

X1-063 (2009/10/29)

انرژی ی درونی ی یک گاز کامل نسبیتی

mamwad@mailaps.org

محمد خرمی

بسته گی ی انرژی ی درونی ی یک گاز کامل تک اتمی ی کلاسیک نسبیتی به دما محاسبه میشود.

1 انرژی و همپارش

یک گاز کامل از ملکولها یی تک اتمی هر یک به جرم m را در نظر بگیرید. انرژی ی هر ملکول

$$h = \sqrt{c^2 \mathbf{p} \cdot \mathbf{p} + m^2 c^4} \quad (1)$$

است، که \mathbf{p} تکانه ی ملکول است. انرژی ی کل گاز

$$\begin{aligned} H &= \sum_a h_a, \\ &= h(\mathbf{p}_a), \end{aligned} \quad (2)$$

انرژی ی درونی ی یک گاز کامل نسبیتی

است، که a شاخص ذره است. قضیه ی همپارش (مثلن [1]) میگوید

$$\left\langle x^i \frac{\partial H}{\partial x^j} \right\rangle = k_B T \delta_j^i, \quad (3)$$

که T دما ی مطلق است. از اینجا نتیجه میشود

$$\left\langle \frac{c^2 \mathbf{p}_a \cdot \mathbf{p}_a}{\sqrt{c^2 \mathbf{p}_a \cdot \mathbf{p}_a + m^2 c^4}} \right\rangle = D k_B T, \quad (4)$$

یا،

$$\left\langle h_a - \frac{m^2 c^4}{h_a} \right\rangle = D k_B T, \quad (5)$$

که D بُعد فضا است. البته مقدار چشمداشتیها ی طرف چپ معادله ی بالا به شاخص a بسته گی ندارند و میشود این شاخص را از آن معادله برداشت. با تعریفها ی

$$x := \frac{m c^2}{k_B T}, \quad (6)$$

$$Y := \left\langle \frac{h}{m c^2} \right\rangle, \quad (7)$$

$$Z := \left\langle \frac{m c^2}{h} \right\rangle, \quad (8)$$

معادله ی (5) میشود

$$Y - Z = \frac{D}{x}. \quad (9)$$

2 مقدار چشمداشتی ی عکس همیلتنی

برای سیستم ی با همیلتنی ی H داریم

$$\left\langle \frac{1}{H} \right\rangle = \left[\int d_P V \exp(-\beta H) \right]^{-1} \int d_P V \frac{1}{H} \exp(-\beta H), \quad (10)$$

که انتگرالگیری روی فضا ی فاز است و

$$\beta := \frac{1}{k_B T}. \quad (11)$$

از (10) نتیجه میشود

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\beta} \left\langle \frac{1}{H} \right\rangle &= - \left[\int d_P V \exp(-\beta H) \right]^{-1} \int d_P V \exp(-\beta H) \\ &+ \left[\int d_P V \exp(-\beta H) \right]^{-2} \int d_P V H \exp(-\beta H) \\ &\times \int d_P V \frac{1}{H} \exp(-\beta H) \end{aligned} \quad (12)$$

که نتیجه میدهد

$$\frac{d}{d\beta} \left\langle \frac{1}{H} \right\rangle = -1 + \left\langle \frac{1}{H} \right\rangle \langle H \rangle. \quad (13)$$

به ساده‌گی دیده میشود برای گازها ی کامل نتیجه ی مشابه ی برای همیلتنی ی تکذره‌ای برقرار است:

$$\frac{d}{d\beta} \left\langle \frac{1}{h} \right\rangle = -1 + \left\langle \frac{1}{h} \right\rangle \langle h \rangle, \quad (14)$$

یا بر حسب متغیرها ی بیعد،

$$\frac{dZ}{dx} = -1 + ZY. \quad (15)$$

این معادله همراه با معادله ی (9) بسته‌گی ی انرژی ی درونی به دما را میدهد. x و Y و Z هر سه نامنفی اند. Y را بین (9) و (15) حذف میکنیم:

$$\frac{dZ}{dx} = -1 + Z \left(Z + \frac{D}{x} \right). \quad (16)$$

صفرها ی طرف راست این معادله را با ζ_1 و ζ_2 نشان میدهیم:

$$\zeta_1(x) := -\frac{D}{2x} + \sqrt{1 + \frac{D^2}{4x^2}}, \quad (17)$$

$$\zeta_2(x) := -\frac{D}{2x} - \sqrt{1 + \frac{D^2}{4x^2}}. \quad (18)$$

دیده میشود ζ_1 و ζ_2 هر دو اکیدن صعودی اند. از اینجا معلوم میشود تقاطع خم Z با هر یک از خمها ی ζ_1 و ζ_2 در دستبالاتا یک نقطه (جز 0) است. علت این است که اگر خم Z خم ζ_i را در $x_0 \neq 0$ قطع کند، مشتق $(Z - \zeta_i)$ در x_0 منفی میشود. این یعنی یک همسایه‌گی ی x_0 هست که در آن همسایه‌گی، طرف چپ x_0 مقدار $(Z - \zeta_i)$ مثبت و طرف راست x_0 مقدار $(Z - \zeta_i)$ منفی

انرژی ی درونی ی یک گاز کامل نسبیتی

است. از اینجا معلوم میشود بین هر دو صفر $(Z - \zeta_i)$ که 0 نباشند، یک صفر دیگر $(Z - \zeta_i)$ هست. پس $(Z - \zeta_i)$ اگر دستکم دو جا (جز 0) صفر شود همه جا صفر میشود. این یعنی ζ_i یک جواب (16) است. جاگذاری ی مستقیم نشان میدهد چنین نیست. پس $(Z - \zeta_i)$ دستبالاتا یک جا (جز 0) صفر میشود.

همچنین، میشود نشان داد اگر $Z(x_1)$ کوچکتر از $\zeta_1(x_1)$ باشد، آنگاه یک x_2 هست که در $x_2 > x_1$ مقدار Z منفی است. برای اثبات دو حالت در نظر میگیریم. حالت اول این است که $(Z - \zeta_2)$ در x_3 صفر شود. در این صورت در $x > x_3$ مقدار Z کوچکتر از مقدار ζ_2 و در نتیجه منفی است. پس x_2 را میشود هم ان x_3 گرفت. حالت دوم این است $(Z - \zeta_2)$ صفر نشود. در این صورت Z نزولی است (برای $x > x_1$). پس Z یا منفی نمیشود یا اگر منفی شد با افزایش x همچنان منفی میماند. اگر Z منفی نشود،

$$\frac{dZ}{dx} \leq -[\zeta_1(x_1) - Z(x_1)], \quad x > x_1, \quad (19)$$

که نتیجه میدهد فرض نامنفیماندن Z نادرست است.

پس جواب موردنظر برای معادله ی (16) همواره ناکوچکتر از ζ_1 است. همه ی این جوابها اکیدن صعودی اند. نشان میدهم از بین جوابها ی همهجا ناکوچکتر از ζ_1 فقط یک ی هست که در $x \rightarrow \infty$ بینهایت نمیشود، و آن جواب کوچکترین جواب از بین جوابها ی همهجا ناکوچکتر از ζ_1 است. اول توجه کنیم که اگر $Z(x_1)$ بزرگتر از 1 باشد،

$$\frac{dZ}{dx} \geq [Z(x_1) - 1], \quad x > x_1, \quad (20)$$

که نتیجه میدهد Z در $x \rightarrow \infty$ بینهایت میشود. حالا دو جواب Z_1 و Z_2 با $Z_1(x_1) < Z_2(x_1)$ را در نظر بگیرید. برای $x > x_1$ مقدار Z_2 بزرگتر از مقدار Z_1 است (چون خها ی متناظر با دو جواب متمایز (16) یکدیگر را قطع نمیکنند، جز احتمالن در مبدئ). به این ترتیب،

$$\frac{d(Z_2 - Z_1)}{dx} \geq 0, \quad x > x_1, \quad (21)$$

که نتیجه میدهد

$$Z_2(x) - Z_1(x) \geq Z_2(x_1) - Z_1(x_1), \quad x > x_1, \quad (22)$$

و از آنجا

$$Z_2(x) - \zeta_1(x) \geq Z_2(x_1) - Z_1(x_1), \quad x > x_1. \quad (23)$$

پس چون ζ_1 در $x \rightarrow \infty$ به 1 میگراید، یک x_2 هست که در $x > x_2$ مقدار Z_2 بزرگتر از 1 میشود. پس دو جواب متمایزِ ناکوچکتر از ζ_1 نیست که هیچ یک در $x \rightarrow \infty$ بینهایت نشود. روشن است که آن جواب که ناکوچکتر از ζ_1 است و در $x \rightarrow \infty$ بینهایت نمیشود، در $x \rightarrow \infty$ به 1 میگراید.

3 رفتارهای مجانبی

رفتارهای جواب معادله ی (16) در x های کوچک و بزرگ را بررسی میکنیم. انتظار میرود x های کوچک (دماها ی بزرگ) متناظر با رفتار فرانسیتی و x های بزرگ (دماها ی کوچک) متناظر با رفتار غیرنسیتی باشند.

با تغییرمتغیر

$$Z(x) =: x^D u(x), \quad (24)$$

معادله ی (16) میشود

$$x^D \frac{du}{dx} = -1 + x^{2D} u^2. \quad (25)$$

اساس کار برای بررسی ی رفتار جواب، مقایسه ی دوجمله ی طرف راست رابطه ی بالا برای محاسبه ی u_0 ، و سپس یک روش اختلال برای محاسبه ی u_n است، که u_n بخش ی از u است که جمله های از مرتبه ی n یا کمتر را در بردارد.

3.1 x های کوچک

فرض کنید جمله ی غالب طرف راست (25) جمله ی اول است. در این صورت با چشمپوشی از جمله ی دوم نتیجه میشود

$$u_0 = \begin{cases} -\ln x, & D = 1 \\ \frac{x^{1-D}}{D-1}, & D > 1 \end{cases}. \quad (26)$$

انرژی ی درونی ی یک گاز کامل نسبیتی

دیده میشود این شکل u_0 با فرض غالب بودن جمله ی اول طرف راست (25) سازگار است. حالا فرض کنید جمله ی غالب در طرف راست (25) جمله ی دوم است. در این صورت با چشمپوشی از جمله ی اول نتیجه میشود

$$u_0 = -(D+1)x^{-(D+1)}, \quad (27)$$

؛ که این هم با فرض غالب بودن جمله ی دوم طرف راست (25) سازگار است. سرانجام، فرض کنید جمله ها ی طرف راست (25) هممرتبه اند. در این صورت

$$u_0 \sim x^{-D}, \quad (28)$$

که نتیجه میدهد

$$\frac{du_0}{dx} \sim x^{-(D+1)}, \quad (29)$$

که نشان میدهد (28) با معادله ی (25) ناسازگار است، چون مرتبه ی طرف چپ این معادله را بزرگتر از مرتبه ی طرف راست آن میکند.

پس جمله ی غالب u به یکی از شکلهای (26) یا (27) است. بین این دو شکل هم آن که با نامنفی بودن Z سازگار است (26) است.

با یک روش تکرار میشود تصحیحا ی بعدی بر u را به دست آورد. رابطه ی بازگشتی برای u_n

$$x^D \frac{du_n}{dx} \stackrel{n}{=} -1 + x^{2D} (u_{n-1})^2 \quad (30)$$

است، که معنی ی شاخص n روی تساوی این است که این تساوی فقط تا مرتبه ی n درست است. در انتگرالگیری از (30) یک ثابت دلخواه هم ظاهر میشود (که قاعدتن از این شرط تعیین میشود که Z در $\infty \rightarrow x$ به 1 میگراید). اما این ثابت را فقط از جایی باید نگه داشت که جمله های کوچکتر از یا هممرتبه با آن چه ناشی از این ثابت است ظاهر شوند. به این ترتیب جمله های u در $\infty \rightarrow x$ که متناسب با توانها ی منفی ی یا لگاریتم x اند، بدون استفاده از شرط مرزی $\infty \rightarrow x$ به دست می آیند. اما جمله های متناسب با توانها ی مثبت x یا توانها ی مثبت x ضرب در لگاریتم x نه. مثلاً u_1 را در

نظر بگیرید. از (30) نتیجه میشود

$$u_1 = u_0 + \begin{cases} C, & D < 3 \\ \frac{1}{4} \ln x, & D = 3, \\ -\frac{x^{3-D}}{(D-3)(D-1)^2}, & D > 3 \end{cases} \quad (31)$$

که C یک ثابت است که از شرط مرزی در $x \rightarrow \infty$ به دست می‌آید. با ادامه‌ی روش تکرار برای محاسبه‌ی تصحیحات بعدی، دیده میشود

$$u_n = \begin{cases} \sum_{k=0}^n c_k x^{2k+1-D}, & n < \frac{D-1}{2} \\ \sum_{k=0}^{n-1} c_k x^{2k+1-D} + c \ln x, & n = \frac{D-1}{2} \end{cases} \quad (32)$$

برای n های بزرگتر، در u_n جمله‌هایی با توانهای مثبت x ظاهر میشود که ضریبهایشان با شرط مرزی در $x \rightarrow \infty$ به دست می‌آید. دیده میشود به هر حال جمله‌ی لگاریتمی فقط در بدهای فرد ظاهر میشود.

3.2 x های بزرگ

از این که جواب موردنظر برای معادله‌ی (16)، در $x \rightarrow \infty$ به 0 میگراید نتیجه میشود

$$u_0 = x^{-D}. \quad (33)$$

در این حالت در (25) نسبت طرف چپ به هر یک از جمله‌های طرف راست، در $x \rightarrow \infty$ به صفر میگراید. به این ترتیب رابطه‌ی بازگشتی برای u_n میشود

$$u_n = x^{-D} \sqrt{1 + x^D \frac{du_{n-1}}{dx}}. \quad (34)$$

جواب این همراه با (33) به شکل

$$u_n = \sum_{k=0}^n d_k x^{-k-D} \quad (35)$$

است، از جمله

$$u_2 = x^{-D} - \frac{D x^{-1-D}}{2} + \frac{D(D+2)x^{-2-D}}{8}. \quad (36)$$

3.3 رفتار مجانبی انرژی

از ترکیب نتایج بالا با (9) و (24) نتیجه میشود

$$Y_1(x) = \begin{cases} x^{-1} - x \ln x, & D = 1 \\ D x^{-1} + \frac{x}{D-1}, & D > 1 \end{cases}, \quad x \ll 1, \quad (37)$$

و

$$Y_2(x) = 1 + \frac{D x^{-1}}{2} + \frac{D(D+2)x^{-2}}{8}, \quad x \gg 1. \quad (38)$$

4 شکل بسته برای انرژی

داریم

$$Z(x) = -\frac{W(x)}{W'(x)}, \quad (39)$$

که

$$W(x) := \int_0^\infty d\xi \frac{\xi^{D-1}}{\sqrt{1+\xi^2}} \exp(-x \sqrt{1+\xi^2}). \quad (40)$$

داریم

$$\begin{aligned} x^2 \left(\frac{d^2 W}{dx^2} - W \right) &= \int_0^\infty d\xi x^2 \frac{\xi^{D+1}}{\sqrt{1+\xi^2}} \exp(-x \sqrt{1+\xi^2}), \\ &= \int_0^\infty d\xi D x \xi^{D-1} \exp(-x \sqrt{1+\xi^2}), \\ &= -D x \frac{dW}{dx}, \end{aligned} \quad (41)$$

که نتیجه میدهد

$$\left(x^2 \frac{d^2}{dx^2} + D x \frac{d}{dx} - x^2\right) W = 0. \quad (42)$$

با تغییر متغیر

$$W(x) =: x^{-m} X(x), \quad (43)$$

با

$$m := \frac{D-1}{2}, \quad (44)$$

نتیجه میشود

$$\left[x^2 \frac{d^2}{dx^2} + x \frac{d}{dx} - (x^2 + m^2)\right] X = 0, \quad (45)$$

که معادله ی بسل [a] دگرگون است. از این معادله همراه با این شرط مرزی که W و در نتیجه X در $x \rightarrow \infty$ به 0 میگراید نتیجه میشود

$$X(x) = N K_m(x), \quad (46)$$

که N ثابت و K_m تابع بسل [a] دگرگون از نوع دوم از مرتبه m است. به این ترتیب،

$$W(x) = N x^{-m} K_m(x). \quad (47)$$

این نتیجه را در [2] را هم میشود یافت. از (47) نتیجه میشود

$$Z(x) = \frac{x K_m(x)}{m K_m(x) - x K'_m(x)}, \quad (48)$$

و از آنجا

$$Y(x) = \frac{D}{x} + \frac{x K_{(D-1)/2}(x)}{[(D-1)/2] K_{(D-1)/2}(x) - x K'_{(D-1)/2}(x)}. \quad (49)$$

با بسط دادن این عبارت در x های کوچک و بزرگ، از جمله میشود رابطه های (37) و (38) را باز یافت.

انرژى ي درونى ي يك گاز كامل نسبتي

۱۰

5 مرجعها

- [1] R. K. Pathria; “Statistical Mechanics”, (Pergamon Press, 1993) chapter 2
- [2] I. S. Gradshteyn & I. M. Ryzhik; “Table of integrals, series, and products”,
7th edition (Academic Press, 2007) section 3.387

6 اسم خاص

[a] Bessel