

ذره ی نسبیتی در یک میدان اسکالر

mamwad@mailaps.org

محمد خرمی

لگرانژی و معادله حرکت یک ذره ی نسبیتی بررسی میشود که نیروی وارد بر آن ناشی از یک میدان اسکالر است، چنان که در سرعتها ی کم این میدان انرژی ی پتانسیل است.

0 قراردادها

منظور از جرم جرم سکون است،

$$r^0 := t, \quad (1)$$

و

$$\eta_{\mu\nu} = \begin{cases} -c^2, & \mu = \nu = 0 \\ 1, & \mu = \nu \neq 0 \\ 0, & \mu \neq \nu \end{cases}, \quad (2)$$

که r^μ ها متلفهها ی چاربردار مکان اند، و t زمان و η متریک (مینکفسکی [1]) است. بردارها ی سه متلفه ای (با متلفهها ی فضایی) را با حروف سیاه، و ویژه زمان را با τ نمایش میدهم. شاخصها یی

ذره‌ی نسبیتی در یک میدان اسکالر

که مقادارها‌ی فضازمانی (از 0 تا 3) را میگیرند را با حروف یونانی و شاخصها‌ی که فقط مقادارها‌ی فضایی (از 1 تا 3) را میگیرند را با حروف لاتین نمایش میدهیم. سرعت (مشتق مکان نسبت به زمان) را با v نشان میدهیم:

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt}. \quad (3)$$

چاربردار سرعت (مشتق چاربردار مکان نسبت به ویژه‌زمان) را با u نشان میدهیم:

$$u := \frac{dr}{d\tau}, \quad (4)$$

که از آن نتیجه میشود

$$u = \gamma v, \quad (5)$$

که γ ضریب لورنتس [2] است:

$$\gamma := \left(1 - \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}}{c^2}\right)^{-1/2}, \quad (6)$$

و

$$\begin{aligned} v^0 &:= \frac{dr^0}{dt}, \\ &= 1. \end{aligned} \quad (7)$$

مانسته‌ی قانون دوم نیوتن [3] با سه‌بردار نیرو (\mathbf{F}) و سه‌بردار تکانه (\mathbf{p}) نوشته میشود:

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \mathbf{F}. \quad (8)$$

رابطه‌ی E (انرژی) با تکانه

$$E = c^2 p^0 \quad (9)$$

است. (8) را میشود بر حسب f (چاربردار نیرو) هم نوشت:

$$\frac{dp}{d\tau} = f. \quad (10)$$

دیده میشود

$$\mathbf{f} = \gamma \mathbf{F}, \quad (11)$$

و البته f^0 باید چنان باشد که (10) با

$$u \cdot u = -c^2 \quad (12)$$

سازگار باشد، یعنی (12) اگر در یک زمان برقرار باشد، در اثر تحولی که با (10) داده میشود هم همچنان برقرار بماند.

برای سیستمی شامل یک ذره 2 لگرانژی (یا کنش) به کار میبریم. در شکل اول (زمانی) زمان پارامتری تحول است و لگرانژی تابع $(t, \mathbf{r}, \mathbf{v})$ (زمان، سه بردار مکان، و سه بردار سرعت) است. لگرانژی و کنش در این شکل را با به ترتیب L و S نشان میدهم. در شکل دوم (پارامتری) زمان هم یک متغیر دینامیکی است. ویژه زمان (یا یک پارامتر آفین دیگر مسیر) را پارامتری تحول میگیریم و لگرانژی و کنش متناظر را با به ترتیب L_s و S_s نمایش میدهم. L_s تابع (r, u) (چار بردارهای مکان و سرعت) است، و در آن مثلثه‌ها ی چار بردار سرعت مستقل از هم فرض میشوند. یعنی (12) اعمال نمیشود، بل که انتظار می‌رود اگر با شرط اولیه برقرار باشد با تحول هم برقرار بماند.

داریم

$$\begin{aligned} S &= \int dt L, \\ S_s &= \int d\tau L_s. \end{aligned} \quad (13)$$

تعریف میکنیم

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_i &:= \left(\frac{\delta S}{\delta r^i} \right)_{\text{in}}, \\ &= \frac{\partial L}{\partial r^i} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial v^i} \right), \\ \mathcal{E}_{s\alpha} &:= \left(\frac{\delta S_s}{\delta r^\alpha} \right)_{\text{in}}, \\ &= \frac{\partial L_s}{\partial r^\alpha} - \frac{d}{d\tau} \left(\frac{\partial L_s}{\partial u^\alpha} \right), \end{aligned} \quad (14)$$

که شاخص in یعنی وردش بدون در نظر گرفتن جمله‌های مرزی.

1 ذره‌ی آزاد

یک ذره‌ی آزاد به جرم m را در نظر بگیرید. جواب معادله‌ی حرکت این ذره آن است که سرعت ذره ثابت است، یعنی معادله‌ی حرکت را میشود به شکل شتاب برابر صفر نوشت. اما از معادله‌ی

ذره ی نسبیتی در یک میدان اسکالر

حرکت نمیشود لگرانژی را به طرّ یکتا به دست آورد. اگر این قید را بیفزاییم که تکانه ی ذره و انرژی ی ذره به شکل

$$\mathbf{p} = m \gamma \mathbf{v}, \quad (15)$$

$$E = m c^2 \gamma, \quad (16)$$

باشد، خواهیم داشت

$$\frac{\partial L^f}{\partial v^i} = m \gamma v_i, \quad (17)$$

$$v^i \frac{\partial L^f}{\partial v^i} - L^f = m c^2 \gamma, \quad (18)$$

که L^f لگرانژی ی زمانی ی ذره ی آزاد است. از ترکیب (17) و (18) نتیجه میشود

$$L^f = v^i (m \gamma v_i) - m c^2 \gamma, \quad (19)$$

یا

$$L^f = -m c^2 \gamma^{-1}. \quad (20)$$

این هم ان لگرانژی بی است که در مثلن [4] به دست آمده. به ساده گی دیده میشود این لگرانژی (17) و (18) را بر می آورد.

لگرانژی ی پارامتری ی ذره ی آزاد را با L_s^f نشان میدهیم. مانسته ها ی (17) و (18) میشوند

$$\frac{\partial L_s^f}{\partial u^\alpha} = m u_\alpha, \quad (21)$$

که نتیجه میدهد

$$L_s^f = \frac{1}{2} m u \cdot u + C(r). \quad (22)$$

داریم

$$\mathcal{E}_{s\alpha}^f = -\frac{d}{d\tau}(m u_\alpha) + \frac{\partial C}{\partial r^\alpha}. \quad (23)$$

از اینجا نتیجه میشود معادله ی حرکت ناشی از S_s^f معادله ی حرکت ذره ی آزاد است، اگر و تنها اگر همه ی مشتقها ی C صفر باشند، یعنی C ثابت باشد. یک ثابت جمعی را میشود از لگرانژی حذف کرد. به این ترتیب میرسیم به

$$L_s^f = \frac{1}{2} m u \cdot u. \quad (24)$$

این هم در [4] آمده.

یک راه دیگر برای رسیدن به (20) این میبود که به یک ذره ی آزاد ساکن یک انرژی ی پتانسیل برابر $(m c^2)$ نسبت دهیم. کنش متناظر، برای بازه ی زمانی Δt^r میشود

$$\Delta S^{fr} = -m c^2 \Delta t^r, \quad (25)$$

که شاخص r متناظر با حالت سکون است. ذره را بخیزانیم تا سرعت v شود. داریم

$$\Delta t = \gamma \Delta t^r. \quad (26)$$

حالا فرض کنیم کنش در اثر خیز (لرنتس [2]) تغییر نمیکند. نتیجه میشود

$$\Delta S^f = -m c^2 \gamma^{-1} \Delta t, \quad (27)$$

که هم ان (20) است.

2 ذره در یک میدان اسکالر

لگرانژی ی یک ذره ی غیرنسبیتی در انرژی ی پتانسیل V

$$L^{NR} = \frac{1}{2} m \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} - V \quad (28)$$

است. V تابع ی از چاربردار مکان (زمان و سه بردار مکان) است. برای این ذره لگرانژیها ی زمانی و پارامتری را چنین میگیریم.

$$L = -m c^2 \Sigma(\gamma) - V \Xi(\gamma), \quad (29)$$

$$L_s = m c^2 \Sigma_s(u \cdot u) + V \Xi_s(u \cdot u). \quad (30)$$

انگیزه ی این نهادهها آن است که در شکل زمانی، انتظار می رود (سه بردار) سرعت فقط از طریق اندازه اش در لگرانژی وارد شود (که اندازه ی سرعت هم تابع ضرب لرنتس [2] است)؛ و در شکل پارامتری تنها اسکالر ی که با (چاربردار) سرعت ساخته میشود $(u \cdot u)$ است.

از (29) نتیجه میشود

$$p_i = -(m \Sigma' + c^{-2} V \Xi') \gamma^3 v_i, \quad (31)$$

$$E = (m c^2 \Sigma' + V \Xi') \gamma^3 (\gamma^{-2} - 1) + m c^2 \Sigma + V \Xi. \quad (32)$$

پریم مشتگیری است، و از این استفاده شده که

$$\frac{\partial \gamma}{\partial v^i} = c^{-2} \gamma^3 v_i, \quad (33)$$

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{v} = c^2 (1 - \gamma^{-2}). \quad (34)$$

از (30) نتیجه میشود

$$p_\alpha = 2(m c^2 \Sigma'_s + V \Xi'_s) u_\alpha. \quad (35)$$

از (35) از جمله نتیجه میشود

$$p_i = c^{-2} E v_i. \quad (36)$$

این و (32) را در (31) میگذاریم:

$$(m c^2 \Sigma' + V \Xi') \gamma^3 (\gamma^{-2} - 1) + m c^2 \Sigma + V \Xi = -(m c^2 \Sigma' + V \Xi') \gamma^3, \quad (37)$$

که نتیجه میدهد

$$m c^2 (\gamma \Sigma' + \Sigma) + V (\gamma \Xi' + \Xi) = 0. \quad (38)$$

با فرض این که Σ و Ξ مستقل از V اند، از (38) نتیجه میشود

$$\gamma \Sigma' + \Sigma = 0, \quad (39)$$

$$\gamma \Xi' + \Xi = 0, \quad (40)$$

که نتیجه میدهند

$$\Sigma(\gamma) = \gamma^{-1} \Sigma(1), \quad (41)$$

$$\Xi(\gamma) = \gamma^{-1} \Xi(1), \quad (42)$$

و از آنجا

$$p_\alpha = [m \Sigma(1) + c^{-2} V \Xi(1)] u_\alpha. \quad (43)$$

این را با (35) ترکیب میکنیم و فرض میکنیم Σ_s و Ξ_s هم مستقل از V اند. نتیجه میشود

$$2 c^2 \Sigma'_s = \Sigma(1), \quad (44)$$

$$2 c^2 \Xi'_s = \Xi(1), \quad (45)$$

و از آنجا،

$$\Sigma_s = \frac{\Sigma(1)}{2c^2} u \cdot u + \Sigma_s(0), \quad (46)$$

$$\Xi_s = \frac{\Xi(1)}{2c^2} u \cdot u + \Xi_s(0). \quad (47)$$

برای تعیین $\Sigma(1)$ و $\Xi(1)$ ، حد غیرنسبیتی را بررسی کنیم. از (29)، (41)، و (42) نتیجه

میشود

$$L = \left(-m c^2 + \frac{1}{2} m \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} \right) \Sigma(1) - V \Xi(1) + O(c^{-2}), \quad (48)$$

که از مقایسه اش با (29) نتیجه میشود

$$\Sigma(1) = 1, \quad (49)$$

$$\Xi(1) = 1. \quad (50)$$

به این ترتیب،

$$L = -(m c^2 + V) \gamma^{-1}. \quad (51)$$

از (30)، (46)، (47)، (49)، و (50) نتیجه میشود

$$L_s = \frac{1}{2} m u \cdot u + \frac{1}{2c^2} u \cdot u V + m c^2 \Sigma_s(0) + V \Xi_s(0), \quad (52)$$

که نتیجه میدهد

$$\mathcal{E}_{s\alpha} = -\frac{d}{d\tau} [(m + c^{-2} V) u_\alpha] + \frac{\partial V}{\partial r^\alpha} \Xi_s. \quad (53)$$

داریم

$$u^\alpha \mathcal{E}_{s\alpha} = -(m + c^{-2} V) u^\alpha \frac{du_\alpha}{d\tau} - c^{-2} u^\alpha u_\alpha \frac{\partial V}{\partial r^\beta} u^\beta + u^\alpha \frac{\partial V}{\partial r^\alpha} \Xi_s, \quad (54)$$

که نتیجه میدهد

$$\frac{m + c^{-2} V}{2} \frac{d}{d\tau} (u \cdot u) = -u^\alpha \mathcal{E}_{s\alpha} + (\Xi_s - c^{-2} u \cdot u) u^\alpha \frac{\partial V}{\partial r^\alpha}. \quad (55)$$

(12) در اثر تحول برقرار میماند، اگر و تنها اگر

$$1 + \Xi_s(-c^2) = 0, \quad (56)$$

یعنی

$$\Xi_s(0) = -\frac{1}{2}. \quad (57)$$

$\Sigma_s(0)$ یک ثابت جمعی در لگرانژی وارد میکند، که بی اثر است. پس مقدار $\Sigma_s(0)$ مهم نیست. از جمله میشود آن را صفر گرفت. به این ترتیب،

$$L_s = \frac{1}{2} m u \cdot u + \frac{1}{2} (c^{-2} u \cdot u - 1) V. \quad (58)$$

از (51)، از جمله نتیجه میشود

$$\mathbf{p} = (m + c^{-2} V) \gamma \mathbf{v}, \quad (59)$$

$$E = (m c^2 + V) \gamma. \quad (60)$$

از (58) هم از جمله نتیجه میشود

$$p = (m + c^{-2} V) u, \quad (61)$$

که با (59) و (60) هم ارز است.

معادله حرکت حاصل از لگرانژی ی (51) میشود

$$\frac{d}{dt} [(m + c^{-2} V) \gamma \mathbf{v}] = -\gamma^{-1} \nabla V. \quad (62)$$

معادله حرکت حاصل از لگرانژی ی (58) هم میشود

$$\frac{d}{d\tau} [(m + c^{-2} V) u_\alpha] = -\frac{\partial V}{\partial r^\alpha}. \quad (63)$$

بخش فضایی ی این معادله با (62) هم ارز است. بخش زمانی هم چنان است که (12) در اثر تحول تغییر نکند.

سرانجام، اینجا هم یک راه دیگر برا ی رسیدن به (51) این میبود که به یک ذره ی ساکن یک انرژی ی پتانسیل برابر $(m c^2 + V)$ نسبت دهیم. کنش متناظر، برا ی بازه ی زمانی ی Δt^r میشود

$$\Delta S^r = -(m c^2 + V) \Delta t^r. \quad (64)$$

ذره را بخیزانیم تا سرعت ش \mathbf{v} شود. با استفاده از (26)، و با این فرض که کنش در اثر خیز (لُرتنس [2]) تغییر نمیکند، نتیجه میشود

$$\Delta S = -(m c^2 + V) \gamma^{-1} \Delta t, \quad (65)$$

که هم ان (51) است.

3 میدان اسکالر و مؤلفه‌ی صفر یک میدان برداری

لگرانژی بی که در [4] آمده (L') چنین است.

$$L' = -m c^2 \gamma^{-1} - V. \quad (66)$$

دیده میشود L' با L فرق دارد. از (66) و با استفاده از (26) دیده میشود

$$\Delta S'^r = -(m c^2 + V \gamma) \Delta t^r. \quad (67)$$

این پیشنهاد میکند تعریف کنیم

$$V^r := \gamma V. \quad (68)$$

یک راه برآوردن این رابطه آن است که V را مؤلفه‌ی صفر یک میدان چاربرداری (\mathcal{A}) بگیریم، که مؤلفه‌ها ی فضایی ی آن صفر اند (برای ذره ی متحرک، با لگرانژی ی L'):

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_0 &= V, \\ \mathcal{A}_i &= 0. \end{aligned} \quad (69)$$

در این صورت،

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_0^r &= \gamma V, \\ \mathcal{A}_i^r &= \gamma c^{-2} v_i V. \end{aligned} \quad (70)$$

به این ترتیب (67) میشود

$$\Delta S'^r = -(m c^2 + \mathcal{A}_0^r) \Delta t^r. \quad (71)$$

عبارت درون پرانتز را میشود چنان نوشت که صریحاً اسکالر باشد:

$$\begin{aligned} m c^2 + \mathcal{A}_0^r &= m c^2 + \mathcal{A}_\alpha^r u^{\alpha r}, \\ &= m c^2 + \mathcal{A}_\alpha u^\alpha. \end{aligned} \quad (72)$$

به این ترتیب، L' لگرانژی ی ذره ای است که در یک میدان برداری حرکت میکند که مؤلفه‌ها ی فضایی ی صفر اند:

$$L' = -(m c^2 + \mathcal{A}_\alpha u^\alpha) \gamma^{-1}. \quad (73)$$

ذره ی نسبیتی در یک میدان اسکالر

یک مثال از این گونه، لگراژی ی ذره در یک میدان الکترومغناطیسی ی داده شده است، که در آن

$$A = -q A, \quad (74)$$

که q بار ذره و A چاربردار پتانسیل است [4].

4 نیرو

ذره ای به جرم m در انرژی ی پتانسیل V را در نظر بگیرید. انرژی ی پتانسیل 2 نقش دارد. یک ی این که نیرو میسازد. دیگر این که جرم ذره را عوض میکند. وقت ی V را اسکالر میگیریم، یعنی مقدار V در اثر خیزاندن عوض نمیشود. پس محاسبه ی جرم ذره ساده است: ذره ی ساکن انرژی ی مجموع این انرژی ی پتانسیل و انرژی ی سکون در نبود این پتانسیل است:

$$E^s = m c^2 + V. \quad (75)$$

دیده میشود این هم ان (60) برای ذره ی ساکن است. به این ترتیب برای ذره یک جرم مثر تابع فضازمان تعریف میکنیم، که آن را با m^{eff} نمایش میدهیم:

$$m^{\text{eff}} = m + c^{-2} V. \quad (76)$$

این هم ان ضریب u در (61) است. (10) میشود

$$\frac{d}{d\tau} [(m + c^{-2} V) u] = f. \quad (77)$$

این هم ان (63) است، اگر

$$f_\alpha = -\frac{\partial V}{\partial r^\alpha}. \quad (78)$$

شاید این یک تعمیم طبیعی برای رابطه ی نیرو با انرژی ی پتانسیل بنماید. اما توجه کنید که انرژی ی پتانسیل فقط در نیرو ظاهر نشده؛ جرم را هم تغییر داده. اگر به این توجه نمیکردیم، شاید معادله ی حرکت

را

$$\tilde{\mathcal{E}}_{s\alpha} = 0 \quad (79)$$

مینوشتیم، که

$$\tilde{\mathcal{E}}_{s\alpha} = -\frac{d}{d\tau} (m u_\alpha) - \frac{\partial V}{\partial r^\alpha}. \quad (80)$$

در حال ی که (79) معادله ی حرکتِ درست ی نیست، چون (12) را برقرار نگه نمیدارد:

$$\frac{m}{2} \frac{d}{d\tau}(u \cdot u) = -u^\alpha \tilde{\mathcal{E}}_{s\alpha} - u^\alpha \frac{\partial V}{\partial r^\alpha}. \quad (81)$$

(79) و (12) طرفِ راستِ (81) را لزومَن صفر نمیکند. (80) متناظر است با لگرانژی یِ (نادرستِ)

\tilde{L}_s :

$$\tilde{L}_s := \frac{1}{2} m u \cdot u - V. \quad (82)$$

5 پانوشتها

[1] Minkowski

[2] Lorentz

[3] Newton

[4] Herbert Goldstein, Charles Poole, & John Safko; "classical mechanics"

3rd edition (Addison Wesley, 2002) chapter 7