; x) := f(x)\,g'(x) - g(x)\,f'(x). \tag{40}$$

با جاگذاری یِ (39) در (38) نتیجه میشود

$$\Upsilon_0(U) = \begin{cases} \dfrac{\Lambda}{6}\,(U_0^2 - U^2) + \dfrac{\Lambda}{3}\,U_0\,(U_0^2+1)\,\cot^{-1}U_0, & U < U_0 \\ \dfrac{\Lambda}{3}\,U_0\,(U_0^2+1)\,\cot^{-1}U, & U > U_0 \end{cases}. \tag{41}$$

به هم ین ترتیب، معادله یِ (27) همراه با شرایطِ مرزی یِ (30) و (31) نتیجه میدهد

$$\Upsilon_2(U) = \begin{cases} \dfrac{\Lambda}{9}\,P_0^A(U) + \gamma\,P_2^A(U), & U < U_0 \\ \delta\,R_2^A(U), & U > U_0 \end{cases}. \tag{42}$$

با استفاده از پیوسته‌گی یِ Υ_2 و مشتقَ‌ش در $U = U_0$، ضریبها یِ γ و δ به دست می‌آیند:

$$\gamma = \frac{\Lambda}{9}\,\frac{W(P_0^A, R_2^A; U_0)}{W(R_2^A, P_2^A; U_0)},$$
$$\delta = \frac{\Lambda}{9}\,\frac{W(P_0^A, P_2^A; U_0)}{W(R_2^A, P_2^A; U_0)}. \tag{43}$$

با گذاشتن ِ اینها در (42) نتیجه میشود

$$\Upsilon_2(U) = \begin{cases} \dfrac{\Lambda}{18}\,\{[3\,U_0\,(U_0^2+1)\,\cot^{-1}U_0 - 3\,U_0^2 - 2]\,(3\,U^2+1)+2\}, & U < U_0 \\ \dfrac{\Lambda}{6}\,U_0\,(U_0^2+1)\,[(3\,U^2+1)\,\cot^{-1}U - 3\,U], & U > U_0 \end{cases}. \tag{44}$$

از (25)، (41)، و (44) نتیجه میشود

$$\Phi_{\rm o} = \Phi_{\rm o}^-\,H(U_0-U) + \Phi_{\rm o}^+\,H(U-U_0), \tag{45}$$

که

$$\begin{aligned}\Phi_{\rm o}^- &= \frac{\Lambda}{36}\,\{[3\,U_0\,(U_0^2+1)\,\cot^{-1}U_0 - 3\,U_0^2-2]\,(3\,U^2+1)+2\}\,(3\,V^2-1)\\ &\quad + \frac{\Lambda}{6}\,(U_0^2-U^2) + \frac{\Lambda}{3}\,U_0\,(U_0^2+1)\,\cot^{-1}U_0,\end{aligned} \tag{46}$$

و

$$\Phi_{\rm o}^+ = \frac{\Lambda}{12}\,U_0\,(U_0^2+1)\,\{4\,\cot^{-1}U + [(3\,U^2+1)\,\cot^{-1}U - 3\,U]\,(3\,V^2-1)\}. \tag{47}$$

این عبارت را میشود بر حسب ِ $Q_{\rm o}$ (بار ِ درون ِ بیضیگون) هم نوشت. داریم

$$Q_{\rm o} = \frac{4\,\pi}{3}\,\frac{\Lambda\,b\,a^2}{c^2}, \tag{48}$$

و

$$U_0\,(U_0^2+1) = \frac{b\,a^2}{c^3}. \tag{49}$$

از اینجا،

$$\begin{aligned}\Phi_{\rm o}^+ &= \frac{Q_{\rm o}}{16\,\pi\,c}\,\{4\,\cot^{-1}U + [(3\,U^2+1)\,\cot^{-1}U - 3\,U]\,(3\,V^2-1)\},\\ &= \frac{Q_{\rm o}}{4\,\pi\,c}\,[R_0^A(U) + R_2^A(U)\,P_2^B(V)].\end{aligned} \tag{50}$$

نقاط ِ دور از بیضیگون متناظر اند با U ها ی ِ بزرگ. در این نقاط،

$$\begin{aligned}\Phi_{\rm o} &\approx \frac{Q_{\rm o}}{4\,\pi\,c\,U},\\ &\approx \frac{Q_{\rm o}}{4\,\pi\,r},\end{aligned} \tag{51}$$

که r فاصله از مرکزِ بیضیگون است.

یک حالتِ حدی این است که بیضیگون به قرص تبدیل شود. این یعنی حدِ $b\to 0$ با a و $Q_{\rm o}$ ثابت. در این حالت a هم ان c است، و پتانسیل همه جا $\Phi_{\rm o}^+$ است. میشود دید چگالیِ سطحی یِ قرصِ حاصل چه قدر است. داریم

$$\begin{aligned}\sigma &= -2\lim_{z\to 0^+}\left(\frac{\partial\Phi_{\rm o}}{\partial z}\right)_\rho,\\ &= -2\lim_{z\to 0^+}\left[\left(\frac{\partial\Phi_{\rm o}}{\partial u}\right)_v\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)_\rho+\left(\frac{\partial\Phi_{\rm o}}{\partial v}\right)_u\left(\frac{\partial v}{\partial z}\right)_\rho\right].\end{aligned}\tag{52}$$

از این‌جا نتیجه میشود

$$\begin{aligned}\sigma &= \frac{3\,Q_{\rm o}}{2\,\pi\,c^2}\,\cos v,\\ &= \frac{3\,Q_{\rm o}}{2\,\pi\,c^2}\,\sqrt{1-(\rho/c)^2}.\end{aligned}\tag{53}$$

این چگالی یکنواخت نیست، و نباید هم باشد. به ساده‌گی دیده میشود عبارتِ $\sqrt{1-(\rho/c)^2}$ نسبتِ کلفتی یِ بیضیگون در فاصله یِ ρ از محورِ z، به کلفتی یِ بیضیگون در محورِ z، در حدِ $b\to 0$ است. این چگالی یِ سطحی هم حدِ چگالی یِ حجمی در کلفتی یِ بیضیگون، در $b\to 0$ است.

2 بیضیگونِ دوارِ کشیده

یک بیضیگونِ دوارِ کشیده در نظر میگیریم که نیممحورها یِ بزرگ و کوچک َش، به ترتیب a و b اند. محورِ تقارنِ این بیضیگون را محورِ z، و مرکزِ آن را مبدئِ مختصات میگیریم. معادله یِ این بیضیگون در مختصاتِ بیضوی یِ نُعِ دوم با

$$c=\sqrt{a^2-b^2}\tag{54}$$

میشود

$$s=s_0,\tag{55}$$

که

$$s_0:=\cosh^{-1}\frac{a}{\sqrt{a^2-b^2}}.\tag{56}$$

فرض کنیم چگالی یِ بار ِ الکتریکی درون ِ این بیضیگون مقدار ِ ثابت ِ ϱ_0، و بیرون ِ آن صفر است:

$$\varrho = \varrho_0\, H(s_0 - s), \tag{57}$$

بر حسب ِ متغیرها یِ S و T و ثابت ِ Λ:

$$\begin{aligned} S &:= \cosh s, \\ T &:= \cos t, \\ \Lambda &:= c^2\, \varrho, \end{aligned} \tag{58}$$

معادله یِ پُوَسُن [2] میشود

$$\begin{aligned} (C+E)\,\Phi_{\mathrm{p}} &= -\Lambda\,(S^2 - T^2)\,H(S_0 - S), \\ &= -\frac{2\,\Lambda}{3}\,[P_2^C(S)\,P_0^E(T) - P_0^C(S)\,P_2^E(T)]\,H(S_0 - S), \end{aligned} \tag{59}$$

که P_l^E و P_l^C چندجمله‌ای‌ها یِ لُژاندر [3] از درجه یِ l اند. به ویژه،

$$\begin{aligned} P_0^C(S) &= 1, \\ P_2^C(S) &= \frac{3\,S^2 - 1}{2}, \\ P_0^E(T) &= 1, \\ P_2^E(T) &= \frac{3\,T^2 - 1}{2}. \end{aligned} \tag{60}$$

ضمنَن عملگرها یِ C و E، بر حسب ِ S و T میشوند

$$\begin{aligned} C &= \frac{\partial}{\partial S}\,(-1 + S^2)\,\frac{\partial}{\partial S}, \\ E &= \frac{\partial}{\partial T}\,(1 - T^2)\,\frac{\partial}{\partial T}. \end{aligned} \tag{61}$$

همچنین،

$$S_0 := \frac{a}{\sqrt{a^2 - b^2}}. \tag{62}$$

میشود با روش ی مشابه با روش ِ بخش ِ پیش پتانسیل ِ $\Phi_{\rm p}$ را حساب کرد. اما ساده‌تر این است که توجه کنیم عملگر ِ C به عملگر ِ A، و عملگر ِ E به عملگر ِ B مربوط است:

$$\begin{aligned} C &= A(U \to i\,S), \\ E &= B(V \to T), \end{aligned} \tag{63}$$

و از آنجا دیده میشود اگر $\Phi_{\rm o}$ جواب ِ (18) باشد، آنگاه $\Phi_{\rm p}$ با

$$\Phi_{\rm p}(S,T) := -\Phi_{\rm o}(i\,S,T) \tag{64}$$

جواب ِ (60) است. در این جاگذاری،

$$\cot^{-1}(i\,S) = -i\,\coth^{-1} S. \tag{65}$$

به این ترتیب،

$$\Phi_{\rm p} = \Phi_{\rm p}^{-}\,H(S_0 - S) + \Phi_{\rm p}^{+}\,H(S - S_0), \tag{66}$$

که

$$\begin{aligned} \Phi_{\rm p}^{-} = {}& \frac{\Lambda}{36}\,\{[-3\,S_0\,(S_0^2-1)\,\coth^{-1} S_0 + 3\,S_0^2 - 2]\,(3\,S^2-1) - 2\}\,(3\,V^2-1) \\ & + \frac{\Lambda}{6}\,(S_0^2 - S^2) + \frac{\Lambda}{3}\,S_0\,(S_0^2-1)\,\coth^{-1} S_0, \end{aligned} \tag{67}$$

و

$$\Phi_{\rm p}^{+} = \frac{\Lambda}{12}\,S_0\,(S_0^2-1)\,\{4\,\coth^{-1} S - [(3\,S^2-1)\,\coth^{-1} S - 3\,S]\,(3\,V^2-1)\}. \tag{68}$$

این عبارت را میشود بر حسب ِ $Q_{\rm p}$ (بار ِ درون ِ بیضیگون) هم نوشت. داریم

$$Q_{\rm p} = \frac{4\,\pi}{3}\,\frac{\Lambda\,a\,b^2}{c^2}, \tag{69}$$

و

$$S_0\,(S_0^2-1) = \frac{a\,b^2}{c^3}. \tag{70}$$

از اینجا،

$$\begin{aligned}\Phi_{\rm p}^{+} &= \frac{Q_{\rm p}}{16\,\pi\,c}\,\{4\,\coth^{-1}S - [(3\,S^2-1)\,\coth^{-1}S - 3\,S]\,(3\,T^2-1)\},\\ &= \frac{Q_{\rm p}}{4\,\pi\,c}\,[R_0^C(S) - R_2^C(S)\,P_2^B(T)],\end{aligned} \tag{71}$$

که

$$\begin{aligned}R_0^C(S) &:= \coth^{-1}(S),\\ R_2^C(S) &:= P_2^C(S)\,\coth^{-1}S - \frac{3}{2}\,S.\end{aligned} \tag{72}$$

$R_0^C(S)$ و $R_2^C(S)$ آن جوابها یِ معادله یِ لُژاندر [3] با $l=0$ و $l=2$ اند، که در $S\to\infty$ مثل ِ S^{-l-1} رفتار میکنند. نقاط ِ دور از بیضیگون متناظر اند با S ها یِ بزرگ. در این نقاط،

$$\begin{aligned}\Phi_{\rm p} &\approx \frac{Q_{\rm p}}{4\,\pi\,c\,S},\\ &\approx \frac{Q_{\rm p}}{4\,\pi\,r},\end{aligned} \tag{73}$$

که r فاصله از مرکز ِ بیضیگون است.

یک حالت ِ حدی این است که بیضیگون به میله تبدیل شود. این یعنی حد ِ $b\to 0$ با a و $Q_{\rm p}$ ثابت. در این حالت a هم ان c است، و پتانسیل همه جا $\Phi_{\rm p}^{+}$ است. میشود دید چگالییِطولی یِ میله یِ حاصل چه قدر است. داریم

$$\begin{aligned}\lambda &= -2\,\pi\,\lim_{\rho\to 0}\left[\rho\,\left(\frac{\partial\Phi_{\rm p}}{\partial\rho}\right)_z\right],\\ &= -2\,\pi\,\lim_{\rho\to 0}\left\{\rho\,\left[\left(\frac{\partial\Phi_{\rm p}}{\partial s}\right)_t\,\left(\frac{\partial s}{\partial\rho}\right)_z + \left(\frac{\partial\Phi_{\rm p}}{\partial t}\right)_s\,\left(\frac{\partial t}{\partial\rho}\right)_z\right]\right\}.\end{aligned} \tag{74}$$

از اینجا نتیجه میشود

$$\begin{aligned}\lambda &= \frac{Q_{\rm p}}{2\,c}\,[1 - P_2^C(\cos v)],\\ &= \frac{3\,Q_{\rm p}}{4\,c}\,\left[1 - \left(\frac{z}{c}\right)^2\right].\end{aligned} \tag{75}$$

این چگالی یکنواخت نیست، و نباید هم باشد. میشود دید عبارت ِ $[1-(z/c)^2]$ نسبت ِ مساحت ِ مقطع ِ بیضیگون در فاصله یِ z از صفحه یِ $x\,y$، به مساحت ِ مقطع ِ بیضیگون در صفحه یِ $x\,y$، در

حد ِ $b \to 0$ است. این چگالی ی ِطولی هم حد ِ چگالی ی ِحجمی در مساحت ِ مقطع ِ بیضیگون، در $b \to 0$ است.

3 پانوشتها

[1] محمد خرمی؛ «مختصات ِ بیضوی در چند مسئله ی ِالکترُمغناطیس»؛ (X1-010 (2002/04/17

[2] Poisson

[3] Legendre

[4] Wronski