X1-064 (2009/11/28)

نگاشتها یِ پوانکَره و اصلها یِ نسبیت ِ خاص

محمد خرمی mamwad@mailaps.org

نگاشتها یی که بعض ِ ویژه‌گیها یِ فضازمان را حفظ میکنند، و نیز رابطه یِ این نگاشتها با نگاشتها یِ پوانکَره [a] بررسی میشود.

0 مقدمه

گفته میشود نگاشتها یِ پوانکَره [a] بر اساس ِ اصل ِ نسبیت (هم‌ارزبودن ِ چارچوبها یِ لخت) و نیز ثابتماندن ِ سرعت ِ نور به دست می‌آیند. یعنی این نگاشتها آنها یی اند که یه چارچوب ِ لخت را به یک چارچوب ِ لخت ِ دیگر تبدیل میکنند و سرعت ِ نور را هم عوض نمیکنند. معنی یِ این که نگاشت ی سرعت ِ نور را عوض نکند روشن است. اما این که یک چارچوب ِ لخت به یک چارچوب ِ لخت تبدیل شود توضیح میخاهد. در واقع باید مشخصات ی از جوابها یِ معادلات ِ حرکت را تعیین کرد و دنبال ِ نگاشتها یی بود که آن مشخصات را عوض نکنند. به این ترتیب اصل ِ نسبیت میشود این که تقارنها یِ فضازمان آن مشخصات را عوض نمیکنند. این که آن مشخصات چه باشند به شکلها یِ مختلف ِ اصل ِ نسبیت می‌انجامد.

همچنین میشود نگاشتها یی را بررسی کرد که طول ِ بازه یِ فضازمانی را تغییر ندهند. معنی یِ دقیق ِ هر یک از این شرطها، و محدودیتها یی که هر شرط بر نگاشتها میگذارد را بررسی میکنیم. در کل ِ این متن همه یِ نگاشتها را از $\mathbb{R}^n$ به $\mathbb{R}^n$ با $n > 1$ (در حالت ِ خاص از $\mathbb{R}^4$ به $\mathbb{R}^4$) میگیریم، با این ویژه‌گی که این نگاشتها در $\mathbb{R}^n$ وارونپذیر اند و خُد ِشان و وارون ِشان مشتقپذیر اند.

1 اصل ِ نسبیت

این که سرعت نسبی است را میشود به این زبان بیان کرد که نگاشتها یی هستند که سرعت را تغییر میدهند اما یک جواب ِ معادلات ِ حرکت را به جواب ی دیگر تبدیل میکنند. یک دسته از معادلات ِ حرکت معادلات ِ حرکت ِ ذره‌ها یِ آزاد است. جواب ِ این معادلات (جهانخطها یِ ذره‌ها یِ آزاد) خطها یی راست در فضازمان اند. از اینجا به این گزاره میرسیم که به آن شکل ِ ضعیف ِ اصل ِ نسبیت میگوییم:

تقارنها یِ فضازمان هر خط (در فضازمان) را به یک خط مینگارند.

این نمادگذاریها را وارد میکنیم. خط ی که شامل ِ نقطه‌ها یِ متمایز ِ x_1 و x_2 است را با $\Delta(x_1, x_2)$، و صفحه ای که شامل ِ خطها یِ متمایز ِ Δ_1 و Δ_2 است را با $\Pi(\Delta_1, \Delta_2)$ نشان میدهیم.

نگاشت ِ f را در نظر بگیرید که هر خط را به یک خط مینگارد. نشان میدهیم f^{-1} هم هر خط را به یک خط تبدیل مینگارد. برا یِ این کار دو نقطه یِ متمایز ِ x_1 و x_2 بر خط ِ $\Delta(x_1, x_2)$ را در نظر بگیرید. داریم

$$f\{\Delta[f^{-1}(x_1), f^{-1}(x_2)]\} = \Delta(x_1, x_2), \tag{1}$$

که از آن نتیجه میشود

$$f^{-1}[\Delta(x_1, x_2)] = \Delta[f^{-1}(x_1), f^{-1}(x_2)]. \tag{2}$$

نگاشت ِ f را در نظر بگیرید که هر خط را به یک خط مینگارد. نشان میدهیم این نگاشت هر صفحه را به یک صفحه مینگارد. برا یِ این کار دو خط ِ متقاطع (و متمایز) ِ Δ_1 و Δ_2 در صفحه یِ $\Pi(\Delta_1, \Delta_2)$ را در نظر بگیرید. متناظر با هر نقطه یِ $x \in \Pi(\Delta_1, \Delta_2)$، نقطه‌ها یِ متمایز ِ $x_1 \in \Delta_1$

و $x_2 \in \Delta_2$ هستند که

$$x \in [\Delta(x_1, x_2)]. \tag{3}$$

دیده میشود

$$f(x) \in \Delta[f(x_1), f(x_2)]. \tag{4}$$

$f(\Delta_1)$ و $f(\Delta_2)$ دو خطِ متقاطع اند که یک صفحه را مشخص میکنند. داریم

$$f(x_i) \in f(\Delta_i), \tag{5}$$

که نتیجه میدهد

$$f(x_i) \in \Pi[f(\Delta_1), f(\Delta_2)], \tag{6}$$

یا

$$f[\Delta(x_1, x_2)] \subset \Pi[f(\Delta_1), f(\Delta_2)]. \tag{7}$$

به این ترتیب،

$$f(x) \in \Pi[f(\Delta_1), f(\Delta_2)], \tag{8}$$

یا

$$f[\Pi(\Delta_1, \Delta_2)] \subseteq \Pi[f(\Delta_1), f(\Delta_2)]. \tag{9}$$

با استدلالِ مشابه ی دیده میشود

$$f^{-1}\{\Pi[f(\Delta_1), f(\Delta_2)]\} \subseteq \Pi(\Delta_1, \Delta_2), \tag{10}$$

که نتیجه میدهد

$$\Pi[f(\Delta_1), f(\Delta_2)] \subseteq f[\Pi(\Delta_1, \Delta_2)]. \tag{11}$$

از ترکیب ِ این با (9) نتیجه میشود

$$f[\Pi(\Delta_1, \Delta_2)] = \Pi[f(\Delta_1), f(\Delta_2)]. \tag{12}$$

نگاشت ِ f را در نظر بگیرید که هر خط را به یک خط مینگارد. نشان میدهیم این نگاشت دو خط ِ موازی یِ متمایز را به دو خط ِ موازی یِ متمایز مینگارد. برا یِ این کار Δ_1 و Δ_2 را دو خط ِ موازی (و متمایز) بگیرید. $f[\Pi(\Delta_1, \Delta_2)]$ یک صفحه است و داریم

$$f(\Delta_i) \subset f[\Pi(\Delta_1, \Delta_2)]. \tag{13}$$

از اینجا نتیجه میشود دوخط ِ $f(\Delta_1)$ و $f(\Delta_2)$ درون ِ یک صفحه اند. وارونپذیربودن ِ f نشان میدهد دوخط ِ $f(\Delta_1)$ و $f(\Delta_2)$ اشتراک ندارند. پس این دوخط با هم موازی اند.

سرانجام، نگاشت ِ f را در نظر بگیرید که هر خط را به یک خط مینگارد. نشان میدهیم برا یِ بردارها یِ دلبخاه ِ x و y،

$$f(x + y) = f(x) + f(y) - f(0). \tag{14}$$

برا یِ این کار اول فرض کنید x و y خطیمستقل اند. در این صورت $\Delta(x+y, y)$ و $\Delta(x, 0)$ دو خط ِ موازی و متمایز اند و تصویر ِ آنها تحت ِ f هم چنین است. پس یک اسکالر ِ a هست که

$$f(x + y) - f(y) = a\,[f(x) - f(0)]. \tag{15}$$

با استدلال مشابه ی معلوم میشود یک اسکالر ِ b هم هست که

$$f(x + y) - f(x) = b\,[f(y) - f(0)]. \tag{16}$$

از ترکیب ِ (15) و (16) نتیجه میشود

$$(1 - a)\,[f(x) - f(0)] = (1 - b)\,[f(y) - f(0)]. \tag{17}$$

چون x و y خطیمستقل اند،

$$\Delta(x, 0) \cap \Delta(y, 0) = \{0\}, \tag{18}$$

که نتیجه میدهد

$$f[\Delta(x,0)]\cap f[\Delta(y,0)]=\{f(0)\}, \tag{19}$$

و از آنجا معلوم میشود $[f(x)-f(0)]$ و $[f(y)-f(0)]$ هم خطیمستقل اند. به این ترتیب، از (17) معلوم میشود

$$\begin{aligned}1-a&=0,\\ 1-b&=0,\end{aligned} \tag{20}$$

و از این (14) نتیجه میشود. در حالت ی که x و y خطیوابسته اند هم درستی یِ (14) از درستی یِ (14) وقت ی x و y خطیمستقل اند، همراه با پیوسته‌گی یِ f نتیجه میشود. کافی است x و y را حد ِ 2 دنباله یِ خطیمستقل بگیریم.

نگاشت ِ f را چنان بگیرید که هر خط را به یک خط مینگارد. نگاشت ِ $\tilde f$ را با

$$\tilde f(x):=f(x)-f(0) \tag{21}$$

تعریف میکنیم. از (14) دیده میشود

$$\tilde f(x+y):=\tilde f(x)+\tilde f(y), \tag{22}$$

که از آن نتیجه میشود اگر n عدد ی صحیح باشد،

$$\tilde f(n\,x):=n\,\tilde f(x), \tag{23}$$

که نشان میدهد اگر q عدد ی گویا باشد،

$$\tilde f(q\,x):=q\,\tilde f(x). \tag{24}$$

باز هم پیوسته‌گی یِ $\tilde f$ نتیجه میدهد به ازا یِ هر عدد ِ حقیقی یِ a،

$$\tilde f(a\,x):=a\,\tilde f(x). \tag{25}$$

برا یِ اثبات ِ این کافی است a را حد ِ یک دنباله یِ گویا بگیریم. از (22) و (25) نتیجه میشود $\tilde{f}$ خطی است. به این ترتیب معلوم میشود اگر f نگاشت ی باشد که هر خط را به یک خط مینگارد، آنگاه f آفین (یعنی دستِبالا خطی) است. یعنی یک بردار ِ $\check{f}$ و یک نگاشت ِ خطی یِ $\tilde{f}$ هست که

$$f(x) = \check{f} + \tilde{f}(x). \tag{26}$$

روشن است که

$$\check{f} = f(0). \tag{27}$$

2 ثابتماندن ِ سرعت ِ نور

ثابتماندن ِ سرعت ِ نور یعنی هر تقارن ِ فضازمانی یِ f چنان است که اثر ِ آن رو یِ هر مسیر ِ نور در فضازمان (هر جهانخط ِ نور) مسیر ی است که سرعت ِ متناظر با آن سرعت ِ نور است.

متحرک ی که مکان َش در فضازمان با $x(t)$ داده میشود، مئلفهها یِ سرعت َش (در فضازمان)

$$v^\mu := \frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}t} \tag{28}$$

است، که t زمان است،

$$x^0 := t, \tag{29}$$

و x^i ها (که i صفر نیست) مئلفهها یِ فضایی یِ x اند. در ادامه قرارداد میکنیم شاخصها یِ یونانی مقدار ِ صفر (زمانی) هم میگیرند، اما شاخصها یِ لاتین فقط مقدارها یِ غیرِصفر (فضایی) میگیرند. دیده میشود

$$v^0 = 1, \tag{30}$$

و در مورد ِ نور،

$$\delta_{i\,j}\, v^i\, v^j = c^2, \tag{31}$$

که c سرعتِ نور است. این را میشود به این شکل نوشت.

$$g_{\mu\,\nu}(x)\,v^{\mu}\,v^{\nu}=0, \tag{32}$$

که

$$g_{\mu\,\nu}(x)=\eta_{\mu\,\nu}, \tag{33}$$

و

$$\eta_{\mu\,\nu}:=\begin{cases}-c^2, & \mu=\nu=0\\ 1, & \mu=\nu\neq 0\\ 0, & \mu\neq\nu\end{cases}\cdot \tag{34}$$

نقطه یِ x در فضازمان، و بردارِ غیرِصفرِ دلبخاهِ u را در نظر بگیرید که

$$g_{\mu\,\nu}(x)\,u^{\mu}\,u^{\nu}=0. \tag{35}$$

u^0 صفر نیست. بردارِ v با

$$v^{\mu}:=\frac{u^{\mu}}{u^0} \tag{36}$$

رابطه‌ها یِ (30) و (32) را برمی‌آوَرد، پس سرعتِ متناظر با یک جهانخطِ نور است که از x میگذرد. به این ترتیب شرطِ لازم و کافی برا یِ این که سرعتِ متناظر با یک جهانخط در نقطه یِ x سرعتِ نور باشد این است که u (بردارِ مماس بر آن جهانخط در x) رابطه یِ (35) را برآوَرد.

نگاشتِ f را در نظر بگیرید که خُد َش و وارون َش هر جهانخطِ نور را به یک جهانخطِ نور مینگارد. u را بردارِ مماس بر یک جهانخطِ نور در نقطه یِ x میگیریم. نتیجه میشود

$$\tilde{g}_{\alpha\,\beta}(x)\,u^{\alpha}\,u^{\beta}=0, \tag{37}$$

که

$$\tilde{g}_{\alpha\,\beta}(x):=g_{\mu\,\nu}[f(x)]\,\frac{\partial f^{\mu}}{\partial x^{\alpha}}\,\frac{\partial f^{\nu}}{\partial x^{\beta}}. \tag{38}$$

رابطه یِ (35) یک معادله یِ درجه یِ 2 برا یِ u^0 (به ازا یِ u^i ها یِ معین که همه صفر نیستند) است. (37) هم یک معادله یِ درجه یِ 2 برا یِ u^0 (به ازا یِ همان u^i ها) است. جوابها یِ این 2 معادله یکسان اند (چون هر جهانخط ِ نور باید تحت ِ f یا f^{-1} به یک جهانخط ِ نور نگاشته شود). پس ضریبها یِ معادله‌ها یِ (35) و (37) متناسب اند. یعنی یک λ_f هست که

$$\tilde{g}_{0\,0}(x) = \lambda_f(x)\, g_{0\,0}(x), \tag{39}$$

$$\tilde{g}_{0\,i}(x)\, u^i = \lambda_f(x)\, g_{0\,i}(x)\, u^i, \tag{40}$$

$$\tilde{g}_{i\,j}(x)\, u^i\, u^j = \lambda_f(x)\, g_{i\,j}(x)\, u^i\, u^j. \tag{41}$$

از این که (40) و (41) برا یِ u^i ها یِ دلبخاه برقرار اند، معلوم میشود در این رابطه میشود مئلفه‌ها یِ فضایی یِ u را حذف کرد. از اینجا،

$$\tilde{g}_{\alpha\,\beta}(x) = \lambda_f(x)\, g_{\alpha\,\beta}(x), \tag{42}$$

یا

$$g_{\mu\,\nu}[f(x)]\,\frac{\partial f^\mu}{\partial x^\alpha}\,\frac{\partial f^\nu}{\partial x^\beta} = \lambda_f(x)\, g_{\alpha\,\beta}(x). \tag{43}$$

به نگاشت ِ f با این ویژه‌گی یک نگاشت ِ همدیس، و به λ_f مقیاس ِ متناظر با آن میگویند. پس این شرط که تقارنها یِ فضازمان سرعت ِ نور را ثابت نگه دارند این است که هر تقارن ِ فضازمان یک نگاشت ِ همدیس باشد. توجه کنید که برا یِ رسیدن به این نتیجه شرط ِ (33) هم لازم نیست. کافی (و لازم) است که (35) جواب ِ غیرِصفر داشته باشد.

3 نگاشت ِ همدیس

هدف تعیین ِ f ها یی است که (43) با

$$\frac{\partial g_{\mu\,\nu}}{\partial x^\rho} = 0 \tag{44}$$

و این که g متقارن و ناتکین است را برآورند. برا یِ چنین g یی میشود مختصات ی یافت که g در آن قطری باشد. به چنین مختصات ی (که در آن ماتریس ِ g ثابت و قطری است) مختصات ِ دِکَرتی میگوییم. از این پس فرض میکنیم مختصات ِ x چنین است. دیده میشود (33) یک حالت ِ خاص ِ (44) است. (حالت ِ خاص از نظر ِ تعداد ِ عنصرها یِ قطری یِ مثبت و منفی.)

با مشتقگیری از (43) نسبت به x^γ نتیجه میشود

$$g_{\mu\,\nu}\,\left(\frac{\partial^2 f^\mu}{\partial x^\gamma\,\partial x^\alpha}\,\frac{\partial f^\nu}{\partial x^\beta}+\frac{\partial f^\mu}{\partial x^\alpha}\,\frac{\partial^2 f^\nu}{\partial x^\gamma\,\partial x^\beta}\right)=g_{\alpha\,\beta}\,\frac{\partial \lambda_f}{\partial x^\gamma}. \tag{45}$$

با استفاده از تقارن ِ g میشود این را نوشت

$$g_{\mu\,\nu}\,\left(\frac{\partial^2 f^\mu}{\partial x^\gamma\,\partial x^\alpha}\,\frac{\partial f^\nu}{\partial x^\beta}+\frac{\partial^2 f^\mu}{\partial x^\gamma\,\partial x^\beta}\,\frac{\partial f^\nu}{\partial x^\alpha}\right)=g_{\alpha\,\beta}\,\frac{\partial \lambda_f}{\partial x^\gamma}. \tag{46}$$

با تبدیل ِ دوری یِ شاخصها یِ (α,β,γ) به این رابطهها میرسیم.

$$g_{\mu\,\nu}\,\left(\frac{\partial^2 f^\mu}{\partial x^\alpha\,\partial x^\beta}\,\frac{\partial f^\nu}{\partial x^\gamma}+\frac{\partial^2 f^\mu}{\partial x^\alpha\,\partial x^\gamma}\,\frac{\partial f^\nu}{\partial x^\beta}\right)=g_{\beta\,\gamma}\,\frac{\partial \lambda_f}{\partial x^\alpha}, \tag{47}$$

$$g_{\mu\,\nu}\,\left(\frac{\partial^2 f^\mu}{\partial x^\beta\,\partial x^\gamma}\,\frac{\partial f^\nu}{\partial x^\alpha}+\frac{\partial^2 f^\mu}{\partial x^\beta\,\partial x^\alpha}\,\frac{\partial f^\nu}{\partial x^\gamma}\right)=g_{\gamma\,\alpha}\,\frac{\partial \lambda_f}{\partial x^\beta}. \tag{48}$$

رابطهها یِ (47) و (48) را با هم جمع، و رابطه یِ (46) را از آنها کم میکنیم. نتیجه میشود

$$2\,g_{\mu\,\nu}\,\frac{\partial^2 f^\mu}{\partial x^\alpha\,\partial x^\beta}\,\frac{\partial f^\nu}{\partial x^\gamma}=g_{\alpha\,\gamma}\,\frac{\partial \lambda_f}{\partial x^\beta}+g_{\beta\,\gamma}\,\frac{\partial \lambda_f}{\partial x^\alpha}-g_{\alpha\,\beta}\,\frac{\partial \lambda_f}{\partial x^\gamma}. \tag{49}$$

از (43) نتیجه میشود

$$g_{\mu\,\nu}\,\frac{\partial f^\nu}{\partial x^\gamma}=\lambda_f\,g_{\theta\,\gamma}\,\frac{\partial x^\theta}{\partial f^\mu}. \tag{50}$$

با گذاشتن ِ این در (49)میرسیم به

$$g_{\theta\,\gamma}\,\frac{\partial x^\theta}{\partial f^\mu}\,\frac{\partial^2 f^\mu}{\partial x^\alpha\,\partial x^\beta}=\frac{1}{2\,\lambda_f}\,\left(g_{\alpha\,\gamma}\,\frac{\partial \lambda_f}{\partial x^\beta}+g_{\beta\,\gamma}\,\frac{\partial \lambda_f}{\partial x^\alpha}-g_{\alpha\,\beta}\,\frac{\partial \lambda_f}{\partial x^\gamma}\right), \tag{51}$$

و از آنجا

$$\frac{\partial^2 f^\mu}{\partial x^\alpha\,\partial x^\beta}=\frac{1}{2\,\lambda_f}\,\left[\frac{\partial \lambda_f}{\partial x^\beta}\,\frac{\partial f^\mu}{\partial x^\alpha}+\frac{\partial \lambda_f}{\partial x^\alpha}\,\frac{\partial f^\mu}{\partial x^\beta}-g_{\alpha\,\beta}\,(g^{-1})^{\gamma\,\theta}\,\frac{\partial \lambda_f}{\partial x^\gamma}\,\frac{\partial f^\mu}{\partial x^\theta}\right]. \tag{52}$$

با معرفی یِ متغیر ِ Λ_f با

$$\Lambda_f := |\lambda_f|^{-1/2}, \tag{53}$$

رابطه یِ (52) میشود

$$\Lambda_f\,\frac{\partial^2 f^\mu}{\partial x^\alpha\,\partial x^\beta}+\frac{\partial\Lambda_f}{\partial x^\beta}\,\frac{\partial f^\mu}{\partial x^\alpha}+\frac{\partial\Lambda_f}{\partial x^\alpha}\,\frac{\partial f^\mu}{\partial x^\beta}-g_{\alpha\,\beta}\,(g^{-1})^{\gamma\,\theta}\,\frac{\partial f^\mu}{\partial x^\theta}\,\frac{\partial\Lambda_f}{\partial x^\gamma}=0, \tag{54}$$

و از آنجا،

$$\Lambda_f\,\frac{\partial^2 f^\mu}{\partial x^\alpha\,\partial x^\beta}+\frac{\partial\Lambda_f}{\partial x^\beta}\,\frac{\partial f^\mu}{\partial x^\alpha}+\frac{\partial\Lambda_f}{\partial x^\alpha}\,\frac{\partial f^\mu}{\partial x^\beta}=0,\quad \beta\ne\alpha. \tag{55}$$

از این نسبت به x^γ مشتق میگیریم:

$$\begin{aligned}&\Lambda_f\,\frac{\partial^3 f^\mu}{\partial x^\alpha\,\partial x^\beta\,\partial x^\gamma}+\frac{\partial\Lambda_f}{\partial x^\gamma}\,\frac{\partial^2 f^\mu}{\partial x^\alpha\,\partial x^\beta}+\frac{\partial\Lambda_f}{\partial x^\beta}\,\frac{\partial^2 f^\mu}{\partial x^\alpha\,\partial x^\gamma}+\frac{\partial^2\Lambda_f}{\partial x^\beta\,\partial x^\gamma}\,\frac{\partial f^\mu}{\partial x^\alpha}\\&+\frac{\partial\Lambda_f}{\partial x^\alpha}\,\frac{\partial^2 f^\mu}{\partial x^\beta\,\partial x^\gamma}+\frac{\partial^2\Lambda_f}{\partial x^\alpha\,\partial x^\gamma}\,\frac{\partial f^\mu}{\partial x^\beta}=0,\quad \beta\ne\alpha.\end{aligned} \tag{56}$$

جمله‌ها یِ اول و چهارم و پنجم و نیز مجموع ِ جمله‌ها یِ دوم و سه‌وم ِ طرف ِ چپ نسبت به β و γ متقارن اند. پس جمله یِ آخر هم باید چنین باشد:

$$\frac{\partial^2\Lambda_f}{\partial x^\alpha\,\partial x^\gamma}\,\frac{\partial f^\mu}{\partial x^\beta}=\frac{\partial^2\Lambda_f}{\partial x^\alpha\,\partial x^\beta}\,\frac{\partial f^\mu}{\partial x^\gamma},\quad \beta\ne\alpha\ne\gamma. \tag{57}$$

از اینجا،

$$\frac{\partial^2\Lambda_f}{\partial x^\alpha\,\partial x^\gamma}\,\delta^\theta_\beta=\frac{\partial^2\Lambda_f}{\partial x^\alpha\,\partial x^\beta}\,\delta^\theta_\gamma,\quad \beta\ne\alpha\ne\gamma. \tag{58}$$

اگر بُعد ِ فضازمان بیش از 2 باشد، میشود گرفت

$$\begin{aligned}&\gamma\ne\beta,\\&\theta=\gamma.\end{aligned} \tag{59}$$

با این انتخاب نتیجه میشود

$$\frac{\partial^2\Lambda_f}{\partial x^\alpha\,\partial x^\beta}=0,\quad \beta\ne\alpha. \tag{60}$$

مختصات ِ x' با

$$x'^{\alpha} := R^{\alpha}{}_{\beta}\, x^{\beta}, \tag{61}$$

و ماتریس ِ $\hat{g}$ با

$$R^{\mu}{}_{\alpha}\, R^{\nu}{}_{\beta}\, \hat{g}_{\mu'\,\nu'} := g_{\alpha\,\beta} \tag{62}$$

را در نظر بگیرید، که R ماتریس ی ثابت است. به ساده‌گی دیده میشود (43) با

$$\hat{g}_{\mu'\,\nu'}[f(x)]\,\frac{\partial f'^{\mu}}{\partial x'^{\alpha}}\,\frac{\partial f'^{\nu}}{\partial x'^{\beta}} = \lambda_f(x)\,\hat{g}_{\alpha'\,\beta'}(x) \tag{63}$$

هم‌ارز است. اگر R چنان باشد که $\hat{g}$ قطری شود، از (43) نتیجه میشود

$$\frac{\partial^2\Lambda_f}{\partial x'^{\alpha}\,\partial x'^{\beta}} = 0, \quad \beta \neq \alpha. \tag{64}$$

به ازا یِ هر μ و νیِ متمایز، یک انتخاب

$$R^{\alpha}{}_{\beta} = \begin{cases} \cos\chi, & (\alpha,\beta) \in \{(\mu,\mu),(\nu,\nu)\} \\ \upsilon\,\sin\chi, & (\alpha,\beta) = (\mu,\nu), \\ -\upsilon^{-1}\,\sin\chi, & (\alpha,\beta) = (\nu,\mu) \\ \delta^{\alpha}_{\beta}, & (\alpha,\beta) \notin \{(\mu,\mu),(\mu,\nu),(\nu,\mu),(\nu,\nu)\} \end{cases} \tag{65}$$

است، که

$$\upsilon := \sqrt{\frac{g_{\nu\,\nu}}{g_{\mu\,\mu}}}, \tag{66}$$

و χ هم یک پارامتر ِ ثابت ِ دلبخاه است که حقیقی (موهومی یِ محض) است اگر $(g_{\mu\,\mu}\,g_{\nu\,\nu})$ مثبت (منفی) باشد. به ساده‌گی دیده میشود با این انتخاب (که انتخاب ی حقیقی برا یِ R است) $\hat{g}$ قطری است و

$$\frac{\partial^2\Lambda_f}{\partial x^{\mu}\,\partial x^{\nu}} = \cos\chi\,\sin\chi\,\left[\upsilon\,\frac{\partial^2\Lambda_f}{(\partial x^{\mu})^2} - \upsilon^{-1}\,\frac{\partial^2\Lambda_f}{(\partial x^{\nu})^2}\right] + (\cos^2\chi - \sin^2\chi)\,\frac{\partial^2\Lambda_f}{\partial x^{\mu}\,\partial x^{\nu}}. \tag{67}$$

هم‌ارزی یِ (60) و (62) نتیجه میدهد

$$\frac{1}{g_{\nu\,\nu}}\,\frac{\partial^2\Lambda_f}{(\partial x^\nu)^2}=\frac{1}{g_{\mu\,\mu}}\,\frac{\partial^2\Lambda_f}{(\partial x^\mu)^2}. \tag{68}$$

این را برا یِ هر دوشاخص ِ متمایز میشود به کار برد. به این ترتیب و با استفاده از (60) ، نتیجه میشود.

$$\frac{\partial^2\Lambda_f}{\partial x^\alpha\,\partial x^\beta}=M\,g_{\alpha\,\beta}. \tag{69}$$

از این رابطه مشتق میگیریم:

$$\frac{\partial^3\Lambda_f}{\partial x^\alpha\,\partial x^\beta\,\partial x^\gamma}=\frac{\partial M}{\partial x^\gamma}\,g_{\alpha\,\beta}, \tag{70}$$

که نتیجه میدهد

$$\frac{\partial M}{\partial x^\gamma}\,g_{\alpha\,\beta}=\frac{\partial M}{\partial x^\beta}\,g_{\alpha\,\gamma}. \tag{71}$$

α و β را یکسان و متمایز با γ میگیریم. نتیجه میشود

$$\frac{\partial M}{\partial x^\gamma}=0. \tag{72}$$

یعنی M ثابت است. پس اگر بُعد ِ فضازمان بیش از 2 باشد، شرط ِ لازم برا یِ این که نگاشت ِ f همدیس باشد (69) است، که در آن M ثابت است.

دو نگاشت ِ همدیس ِ f و h را در نظر بگیرید. تعریف میکنیم

$$y:=h(x). \tag{73}$$

داریم

$$\begin{aligned} g_{\mu\,\nu}[f\circ h(x)]\,\frac{\partial(f\circ h)^\mu}{\partial x^\alpha}\,\frac{\partial(f\circ h)^\nu}{\partial x^\beta}&=g_{\mu\,\nu}[f(y)]\,\frac{\partial f^\mu}{\partial y^\theta}\,\frac{\partial f^\nu}{\partial y^\sigma}\,\frac{\partial h^\theta}{\partial x^\alpha}\,\frac{\partial h^\sigma}{\partial x^\beta},\\ &=\lambda_f(y)\,g_{\theta\,\sigma}(y)\,\frac{\partial h^\theta}{\partial x^\alpha}\,\frac{\partial h^\sigma}{\partial x^\beta},\\ &=\lambda_f(y)\,\lambda_h(x)\,g_{\alpha\,\beta}(x), \end{aligned} \tag{74}$$

که نشان میدهد نگاشت ِ $h\circ f$ هم همدیس است، و

$$\lambda_{f\circ h}(x)=\lambda_f[h(x)]\,\lambda_h(x), \tag{75}$$

که با استفاده از (53) نتیجه میدهد

$$\Lambda_{f\circ h}(x)=\Lambda_f[h(x)]\,\Lambda_h(x). \tag{76}$$

با استدلال ی مشابه دیده میشود اگر f همدیس باشد f^{-1} هم همدیس است و

$$\lambda_{f^{-1}}(x)=\frac{1}{\lambda_f[f^{-1}(x)]},$$
$$\Lambda_{f^{-1}}(x)=\frac{1}{\Lambda_f[f^{-1}(x)]}. \tag{77}$$

نگاشت ِ s_b با

$$s_b^\mu(x):=\frac{x^\mu+b^\mu\,(x\cdot x)}{1+2\,b\cdot x+(b\cdot b)\,(x\cdot x)} \tag{78}$$

را در نظر بگیرید، که b بردار ی دلبخاه با مئلفه‌ها ی ِ ثابت است و

$$u\cdot v:=g_{\mu\,\nu}\,u^\mu\,v^\nu. \tag{79}$$

به ساده‌گی میشود تحقیق کرد این نگاشت همدیس است و

$$\lambda_{s_b}=\frac{1}{[1+2\,b\cdot x+(b\cdot b)\,(x\cdot x)]^2}, \tag{80}$$

و از آنجا

$$\Lambda_{s_b}=|1+2\,b\cdot x+(b\cdot b)\,(x\cdot x)|. \tag{81}$$

به s نگاشت ِ خاص ِ همدیس میگویند.

نگاشت ِ همدیس ِ f در بُعد ِ بیش از 2 را در نظر بگیرید. از (69) و این که M ثابت است، نتیجه میشود ثابتها ی ِ a_f و c_f و بردار ِ b_f با مئلفه‌ها ی ِ ثابت هستند که

$$\Lambda_f=a_f+b_f\ \cdot x+c_f\,x\cdot x. \tag{82}$$

ترکیب ِ نگاشت ِ f با نگاشت ِ خاص ِ همدیس هم همدیس است، و از (76) نتیجه میشود

$$\Lambda_{f\circ s}=|a_f+(2\,a_f\,b+b_f)\cdot\ x+(a_f\,b\cdot b+b_f\cdot b+c_f)\,x\cdot x|. \tag{83}$$

از اینجا نتیجه میشود ترکیب ِ f با نگاشت ِ خاص ِ همدیس نگاشت ِ همدیس ِ f' است و اگر a_f صفر نباشد، میشود پارامتر ِ نگاشت ِ خاص ِ همدیس را چنان تنظیم کرد که $\Lambda_{f'}$ جمله یِ خطی نداشته باشد. اگر a_f صفر باشد هم با یک انتقال میشود آن را غیرِصفر کرد. پس متناظر با هر نگاشت ِ همدیس ِ f یک نگاشت ِ همدیس هست که ترکیب f با آن نگاشت ِ همدیس ِ f' است که $\Lambda_{f'}$ جمله یِ خطی ندارد.

نگاشت ِ همدیس ِ f را در نظر بگیرید که

$$\Lambda_f = a_f + c_f\, x\cdot x. \tag{84}$$

نشان میدهیم در این صورت بین ِ a_f و c_f یک ی صفر است. فرض کنید a_f غیرِصفر است. از (54) نسبت به x^σ مشتق میگیریم و بعد x را صفر میگذاریم:

$$a_f\,\frac{\partial^3 f^\mu}{\partial x^\alpha\,\partial x^\beta\,\partial x^\sigma} + 2\,c_f\,\left(g_{\beta\,\sigma}\,\frac{\partial f^\mu}{\partial x^\alpha} + g_{\alpha\,\sigma}\,\frac{\partial f^\mu}{\partial x^\beta} - g_{\alpha\,\beta}\,\frac{\partial f^\mu}{\partial x^\sigma}\right) = 0, \quad x = 0. \tag{85}$$

جملهها یِ اول و دوم نسبت به β و σ متقارن اند و مجموع ِ جمله یِ سهوم و چهارم نسبت به β و σ پادمتقارن است. پس این مجموع باید صفر باشد:

$$c_f\,\left(g_{\alpha\,\sigma}\,\frac{\partial f^\mu}{\partial x^\beta} - g_{\alpha\,\beta}\,\frac{\partial f^\mu}{\partial x^\sigma}\right) = 0, \quad x = 0. \tag{86}$$

اگر c_f صفر نباشد،

$$g_{\alpha\,\sigma}\,\frac{\partial f^\mu}{\partial x^\beta} = g_{\alpha\,\beta}\,\frac{\partial f^\mu}{\partial x^\sigma}, \quad x = 0. \tag{87}$$

در این حالت α و σ را متمایز و α و β را یکسان میگیریم. نتیجه میشود

$$\frac{\partial f^\mu}{\partial x^\sigma} = 0, \quad x = 0. \tag{88}$$

اما این نتیجه میدهد

$$\lambda_f = 0, \quad x = 0, \tag{89}$$

یا این که Λ_f در $x = 0$ بینهایت میشود، که با (84) ناسازگار است. پس غیرِصفربودن ِ c_f درست نیست.

نگاشت ِ همدیس ِ f را در نظر بگیرید که Λ_f ثابت است. از (54) نتیجه میشود در این حالت مشتق ِ دوم ِ f صفر است. پس f آفین است.

سرانجام، نگاشت ِ همدیس ِ f را در نظر بگیرید که

$$\Lambda_f = c_f\, x \cdot x. \tag{90}$$

به ساده‌گی دیده میشود نگاشت ِ I (وارونی) با

$$\mathrm{I}^\mu(x) := \frac{x^\mu}{x \cdot x} \tag{91}$$

همدیس است و

$$\Lambda_{\mathrm{I}} = x \cdot x. \tag{92}$$

از اینجا نتیجه میشود $f \circ \mathrm{I}$ همدیس است و

$$\Lambda_{f\circ \mathrm{I}} = c_f. \tag{93}$$

پس هر نگاشت ِ همدیس ِ f با مقیاس ی به شکل ِ (84) ترکیب ی از نگاشتها یِ همدیس ِ آفین و وارونی است. نگاشت ِ خاص ِ همدیس هم ترکیب ی از انتقال و وارونی است:

$$s_b = \mathrm{I} \circ \tau_b \circ \mathrm{I}, \tag{94}$$

که τ_b انتقال با بردار ِ (ثابت ِ) b است:

$$\tau_b^\mu(x) := x^\mu + b^\mu. \tag{95}$$

روشن است که انتقال آفین است. نتیجه این که هر نگاشت ِ همدیس در بُعد ِ بیش از 2 ترکیب ی از نگاشتها یِ همدیس ِ آفین و وارونی است. البته همه یِ نگاشتها یِ آفین همدیس نیستند.

3.1 نگاشت ِ همدیس در بُعد ِ 2

مختصات ِ دِکَرتی یِ فضازمان را با (T, X) نشان میدهیم. با اینها مختصات ِ مخروطِنور ِ $(Y, \bar{Y})$ را تعریف میکنیم:

$$\begin{aligned} Y &:= X + C\,T, \\ \bar{Y} &:= X - C\,T, \end{aligned} \tag{96}$$

که

$$C := \sqrt{-\frac{g_{T\,T}}{g_{X\,X}}}. \tag{97}$$

رابطه یِ (43) بر حسب ِ مختصات ِ مخروطِنور میشود

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial Y}\,\frac{\partial \bar{F}}{\partial \bar{Y}} &= 0, \\ \frac{\partial \bar{F}}{\partial Y}\,\frac{\partial F}{\partial \bar{Y}} &= 0, \end{aligned} \tag{98}$$

که $(F, \bar{F})$ مختصات ِ مخروطِنور ِ f است. این معادلهها دو دسته جواب دارند:

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial \bar{Y}} &= 0, \\ \frac{\partial \bar{F}}{\partial Y} &= 0, \end{aligned} \tag{99}$$

و

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial Y} &= 0, \\ \frac{\partial \bar{F}}{\partial \bar{Y}} &= 0. \end{aligned} \tag{100}$$

دسته یِ اول یعنی F تابع ِ فقط Y و $\bar{F}$ تابع ِ فقط $\bar{Y}$ است، و دسته یِ دوم یعنی F تابع ِ فقط $\bar{Y}$ و $\bar{F}$ تابع ِ فقط Y است. در فضازمان C حقیقی است. اما اگر چنین نباشد ($g_{T\,T}$ و $g_{X\,X}$ مختلفالعلامت باشند) هم جوابها یِ (99) و (100) معتبر اند. در این حالت Y و $\bar{Y}$ مختلط و مزدوج ِ هم اند و (99) و (100) متناظر با جوابها یِ به ترتیب تمامریخت و پادتمامریخت اند.

3.2 نگاشت ِ همدیس ِ آفین

نگاشت ِ همدیس ِ آفین ِ f را در نظر بگیرید. این نگاشت با یک ماتریس (S_f) و یک بردار ($\check{f}$) مشخص میشود، که مئلفه‌ها یِ هردو ثابت اند:

$$f^\mu(x) = \check{f}^\mu + S^\mu{}_\nu\, x^\nu. \tag{101}$$

این که f رابطه یِ (43) را برآورَد، هم‌ارز است با

$$g_{\mu\,\nu}\, S^\mu{}_\alpha\, S^\nu{}_\beta = \lambda_f\, g_{\alpha\,\beta}, \tag{102}$$

که از این استفاده شده که مئلفه‌ها یِ g ثابت اند. (102) نشان میدهد $\check{f}$ دلبخاه و λ_f ثابت است.

4 نسبیت ِ خاص

گاه ی نسبیت ِ خاص را بر اساس ِ 2 اصل بنا میکنند: اصل ِ نسبیت و اصل ِ ثابتماندن ِ سرعت ِ نور. بر اساس ِ آن چه در بخشها یِ پیش آمد، نتیجه یِ این اصلها (این که تقارنها یِ فضازمان آنها یی اند که جهانخطها یِ راست را به جهانخطها یِ راست، و جهانخطها یِ نور را به مسیرها یی با سرعت ِ نور مینگارند) این است که مجموعه یِ تقارنها یِ فضازمان مجموعه یِ نگاشتها یِ همدیس ِ آفین است. اعضا یِ این گروه (101) و (102) را برمی‌آورند. اما این شرطها لزومَن تقارنها را به نگاشتها یِ پوانکَره [a] محدود نمیکنند. نگاشت ِ f یک نگاشت ِ پوانکَره [a] است اگر

$$g_{\mu\,\nu}\, \frac{\partial f^\mu}{\partial x^\alpha}\, \frac{\partial f^\nu}{\partial x^\beta} = g_{\alpha\,\beta}. \tag{103}$$

دیده میشود هر نگاشت ِ پوانکَره [a] یک نگاشت ِ همدیس با مقیاس ِ 1 است.

نشان میدهیم نگاشتها یِ همدیس ِ آفین ترکیب ی از نگاشتها یِ پوانکَره [a] و نگاشتها یِ دیگر ی اند که تعیین ِشان میکنیم. برا یِ این کار اول علامت ِ λ_f در (102) را بررسی کنیم. رابطه یِ g با $\tilde{g}$ بر اساس ِ (38) را در نظر بگیرید. زیرفضا یی که تحدید ِ $\tilde{g}$ به آن مثبت ِ (منفی یِ) معین است، با مشتق ِ f به زیرفضا یی نگاشته میشود که تحدید ِ g به آن مثبت ِ (منفی یِ) معین است. به این ترتیب زیرفضا یی که تحدید ِ $\tilde{g}$ به آن مثبت ِ (منفی یِ) معین است، با زیرفضا یی که تحدید ِ g به آن مثبت ِ

(منفی یِ) معین است بکریخت است. ماتریسها یِ g و $\tilde{g}$ هردو قطری اند. پس بُعد ِ زیرفضا یی که تحدید ِ g ($\tilde{g}$) به آن مثبت ِ (منفی یِ) معین است تعداد ِ عنصرها یِ قطری یِ مثبت ِ (منفی یِ) g ($\tilde{g}$) است. این نشان میدهد تعداد ِ عنصرها یِ قطری یِ مثبت ِ (منفی یِ) g با تعداد ِ عنصرها یِ قطری یِ مثبت ِ (منفی یِ) $\tilde{g}$ برابر است. این نشان میدهد λ_f مثبت است، مگر تعداد ِ عنصرها یِ قطری یِ مثبت و منفی یِ g یکسان باشد. ترکیب ِ نگاشت ِ تجانس (ضرب ِ بردار در عدد ِ ثابت ِ r) با نگاشت ِ همدیس ِ آفین ِ f نگاشت ِ همدیس ِ آفین ِ f' است که

$$\lambda_{f'} = \lambda_f\, r^2. \tag{104}$$

به این ترتیب هر نگاشت ِ همدیس ِ آفین ترکیب ِ یک تجانس با یک نگاشت ِ همدیس ِ آفین با مقیاس ِ 1 یا (-1) است. فقط در فضازمان ِ 2 بُعدی است که ممکن است مقیاس ِ نگاشت منفی شود. چون در فضازمانها یِ با بُعد ِ بیشتر، در ماتریس ِ g تعداد ِ عنصرها یِ قطری یِ مثبت ِ بیش از تعداد ِ عنصرها یِ قطری یِ منفی یِ است. پس در فضازمانها یِ با بُعد ِ بیش از 2 هر نگاشت ِ همدیس ِ آفین ترکیب ِ یک نگاشت ِ پوانکَره [a] با یک تجانس است. در فضازمان ِ 2 بُعدی هم هر نگاشت ِ همدیس ِ آفین ترکیب ِ یک نگاشت ِ پوانکَره [a] با یک تجانس و احتمالَن نگاشت ِ ℓ با

$$\ell \begin{pmatrix} T \\ X \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} C^{-1}\, X \\ C\, T \end{pmatrix} \tag{105}$$

است، که C با (97) تعریف میشود.

به این ترتیب اصل ِ نسبیت و اصل ِ ثابتماندن ِ سرعت ِ نور برا یِ رسیدن به اثبات ِ این که تقارنها یِ فضازمان نگاشتها یِ پوانکَره [a] اند کافی نیستند. این را به عنوان ِ اصل ِ نسبیت ِ خاص جایگزین ِ اصلها یِ نسبیت و ثابتماندن ِ سرعت ِ نور میکنیم.

تقارنها یِ فضازمان نگاشتها یی اند که طول ِ بازه یِ فضازمانی را ثابت نگه میدارند.

این یعنی نگاشت ِ f یک تقارن ِ فضازمان است اگر و تنها اگر (103) برقرار باشد. در مثلَن [1] هم هم ین برا یِ رسیدن به نگاشتها یِ پوانکَره [a] به کار رفته.

5 مرجع

[1] Steven Weinberg; “Gravitation and cosmology: principles and applications of the general theory of relativity”, (John Wiley & Sons, 1972) chapter 2

6 اسمِ خاص

[a] Poincaré