

X1-049 (2008/01/31)

نسبیت و سیستم‌ها ی با جرم - متغیر

mamwad@mailaps.org

محمد خرمی

معادله ی حرکت برا ی سیستم‌ها ی با جرم - متغیر (از جمله موشک - نوری) در نسبیت - خاص بررسی می‌شود.

0 قراردادهای

منظور از جرم جرم - سکون است،

$$r^0 := t, \quad (1)$$

و

$$\eta_{\mu\nu} = \begin{cases} -c^2, & \mu = \nu = 0 \\ 1, & \mu = \nu \neq 0 \\ 0, & \mu \neq \nu \end{cases}, \quad (2)$$

که r^μ ها مؤلفه‌ها ی چاربردار - مکان اند، و t زمان و η متریک - (مینکوسکی [a]) است. بردارها ی سه مؤلفه‌ای (با مؤلفه‌ها ی فضایی) را با حروف - سیاه نمایش می‌دهیم. ویژه‌زمان را با τ نمایش می‌دهیم. شاخص‌ها یی که مقادارها ی فضازمانی (از 0 تا 3) را می‌گیرند را با حروف - یونانی و شاخص‌ها یی که فقط مقادارها ی فضایی (از 1 تا 3) را می‌گیرند را با حروف - لاتین نمایش می‌دهیم. متناظر با سرعت - v ،

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt}, \quad (3)$$

یک کمیت - چهارمؤلفه‌ای (v) ساخته می‌شود

$$v^\mu = \frac{dr^\mu}{dt}, \quad (4)$$

که از آن نتیجه می‌شود

$$v^0 = 1. \quad (5)$$

1 معادله ی حرکت برا ی سیستم‌ها ی با جرم متغیر

سیستم ی را در نظر بگیرید که جرم - آن m ، سرعت - آن v ، و چاربردار - تکانه ی آن p است:

$$p = m \gamma v, \quad (6)$$

که γ ضریب - لُرتس [b] است:

$$\gamma := \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad (7)$$

و

$$\beta := \sqrt{(\mathbf{v}/c) \cdot (\mathbf{v}/c)}. \quad (8)$$

اگر بخش ی از این سیستم جدا شود (یا چیزی به این سیستم افزوده شود) جرم و سرعت تغییر می‌کنند. سرعت - چیزی که وارد - سیستم شده یا از آن بیرون رفته را با s نمایش می‌دهیم. چارتکانه ی این چیز Δp یا $(-\Delta p)$ است (اولی برا ی ورود و دومی برا ی خروج). در هر دو حالت،

$$\Delta \mathbf{p} = s \Delta p^0. \quad (9)$$

ضمناً داریم

$$\mathbf{p} = \mathbf{v} p^0, \quad (10)$$

که \mathbf{v} سرعت - سیستم است. اگر تغییرات - سیستم هم‌وار باشد، معادله ی (9) را می‌شود نوشت

$$\frac{d\mathbf{p}}{dp^0} = \mathbf{s}. \quad (11)$$

با استفاده از (10)، می‌شود این معادله را بر حسب - سرعت نوشت:

$$p^0 \frac{d\mathbf{v}}{dp^0} = \mathbf{s} - \mathbf{v}. \quad (12)$$

فرق - رابطه‌ها ی (11) و (12) با مانسته‌ها ی غیرنسبیتی نشان این است که در رابطه‌ها ی نسبیتی، به جا ی m در رابطه‌ها ی غیرنسبیتی p^0 ظاهر شده. با توجه به

$$p^0 = m \gamma, \quad (13)$$

روشن است که در حد - سرعت‌ها ی کم (نسبت به سرعت - نور) رابطه‌ها ی (11) و (12) به مانسته‌ها ی نسبیتی نشان تبدیل می‌شوند.

2 موشک - نوری

اگر چیزی که از سیستم بیرون می‌رود جرم - اش صفر باشد، اندازه ی سرعت - این چیز ثابت (همان سرعت - نور) است. از جمله، اگر چیزی که از سیستم بیرون می‌رود نور باشد چنین است. به چنین سیستم ی موشک - نوری می‌گویند. اگر چیزی که از سیستم بیرون می‌رود جرم - اش صفر و جهت - حرکت - اش هم ثابت باشد، آنگاه بردار - \mathbf{s} ثابت و اندازه ی آن c می‌شود. فرض کنید چنین است. در این حالت جواب - معادله ی (11) می‌شود

$$\mathbf{p} = \bar{\mathbf{p}} + \mathbf{s}(p^0 - \bar{p}^0), \quad (14)$$

که ابرومشخص‌کننده ی یک حالت - مرزی (مثلاً حالت - اولیه) است. از این جا می‌شود سرعت - سیستم را به دست آورد. از (10) نتیجه می‌شود

$$\mathbf{v} = (\tilde{\mathbf{v}} - \mathbf{s}) \frac{\tilde{p}^0}{p^0} + \mathbf{s}. \quad (15)$$

از این رابطه ممکن است این تصور پیش آید که اندازه ی سرعت سیستم می‌تواند به طور نامحدود زیاد شود. اما چنین نیست: p^0 به طور نامحدود کم نمی‌شود چون جای می‌رسد که جرم سیستم صفر می‌شود، و از آن پس سیستم دیگر نمی‌تواند چیزی از دست بدهد. جرم سیستم را می‌شود از تکانه و انرژی ی آن به دست آورد:

$$m^2 = (p^0)^2 - (\mathbf{p}/c) \cdot (\mathbf{p}/c), \quad (16)$$

که از آن نتیجه می‌شود

$$m^2 = (p^0)^2 - [(\tilde{\mathbf{p}}/c) \cdot (\tilde{\mathbf{p}}/c) + (p^0 - \tilde{p}^0)^2 + 2\hat{\mathbf{s}} \cdot (\tilde{\mathbf{p}}/c)(p^0 - \tilde{p}^0)], \quad (17)$$

که در آن از این استفاده شده که

$$\mathbf{s} \cdot \mathbf{s} = c^2. \quad (18)$$

$\tilde{\mathbf{p}}$ را بر حسب $\tilde{\mathbf{v}}$ می‌نویسیم و (17) را ساده می‌کنیم. با تعریف

$$\beta_s = \hat{\mathbf{s}} \cdot (\mathbf{v}/c), \quad (19)$$

نتیجه می‌شود

$$m^2 = \tilde{m}^2 + 2\tilde{p}^0(1 - \tilde{\beta}_s)(p^0 - \tilde{p}^0), \quad (20)$$

یا

$$p^0 = \tilde{p}^0 - \frac{\tilde{m}^2 - m^2}{2\tilde{p}^0(1 - \tilde{\beta}_s)}. \quad (21)$$

با این رابطه و رابطه ی (13) می‌شود ضریب لرننس [b] سیستم را هم حساب کرد:

$$\gamma = \tilde{\gamma} \frac{\tilde{m}}{m} \left[1 - \frac{1 - (m/\tilde{m})^2}{2\tilde{\gamma}^2(1 - \tilde{\beta}_s)} \right]. \quad (22)$$

از (21) و (15) هم رابطه ی سرعت بر حسب m به دست می‌آید:

$$\mathbf{v} = (\tilde{\mathbf{v}} - \mathbf{s}) \left[1 - \frac{1 - (m/\tilde{m})^2}{2\tilde{\gamma}^2(1 - \tilde{\beta}_s)} \right]^{-1} + \mathbf{s}. \quad (23)$$

این رابطه‌ها بسته‌گی ی p^0 ، ضریب لرننس $[b]$ ، و سرعت به m را می‌دهند. از جمله معلوم می‌شود برا ی p^0 یک حدپایین (p_m^0) هست. این حد متناظر با $m = 0$ صفر است:

$$\begin{aligned} p_m^0 &= \tilde{p}^0 - \frac{\tilde{m}^2}{2\tilde{p}^0(1-\tilde{\beta}_s)}, \\ &= \tilde{p}^0 \frac{1-2\tilde{\beta}_s+\tilde{\beta}^2}{2(1-\tilde{\beta}_s)}. \end{aligned} \quad (24)$$

در $m = 0$ ، ضریب لرننس بی‌نهایت می‌شود. در این حد سرعت به \mathbf{v}_m می‌گراید:

$$\mathbf{v}_m = (\tilde{\mathbf{v}} - \mathbf{s}) \frac{2(1-\tilde{\beta}_s)}{1-2\tilde{\beta}_s+\tilde{\beta}^2} + \mathbf{s}. \quad (25)$$

اندازه ی \mathbf{v}_m برابر c است:

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_m \cdot \mathbf{v}_m &= (\tilde{\mathbf{v}} - \mathbf{s}) \cdot (\tilde{\mathbf{v}} - \mathbf{s}) \frac{4(1-\tilde{\beta}_s)^2}{(1-2\tilde{\beta}_s+\tilde{\beta}^2)^2} + \mathbf{s} \cdot (\tilde{\mathbf{v}} - \mathbf{s}) \frac{4(1-\tilde{\beta}_s)}{1-2\tilde{\beta}_s+\tilde{\beta}^2} + c^2, \\ &= c^2 \left\{ \frac{4(1-\tilde{\beta}_s)^2}{1-2\tilde{\beta}_s+\tilde{\beta}^2} + (\tilde{\beta}_s - 1) \frac{4(1-\tilde{\beta}_s)}{1-2\tilde{\beta}_s+\tilde{\beta}^2} + 1 \right\}, \\ &= c^2. \end{aligned} \quad (26)$$

اما راستای \mathbf{v}_m لزوماً همان راستای \mathbf{s} نیست. اگر $\tilde{\mathbf{v}}$ با \mathbf{s} هم‌راستا باشد، آن‌گاه (25) ساده‌تر می‌شود. در این حالت،

$$\tilde{\mathbf{v}} = \tilde{\beta}_s \mathbf{s}, \quad (27)$$

و

$$\tilde{\beta}^2 = \tilde{\beta}_s^2, \quad (28)$$

که از این‌ها نتیجه می‌شود

$$\mathbf{v}_m = -\mathbf{s}. \quad (29)$$

نسبیت و سیستم‌ها ی با جرم متغیر

برای محاسبه ی بسته‌گی ی کمیت‌ها به زمان، بسته‌گی ی جرم به زمان لازم است. برای این کار کافی است بسته‌گی ی جرم به ویژه زمان (زمان ی که ساعت به هم‌راه سیستم می‌سنجد) را بدانیم. در این صورت،

$$\frac{dt}{d\tau} = \gamma, \quad (30)$$

که از آن نتیجه می‌شود

$$t = \tilde{t} + \int_{\tilde{m}}^m dm \frac{d\tau}{dm} \tilde{\gamma} \frac{\tilde{m}}{m} \left[1 - \frac{1 - (m/\tilde{m})^2}{2\tilde{\gamma}^2(1 - \tilde{\beta}_s)} \right]. \quad (31)$$

با ترکیب این رابطه با رابطه‌ها ی (21) تا (23)، بسته‌گی ی p^0 ، ضریب لرنیتس [b]، و سرعت به زمان به دست می‌آید.

3 اسم‌ها ی خاص

[a] Poincaré

[b] Lorentz