X1-074 (2011/02/23)

پتانسیل در چند مسئله با چشمه یِ ناجایگزیده

محمد خرمی mamwad@mailaps.org

مثال‌ها یی از چشمه‌ها یِ ناجایگزیده بررسی می‌شود، که پتانسیل ی که با انتگرال‌گیری یِ مستقیم برا یِشان به دست می‌آید واگرا ست، اما میدان ِشان خُشرفتار است. پتانسیل‌ها یِ خُشرفتار ِ متناظر محاسبه می‌شوند.

0 مقدمه

برا یِ یک تُزیع‌ِبار ِ جایگزیده، پتانسیل ِ الکتریکی از این رابطه به دست می‌آید.

$$\phi(\boldsymbol{r}) = K \int \mathrm{d}V' \, \frac{\rho(\boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}, \tag{1}$$

که ϕ پتانسیل، ρ چگالی یِ حجمی یِ بار، و $\boldsymbol{r}$ مکان است. K هم ثابت ی است که به دستگاه ِ یکاها بسته‌گی دارد.اگر تُزیع‌ِبار جایگزیده نباشد، ممکن است طرف ِ راست ِ (1) همگرا نباشد. اما ممکن است طرف ِ راست ِ (1) همگرا نباشد ولی میدان ِ الکتریکی ($\boldsymbol{E}$) که از

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = K \int \mathrm{d}V' \, \frac{\rho(\boldsymbol{r}')\,(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|^3} \tag{2}$$

به دست می‌آید خُشرفتار باشد. یک مثال از این گونه پتانسیل و میدان ِ حاصل از یک میله یِ بی‌پایان ِ یکنواخت-باردارشده است. یک مثال که میدان هم خُشتعریف نیست وقت ی است که یک چگالی یِ یکنواخت کل ِ فضا را پر کرده.

مشابه ِ هم ین برا یِ میدان ِ مغناطیسی هم پیش می‌آید. برا یِ چشمه‌ها یِ جایگزیده، پتانسیل ِ برداری را میشود از

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}) = N \int \mathrm{d}V' \; \frac{\boldsymbol{J}(\boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|} \tag{3}$$

به دست آورد، که $\boldsymbol{A}$ پتانسیل ِ برداری و $\boldsymbol{J}$ چگالی یِ جریان است. N هم ثابت ی است که به دستگاه ِ یکاها بسته‌گی دارد.اگر تُزیعِ‌جریان جایگزیده نباشد، ممکن است طرف ِ راست ِ (3) همگرا نباشد. اما ممکن است طرف ِ راست ِ (3) همگرا نباشد ولی میدان ِ مغناطیسی ($\boldsymbol{B}$) که از

$$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}) = N \int \mathrm{d}V' \; \frac{\boldsymbol{J}(\boldsymbol{r}') \times (\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|^3} \tag{4}$$

به دست می‌آید خُشرفتار باشد. یک مثال از این گونه پتانسیل و میدان ِ یک سیم ِ راست ِ بی‌پایان ِ با جریان ِ یکنواخت است. یک مثال که میدان هم خُشتعریف نیست وقت ی است که یک چگالی‌یِ‌جریان ِ یکنواخت کل ِ فضا را پر کرده.

اگر میدان ِ خُشرفتار ی وجود داشته باشد، پتانسیل ی هم هست که متناظر با آن میدان باشد، هر چند آن پتانسیل لزومَن از (1) یا (3) به دست نمی‌آید.

1 خط ِ باردار، خط ِ جریان

یک سیم ِ راست ِ بی‌پایان (از دُسَر) با چگالی‌یِ‌بار ِ یکنواخت ِ λ را در نظر بگیرید. محور ِ z از مختصات ِ استوانه‌ای یِ (ρ, φ, z) را رو یِ سیم میگذاریم. از (2) دیده میشود میدان ِ الکتریکی در $\boldsymbol{r}$ چنین است.

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = K\,\lambda \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}z' \; \frac{[\hat{\boldsymbol{\rho}}\,\rho + \hat{\boldsymbol{z}}\,(z-z')]}{[\rho^2 + (z-z')^2]^{3/2}}. \tag{5}$$

انتگرالده در z' ها یِ بزرگ مثل ِ $(z')^{-2}$ رفتار میکند. پس انتگرال وجود دارد. میشود مستقیمَن انتگرال را حساب کرد، یا قانون ِ گاؤس [1] را به کار بُرد. نتیجه میشود

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = \frac{2\,K\,\lambda}{\rho}\,\hat{\boldsymbol{\rho}}. \tag{6}$$

پتانسیل ِ الکتریکی از (1) میشود

$$\phi(\boldsymbol{r}) = K\,\lambda \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}z'\ \frac{1}{[\rho^2 + (z - z')^2]^{1/2}}. \tag{7}$$

انتگرالده در z' ها یِ بزرگ مثل ِ $(z')^{-1}$ رفتار میکند. پس انتگرال وجود ندارد. اما کرل ِ میدان ِ الکتریکی یِ (6) صفر است. پس این میدان مشتق از یک پتانسیل است. برا یِ یافتن ِ این پتانسیل نُع ی منظمسازی به کار میبریم. اول پتانسیل ِ ناشی از یک خط ِ باپایان را در نظر بگیرید. ابتدا و انتها یِ این خط را در به ترتیب z_1 و z_2 میگیریم. پتانسیل ِ متناظر را با ϕ_{z_1,z_2} نشان میدهیم:

$$\begin{aligned}
\phi_{z_1,z_2}(\boldsymbol{r}) &= K\,\lambda \int_{z_1}^{z_2} \mathrm{d}z'\ \frac{1}{[\rho^2 + (z - z')^2]^{1/2}},\\
&= K\,\lambda\left(\sinh^{-1}\frac{z_2 - z}{\rho} - \sinh^{-1}\frac{z_1 - z}{\rho}\right),\\
&= K\,\lambda\left\{\ln\left[\sqrt{\left(\frac{z_2 - z}{\rho}\right)^2 + 1} + \frac{z_2 - z}{\rho}\right]\right.\\
&\qquad \left. + \ln\left[\sqrt{\left(\frac{z_1 - z}{\rho}\right)^2 + 1} - \frac{z_1 - z}{\rho}\right]\right\},\\
&= K\,\lambda\left\{\ln\left[\sqrt{\left(\frac{z_2 - z}{|z_2|}\right)^2 + \left(\frac{\rho}{z_2}\right)^2} + \frac{z_2 - z}{|z_2|}\right]\right.\\
&\qquad \left. + \ln\left[\sqrt{\left(\frac{z_1 - z}{|z_1|}\right)^2 + \left(\frac{\rho}{z_1}\right)^2} - \frac{z_1 - z}{|z_1|}\right]\right\}\\
&\qquad + K\,\lambda\,\ln\left|\frac{z_1\,z_2}{\rho^2}\right|.
\end{aligned} \tag{8}$$

دیده میشود در $(z_1, z_2) \to (-\infty, \infty)$، جمله یِ آخر ِ طرف ِ راست است که واگرا میشود. از اینجا یک پتانسیل ِ دیگر تعریف میکنیم که فرق َش با ϕ_{z_1,z_2} یک ثابت است (پس میدان ِ حاصل از هردُ

یکسان است) و در $(z_1, z_2) \to (-\infty, \infty)$ هم همگرا ست:

$$\tilde{\phi}_{z_1,z_2} := \phi_{z_1,z_2} - K\,\lambda\,\ln\left|\frac{z_1\,z_2}{a^2}\right|, \tag{9}$$

که a یک ثابتِ مثبتِ دلبخاه است. $\tilde{\phi}$ را حدِ $\tilde{\phi}_{z_1,z_2}$ در $(z_1, z_2) \to (-\infty, \infty)$ تعریف میکنیم. دیده میشود

$$\tilde{\phi}(\boldsymbol{r}) = 2\,K\,\lambda\,\ln\frac{2\,a}{\rho}. \tag{10}$$

مستقیمَن هم معلوم است که میدانِ (6) مشتق از پتانسیلِ (10) هست.

میشد پتانسیلِ (10) را (صرفِنظر از یک ثابتِ ضربی) با تحلیلِ بُعدی هم به دست آوَرد. با توجه به تقارنِ سمتی و انتقالی یِ تُزیعِبار، پتانسیل ی تابعِ فقط ρ را بررسی کنیم. این پتانسیل را با $\breve{\phi}$ نشان میدهیم. این پتانسیل جز ρ به λ و ثابتِ بُعددارِ K هم مربوط است. تنهاکمیتِ بیبُعدی که با $\breve{\phi}$ و ρ و λ و K ساخته میشود $[\breve{\phi}\,(K\,\lambda)^{-1}]$ است. اما این یعنی پتانسیل ی مستقل از مکان، که با میدانِ صفر متناظر است. این به رُشنی نادرست است. مشکل این است که پتانسیل یکتا نیست. میشود به پتانسیل یک مقدارِ ثابت افزود. اگر تُزیعِبار جایگزیده میبود، میشد پتانسیل را با این شرطِ مرزی که پتانسیل در بینهایت صفر میشود یکتا کرد. اینجا چنین نیست. پس یک شرطِ مرزی میگذاریم که پتانسیل در $\rho = b$ صفر شود. b یک ثابتِ مثبتِ دلبخاه است. تحلیلِ بُعدی را با افزودنِ ثابتِ b (که بُعد َش طول است) تکرار میکنیم. یک کمیتِ بیبُعدِ دیگر هم به دست میآید که $(\rho\,b^{-1})$ است. پس نتیجه یِ تحلیلِ بُعدی این است که

$$\breve{\phi}_b(\boldsymbol{r}) = K\,\lambda\,f\left(\frac{\rho}{b}\right), \tag{11}$$

که f یک تابعِ دلبخاه است. $\breve{\phi}_b$ پتانسیل ی است که در $\rho = b$ صفر میشود.

پتانسیلها یی با b ها یِ متفاوت، بنا ست به یک میدان بینجامند، پس تفاوتِ شان باید ثابت (مستقل از ρ) باشد. این یعنی یک تابعِ g هست که

$$f\left(\frac{\rho}{b}\right) - f\left(\frac{\rho}{b'}\right) = g(b, b'). \tag{12}$$

از جمله،

$$f\left(\frac{b'}{b}\right) - f(1) = g(b, b'). \tag{13}$$

پس یک تابع ِ h هست که

$$g(b,b')=h\left(\frac{b'}{b}\right), \tag{14}$$

و

$$h\left(\frac{\rho}{b}\right)-h\left(\frac{\rho}{b'}\right)=h\left(\frac{b'}{b}\right), \tag{15}$$

یا،

$$h(\eta\,\xi)=h(\eta)+h(\xi), \tag{16}$$

که نتیجه میدهد یک ثابت ِ α هست که

$$h(\xi)=\alpha\,\ln(\xi). \tag{17}$$

به این ترتیب،

$$f(\xi)=f(1)+\alpha\,\ln(\xi). \tag{18}$$

این که پتانسیل در $\rho=b$ صفر میشود نتیجه میدهد

$$f(1)=0, \tag{19}$$

و از آنجا،

$$\breve{\phi}_b(\boldsymbol{r})=\alpha\,K\,\lambda\,\ln\frac{\rho}{b}. \tag{20}$$

دیده میشود پتانسیل ِ (10) هم ین با $\alpha=-2$ و با انتخاب ِ $b=2\,a$ است.

پتانسیل ِ برداری ی ِ حاصل از یک سیم ِ راست ِ بیپایان با جریان ِ I هم کاملَن مشابه با بالا به دست می‌آید. با تعریف ِ $\tilde{\boldsymbol{A}}_{z_1,z_2}$، مشابه با (9)، با

$$\boldsymbol{A}_{z_1,z_2}(\boldsymbol{r})=\hat{\boldsymbol{z}}\,N\,I\,\int_{z_1}^{z_2}\mathrm{d}z'\,\frac{1}{[\rho^2+(z-z')^2]^{1/2}}, \tag{21}$$

و با تعریف ِ $\tilde{\boldsymbol{A}}$ به عنوان ِ حد ِ $\tilde{\boldsymbol{A}}_{z_1,z_2}$ در $(z_1,z_2)\to(-\infty,\infty)$، دیده میشود

$$\tilde{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{r})=2\,N\,I\,\hat{\boldsymbol{z}}\,\ln\frac{2\,a}{\rho}. \tag{22}$$

کِرل ِ این پتانسیل هم چنان که انتظار میرود هم ان میدان ِ مغناطیسی یِ خط ِ جریان است:

$$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}) = 2\, N\, I\, \hat{\varphi}\, \frac{1}{\rho}. \tag{23}$$

البته بر خلاف ِ ϕ_{z_1,z_2} و $\tilde{\phi}_{z_1,z_2}$ که پتانسیل ِ الکتریکی یِ یک خطِبار ِ باپایان اند، $\boldsymbol{A}_{z_1,z_2}$ یا $\tilde{\boldsymbol{A}}_{z_1,z_2}$ پتانسیل ِ برداری یِ یک خطِجریان ِ باپایان نیستند، چون چنین-جریان ی یک چشمه یِ ایستا نیست و میدان ِ مغناطیسی یِ حاصل از آن از قانون ِ بیُ-سَوَر [2] به دست نمی‌آید.

2 صفحه یِ باردار، صفحه یِ جریان

یک صفحه (یِ بیپایان) با چگالی‌یِبار ِ یکنواخت ِ σ را در نظر بگیرید. محور ِ z از مختصات ِ استوانه‌ای یِ (ρ, φ, z) را عمود بر صفحه، و مبدئ را رو یِ صفحه میگیریم. از (2) و با استفاده از تقارنها یِ مسئله دیده میشود میدان ِ الکتریکی در $\boldsymbol{r}$ چنین است.

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = 2\, \pi\, K\, \sigma \int_0^{\infty} \mathrm{d}\rho'\ \rho'\, \frac{\hat{\boldsymbol{z}}\, z}{(\rho'^2 + z^2)^{3/2}}. \tag{24}$$

در این محاسبه ρ' فاصله از تصویر ِ $\boldsymbol{r}$ بر صفحه است. انتگرالده در ρ' ها یِ بزرگ مثل ِ $(\rho')^{-2}$ رفتار میکند. پس انتگرال وجود دارد. میشود مستقیمَن انتگرال را حساب کرد، یا قانون ِ گاؤس [1] را به کار بُرد. نتیجه میشود

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = 2\, \pi\, \sigma\, \hat{\boldsymbol{z}}\, \mathrm{sgn}(z), \tag{25}$$

که sgn تابع ِ علامت است.

پتانسیل ِ الکتریکی از (1) میشود

$$\phi(\boldsymbol{r}) = 2\, \pi\, K\, \sigma \int_0^{\infty} \mathrm{d}\rho'\ \rho'\, \frac{1}{(\rho'^2 + z^2)^{1/2}}. \tag{26}$$

انتگرالده در ρ' ها یِ بزرگ مثل ِ $(\rho')^{0}$ رفتار میکند. پس انتگرال وجود ندارد. اما کرل ِ میدان ِ الکتریکی یِ (25) صفر است. پس این میدان مشتق از یک پتانسیل است. برا یِ یافتن ِ این پتانسیل، شبیه ِ بخش ِ پیش، اول پتانسیل ِ ناشی از یک قرص ِ باپایان در نقطه ای را در نظر بگیرید که تصویر َش

بر صفحه یِ قرص مرکز ِ قرص است. شعاع ِ قرص را با R، و پتانسیل ِ متناظر را با ϕ_R نشان میدهیم:

$$\begin{aligned}\phi_R(\boldsymbol{r}) &= 2\,\pi\,K\,\sigma\,\int_0^R \mathrm{d}\rho'\;\rho'\,\frac{1}{(\rho'^2+z^2)^{1/2}},\\ &= 2\,\pi\,K\,\sigma\,(\sqrt{R^2+z^2}-|z|).\end{aligned} \tag{27}$$

تعریف میکنیم

$$\tilde{\phi}_R := \phi_R - 2\,\pi\,K\,\sigma\,R. \tag{28}$$

$\tilde{\phi}$ را حد ِ $\tilde{\phi}_R$ در $R\to\infty$ تعریف میکنیم. دیده میشود

$$\tilde{\phi}(\boldsymbol{r}) = -2\,\pi\,K\,\sigma\,|z|. \tag{29}$$

مستقیمَن هم معلوم است که میدان ِ (25) مشتق از پتانسیل ِ (29) هست.

پتانسیل ِ برداری یِ حاصل از یک صفحه با چگالیِ‌جریان ِ سطحی یِ یکنواخت ِ $J_\mathrm{s}\,\hat{\boldsymbol{y}}$ هم کاملَن مشابه با بالا به دست می‌آید. (x,y,z) مختصات ِ دکَرتی اند. با تعریف ِ $\tilde{\boldsymbol{A}}_R$، مشابه با (28)، با

$$\boldsymbol{A}_R(\boldsymbol{r}) = 2\,\pi\,N\,J_\mathrm{s}\,(\sqrt{R^2+z^2}-|z|)\,\hat{\boldsymbol{y}}, \tag{30}$$

و با تعریف ِ $\tilde{\boldsymbol{A}}$ به عنوان ِ حد ِ $\tilde{\boldsymbol{A}}_R$ در $R\to\infty$، دیده میشود

$$\tilde{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{r}) = -2\,\pi\,N\,J_\mathrm{s}\,|z|\,\hat{\boldsymbol{y}}. \tag{31}$$

همچنین، چنان که انتظار میرود کرل ِ این پتانسیل میدان ِ مغناطیسی یِ صفحه یِ جریان است:

$$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}) = 2\,\pi\,N\,J_\mathrm{s}\,\hat{\boldsymbol{x}}\,\mathrm{sgn}(z). \tag{32}$$

اینجا هم بر خلاف ِ ϕ_R و $\tilde{\phi}_R$ که پتانسیل ِ الکتریکی یِ یک قرص ِ باپایان اند، $\boldsymbol{A}_R$ یا $\tilde{\boldsymbol{A}}_R$ پتانسیل ِ برداری یِ یک قرص ِ باپایان نیستند، چون چنین-جریان ی یک چشمه یِ ایستا نیست و میدان ِ مغناطیسی یِ حاصل از آن از قانون ِ بیُ-سَوَر [2] به دست نمی‌آید.

3 سیملوله

یک سیملوله یِ آرمانی یِ بلند یک رویه یِ استوانه‌ای است که طول َش بیپایان است، مقطع َش (عمود بر محور ِ استوانه) یک خم ِ بسته است، و جریان ِ سطحی یِ $J_\mathrm{s}\,\hat{\boldsymbol{t}}$ از آن میگذرد. J_s ثابت است. $\hat{\boldsymbol{t}}$

یکه، مماس بر سطحِ استوانه، و عمود بر محورِ آن است. جهتِ محورِ استوانه($\hat{z}$) و جهتِ $\hat{\boldsymbol{t}}$ چنان انتخاب شده که $(\hat{\boldsymbol{t}}\times\hat{z})$ به سو یِ بیرونِ استوانه باشد. مکان را با $(\boldsymbol{\rho}, z)$ نمایش میدهیم، که $\boldsymbol{\rho}$ بردار ی دُبُعدی و عمود بر $\hat{z}$ است. $\boldsymbol{A}$ (پتانسیلِ برداری) میشود

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}) = N\,J_{\rm s}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}z'\oint_C\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\rho}'}{[(z-z')^2+|\boldsymbol{\rho}-\boldsymbol{\rho}'|^2]^{1/2}}. \tag{33}$$

C تصویرِ استوانه بر صفحه یِ $z=0$ است. طرفِ راستِ (33) واگرا مینماید، چون انتگرالده در z' ها یِ بزرگ مثلِ $(z')^{-1}$ رفتار میکند. در واقع انتگرال واگرا ست، اگر اول رو یِ z' انتگرال بگیریم. پتانسیلِ برداری یِ ناشی از سیملوله ای که ارتفاع َش باپایان است (مختصه یِ z از z_1 تا z_2 تغییر میکند)، را با $\boldsymbol{A}_{z_1,z_2}$ نمایش میدهیم. داریم

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{A}_{z_1,z_2}(\boldsymbol{r}) &= N\,J_{\rm s}\int_{z_1}^{z_2}\mathrm{d}z'\oint_C\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\rho}'}{[(z-z')^2+|\boldsymbol{\rho}-\boldsymbol{\rho}'|^2]^{1/2}},\\
&= N\,J_{\rm s}\oint_C\mathrm{d}\boldsymbol{\rho}'\left(\sinh^{-1}\frac{z_2-z}{|\boldsymbol{\rho}-\boldsymbol{\rho}'|}-\sinh^{-1}\frac{z_1-z}{|\boldsymbol{\rho}-\boldsymbol{\rho}'|}\right),\\
&= N\,J_{\rm s}\oint_C\mathrm{d}\boldsymbol{\rho}'\left\{\ln\left[\sqrt{\left(\frac{z_2-z}{|\boldsymbol{\rho}-\boldsymbol{\rho}'|}\right)^2+1}+\frac{z_2-z}{|\boldsymbol{\rho}-\boldsymbol{\rho}'|}\right]\right.\\
&\qquad\left.+\ln\left[\sqrt{\left(\frac{z_1-z}{|\boldsymbol{\rho}-\boldsymbol{\rho}'|}\right)^2+1}-\frac{z_1-z}{|\boldsymbol{\rho}-\boldsymbol{\rho}'|}\right]\right\},\\
&= N\,J_{\rm s}\oint_C\mathrm{d}\boldsymbol{\rho}'\left\{\ln\left[\sqrt{\left(\frac{z_2-z}{z_2}\right)^2+\left(\frac{|\boldsymbol{\rho}-\boldsymbol{\rho}'|}{z_2}\right)^2}+\frac{z_2-z}{|z_2|}\right]\right.\\
&\qquad\left.+\ln\left[\sqrt{\left(\frac{z_1-z}{z_1}\right)^2+\left(\frac{|\boldsymbol{\rho}-\boldsymbol{\rho}'|}{z_1}\right)^2}-\frac{z_1-z}{|z_1|}\right]\right\}\\
&\quad+N\,J_{\rm s}\oint_C\mathrm{d}\boldsymbol{\rho}'\left(\ln\frac{a^2}{|\boldsymbol{\rho}-\boldsymbol{\rho}'|^2}+\ln\frac{|z_1\,z_2|}{a^2}\right),\\
&= N\,J_{\rm s}\oint_C\mathrm{d}\boldsymbol{\rho}'\left\{\ln\left[\sqrt{\left(\frac{z_2-z}{z_2}\right)^2+\left(\frac{|\boldsymbol{\rho}-\boldsymbol{\rho}'|}{z_2}\right)^2}+\frac{z_2-z}{|z_2|}\right]\right.\\
&\qquad\left.+\ln\left[\sqrt{\left(\frac{z_1-z}{z_1}\right)^2+\left(\frac{|\boldsymbol{\rho}-\boldsymbol{\rho}'|}{z_1}\right)^2}-\frac{z_1-z}{|z_1|}\right]\right\}\\
&\quad+N\,J_{\rm s}\oint_C\mathrm{d}\boldsymbol{\rho}'\,\ln\frac{a^2}{|\boldsymbol{\rho}-\boldsymbol{\rho}'|^2},
\end{aligned}\tag{34}$$

که a یک ثابت است. $\boldsymbol{A}$ را حد ِ $\boldsymbol{A}_{z_1,z_2}$ در $(z_1,z_2)\to(-\infty,\infty)$ تعریف میکنیم. دیده میشود

$$\tilde{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{r})=N\,J_{\rm s}\,\oint_C \mathrm{d}\boldsymbol{\rho}'\;\ln\frac{4\,a^2}{|\boldsymbol{\rho}-\boldsymbol{\rho}'|^2}. \tag{35}$$

البته طرف ِ راست واقعَن به a بسته‌گی ندارد، چون انتگرال ِ یک مقدار ِ ثابت رو یِ یک خم ِ بسته صفر است. از (35) نتیجه میشود

$$\begin{aligned}\tilde{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{r})&=N\,J_{\rm s}\,\hat{\boldsymbol{z}}\times\int_S \mathrm{d}^2s'\;\nabla'\ln\frac{4\,a^2}{|\boldsymbol{\rho}-\boldsymbol{\rho}'|^2},\\&=-N\,J_{\rm s}\,\hat{\boldsymbol{z}}\times\nabla\int_S \mathrm{d}^2s'\;\ln\frac{4\,a^2}{|\boldsymbol{\rho}-\boldsymbol{\rho}'|^2},\end{aligned} \tag{36}$$

که S مقطع ِ ناحیه یِ درونی یِ سیملوله با صفحه یِ $z=0$ است. داریم

$$\tilde{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{r}):=-N\,J_{\rm s}\,\hat{\boldsymbol{z}}\times\nabla\psi, \tag{37}$$

که

$$\psi(\boldsymbol{r}):=\int_S \mathrm{d}^2s'\;\ln\frac{4\,a^2}{|\boldsymbol{\rho}-\boldsymbol{\rho}'|^2}. \tag{38}$$

دیده میشود ψ پتانسیل ِ الکتریکی یِ حاصل از یک چگالی‌یِ‌بار است که درون ِ سیملوله K^{-1} و بیرون ِ آن صفر است. از (37) نتیجه میشود

$$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}):=-\hat{\boldsymbol{z}}\,N\,J_{\rm s}\,\nabla^2\psi. \tag{39}$$

از این استفاده شده که مشتق ِ ψ نسبت به z صفر است. با استفاده از

$$\nabla^2\ln\frac{4\,a^2}{|\boldsymbol{\rho}-\boldsymbol{\rho}'|^2}=-4\,\pi\,\delta(\boldsymbol{\rho}-\boldsymbol{\rho}'), \tag{40}$$

(یا با توجه به بار ی که چشمه یِ ψ است)،

$$\nabla^2\psi(\boldsymbol{r})=-4\,\pi\,\mathrm{H}_{\mathbb{V}}(\boldsymbol{r}), \tag{41}$$

که $\mathbb{V}$ درون ِ سیملوله است و

$$\mathrm{H}_{\mathbb{V}}(\boldsymbol{r}):=\begin{cases}1, & \in\mathbb{V}\\[2ex] 0, & \boldsymbol{r}\notin\mathbb{V}\end{cases}. \tag{42}$$

به این ترتیب،

$$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}) = 4\,\pi\,N\,J_{\mathrm{s}}\,\hat{\boldsymbol{z}}\,\mathrm{H}_{\mathbb{V}}(\boldsymbol{r}), \tag{43}$$

یعنی میدان ِ مغناطیسی درون ِ سیملوله یکنواخت و برابر ِ $(4\,\pi\,N\,J_{\mathrm{s}}\,\hat{\boldsymbol{z}})$، و بیرون ِ سیملوله صفر است، چنان که انتظار میرود. از جمله، اگر مقطع ِ سیملوله دایره ای به شعاع ِ c باشد، که مرکز َش رو یِ محور ِ z است، ψ تابع ِ فقط ρ خاهد بود. به این ترتیب، از قانون ِ گاؤس [1] نتیجه میشود

$$(\nabla\psi)(\boldsymbol{r}) = -2\,\pi\,\hat{\boldsymbol{\rho}}\,\left\{\rho\,\mathrm{H}_{\mathbb{V}}(\boldsymbol{r}) + \frac{c^2}{\rho}\,[1-\mathrm{H}_{\mathbb{V}}(\boldsymbol{r})]\right\}, \tag{44}$$

که نتیجه میدهد

$$\tilde{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{r}) = 2\,\pi\,N\,J_{\mathrm{s}}\,\hat{\boldsymbol{\varphi}}\,\left\{\rho\,\mathrm{H}_{\mathbb{V}}(\boldsymbol{r}) + \frac{c^2}{\rho}\,[1-\mathrm{H}_{\mathbb{V}}(\boldsymbol{r})]\right\}, \tag{45}$$

و رُشن است که مستقیمَن از این هم (43) نتیجه میشود.

4 پانوشتها

[1] Gauss

[2] Biot-Savart