X1-087 (2012/10/29)

کابل ی که از زمین به بالا آویزان است

محمد خرمی

mamwad@mailaps.org

تعادل ِ کابل ی بررسی میشود که یک سر َش رو یِ زمین ثابت است، و سر ِ دیگر َش آزاد است، چنان که کابل همراه با زمین میگردد.

1 استاتیک ِ اجسام ِ ساکن نسبت به زمین

جسم ی که در نزدیکی یِ زمین آزادانه سقوط کند، نمیتواند نسبت به زمین ساکن بماند، چون در نزدیکی یِ زمین نیرو یِ گرانشی بزرگتر از نیرو یِ مرکزگریز ِ ناشی از چرخش ِ زمین است. در فاصله یِ خاص ی از مرکز ِ زمین، نیرو یِ گرانش با نیرو یِ مرکزگریز برابر میشود. این فاصله ($R_{\rm gs}$) هم ان شعاع ِ مدار ِ ماهواره‌ها یِ زمین-ثابت است:

$$g(R_{\rm gs}) = R_{\rm gs}\,\omega^2, \tag{1}$$

که $g(r)$ اندازه یِ شتاب ِ گرانشی یِ حاصل از زمین در فاصله یِ r از مرکز ِ زمین، و ω بسامد ِ زاویه‌ای یِ چرخش ِ زمین است. داریم

$$g(r) = \frac{g_0\,R^2}{r^2}, \tag{2}$$

که R شعاع ِ زمین و g_0 شتاب ِ گرانشی یِ حاصل از زمین در سطح ِ زمین است. به این ترتیب،

$$\omega^2 = \frac{g_0\,R^2}{R_{\rm gs}^3}. \tag{3}$$

فقط در صفحه یِ استوا و در فاصله یِ $R_{\rm gs}$ از مرکز ِ زمین است که یک جسم میتواند آزادانه سقوط کند و ضمنَن نسبت به زمین ثابت بماند. جسم ی که آزادانه سقوط میکند فقط نیرو یِ گرانش ِ ناشی از زمین را حس میکند. البته این فقط در چارچوبها یِ لخت است. در چارچوب ی که همراه ِ زمین میچرخد، جسم نیرو یِ مرکزگریز (و اگر نسبت به آن چارچوب ساکن نباشد نیرو یِ کُریُلی) را هم حس میکند.

جسم ی به جرم ِ m را در نظر بگیرید که در فاصله یِ r از مرکز ِ زمین و در عرض ِ جغرافیایی یِ α است، و نسبت به زمین ساکن است. بردار ِ یکه یِ شعاعی (نسبت به مرکز ِ زمین) را با $\hat{\boldsymbol{r}}$، فاصله تا محور ِ چرخش ِ زمین را با ρ، و بردار ِ یکه یِ شعاع ِ استوانه‌ای (نسبت به محور ِ چرخش ِ زمین) را با $\hat{\boldsymbol{\rho}}$ نشان میدهیم. رُشن است که

$$\rho = r\,\cos\alpha. \tag{4}$$

برا یِ این که جسم هم ان جا بماند، علاوه بر گرانش ِ زمین و نیرو یِ مرکزگریز، یک نیرو یِ $\boldsymbol{F}$ هم لازم است، چنان که

$$\begin{aligned}\boldsymbol{F} &= m\,[g(r)\,\hat{\boldsymbol{r}} - \omega^2\,\rho\,\hat{\boldsymbol{\rho}}],\\ &= \frac{m\,g_0\,R^2}{R_{\rm gs}^2}\,\left[\left(\frac{R_{\rm gs}}{r}\right)^2\,\hat{\boldsymbol{r}} - \left(\frac{\rho}{R_{\rm gs}}\right)\,\hat{\boldsymbol{\rho}}\right].\end{aligned} \tag{5}$$

پتانسیل ِ مئثر ِ ϕ را با

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{\nabla}\phi)(\boldsymbol{r}) &:= g(r)\,\hat{\boldsymbol{r}} - \omega^2\,\rho\,\hat{\boldsymbol{\rho}},\\ &= \frac{g_0\,R^2}{R_{\rm gs}^2}\,\left[\left(\frac{R_{\rm gs}}{r}\right)^2\,\hat{\boldsymbol{r}} - \left(\frac{\rho}{R_{\rm gs}}\right)\,\hat{\boldsymbol{\rho}}\right]\end{aligned} \tag{6}$$

تعریف میکنیم، که $\boldsymbol{r}$ بردار ِ مکان (نسبت به مرکز ِ زمین)، و $\boldsymbol{\nabla}X$ گرادیان ِ X است. به این ترتیب، شرط- ِ-تعادل ِ (5) میشود

$$\boldsymbol{F} = m\,\boldsymbol{\nabla}\phi. \tag{7}$$

با انتخاب ِ مناسب ِ ثابت ِ انتگرالگیری نتیجه میشود

$$\begin{aligned}\phi(\boldsymbol{r}) &= -\frac{g_0\,R^2}{r} - \frac{\omega^2\,\rho^2}{2},\\ &= -\frac{g_0\,R^2}{R_{\mathrm{gs}}}\,\left[\left(\frac{R_{\mathrm{gs}}}{r}\right) + \frac{1}{2}\,\left(\frac{\rho}{R_{\mathrm{gs}}}\right)^2\right].\end{aligned} \tag{8}$$

2 کابل ِ آویخته به بالا

کابل ی به چگالی-یِ-جرم ِ طولی یِ λ را در نظر بگیرید که از زمین به بالا آویزان است. پارامتر ِ طول- ِ-قُس را با s نشان میدهیم و نقطه یِ اتصال ِ کابل با زمین را $s=0$ میگیریم. این یعنی طول ِ بخش ی از کابل ِ که بین ِ نقطه ای با پارامتر ِ s و نقطه یِ اتصال به زمین است، s است. کشش ِ کابل را T نشان میدهیم. از نوشتن ِ شرط ِ تعادل برا یِ بخش ی از کابل که بین ِ پارامترها یِ s و $(s+\mathrm{d}s)$ است نتیجه میشود

$$\frac{\mathrm{d}(T\,\hat{\boldsymbol{\tau}})}{\mathrm{d}s} = \lambda\,\boldsymbol{\nabla}\phi, \tag{9}$$

که $\hat{\boldsymbol{\tau}}$ بردار ِ یکه یِ مماس بر کابل در جهت ِ دورشدن از نقطه یِ اتصال ِ کابل به زمین است. چون $\hat{\boldsymbol{\tau}}$ یکه است،

$$\frac{\mathrm{d}\hat{\boldsymbol{\tau}}}{\mathrm{d}s}\cdot\hat{\boldsymbol{\tau}} = 0. \tag{10}$$

از اینجا نتیجه میشود

$$\frac{\mathrm{d}(T\,\hat{\boldsymbol{\tau}})}{\mathrm{d}s}\cdot\hat{\boldsymbol{\tau}} = \frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}s}. \tag{11}$$

به این ترتیب،

$$\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}s} = \lambda\,(\boldsymbol{\nabla}\phi)\cdot\hat{\boldsymbol{\tau}}, \tag{12}$$

$$T\,\frac{\mathrm{d}\hat{\boldsymbol{\tau}}}{\mathrm{d}s} = \lambda\,[\boldsymbol{\nabla}\phi - \hat{\boldsymbol{\tau}}\,(\hat{\boldsymbol{\tau}}\cdot\boldsymbol{\nabla}\phi)]. \tag{13}$$

همراه با این معادلات، این شرطها یِ مرزی را داریم که کشش در سر ِ آزاد ِ کابل صفر است، و نقطه یِ اتصال ِ کابل با زمین ثابت است. مجهولها یِ این معادلات $\boldsymbol{r}(s)$ (جا یِ نقطه ای از کابل با پارامتر ِ s) و $T(s)$ اند.

طول ِ کابل را با ℓ نشان میدهیم. این که در سر ِ آزاد ِ کابل کشش صفر است، یعنی

$$T(\ell) = 0. \tag{14}$$

به این ترتیب، با انتگرالگیری از (12) نتیجه میشود

$$\begin{aligned} T(s) &= \int_{\ell}^{s} \mathrm{d}s'\ \lambda(s')\,\{(\boldsymbol{\nabla}\phi)[\boldsymbol{r}(s')]\}\cdot[\hat{\boldsymbol{\tau}}(s')], \\ &= \int_{\ell}^{s} \mathrm{d}s'\ \lambda(s')\,[\mathrm{D}(\phi\circ\boldsymbol{r})](s'), \end{aligned} \tag{15}$$

که $\mathrm{D}X$ مشتق ِ X است. برا یِ یک کابل ِ یکنواخت

$$T(s) = \lambda\{\phi[\boldsymbol{r}(s)] - \phi[\boldsymbol{r}(\ell)]\}. \tag{16}$$

کشش ِ کابل در هر نقطه ای نامنفی است:

$$\int_{s}^{\ell} \mathrm{d}s'\ \lambda(s')\,[\mathrm{D}(\phi\circ\boldsymbol{r})](s') \le 0, \tag{17}$$

و برا یِ کابل ِ یکنواخت،

$$\phi[\boldsymbol{r}(s)] \ge \phi[\boldsymbol{r}(\ell)]. \tag{18}$$

از جمله،

$$\int_{0}^{\ell} \mathrm{d}s\ \lambda(s)\,[\mathrm{D}(\phi\circ\boldsymbol{r})](s) \le 0, \tag{19}$$

و برا یِ کابل ِ یکنواخت،

$$\phi[\boldsymbol{r}(0)] \ge \phi[\boldsymbol{r}(\ell)], \tag{20}$$

که میشود

$$\left[\frac{R_{\mathrm{gs}}}{r(\ell)}\right] + \frac{1}{2}\,\left[\frac{\rho(\ell)}{R_{\mathrm{gs}}}\right]^2 \ge \left(\frac{R_{\mathrm{gs}}}{R}\right) + \frac{1}{2}\,\left(\frac{R\,\cos\alpha_0}{R_{\mathrm{gs}}}\right)^2, \tag{21}$$

که α_0 عرض ِ جغرافیایی یِ نقطه یِ اتصال ِ کابل با زمین است.

3 کابل ی که در استوا شعاعی به بالا آویزان است

وقت ی کابل در راستا یِ شعاع ی با عرض ِ جغرافیایی یِ صفر است، $\hat{\boldsymbol{\tau}}(s)$ هم ان $\hat{\boldsymbol{r}}$ است، که البته ثابت و در صفحه یِ استوا ست. همچنین،

$$\begin{aligned}\boldsymbol{r}(s) &= \hat{\boldsymbol{r}}\, r(s),\\ r(s) &= R + s,\\ (\boldsymbol{\nabla}\phi)[\boldsymbol{r}(s)] &= [\hat{\boldsymbol{\tau}}(s)]\,\{[\hat{\boldsymbol{r}}(s)]\cdot(\boldsymbol{\nabla}\phi)[\boldsymbol{r}(s)]\}.\end{aligned} \tag{22}$$

به این ترتیب (13) اتحاد میشود. همچنین، با تعریف ِ

$$\psi(r) := \phi(r, \alpha = 0), \tag{23}$$

دیده میشود

$$\begin{aligned}\phi[\boldsymbol{r}(s)] &= -\frac{g_0\, R^2}{R_{\rm gs}}\,\left\{\left[\frac{R_{\rm gs}}{r(s)}\right] + \frac{1}{2}\,\left[\frac{r(s)}{R_{\rm gs}}\right]^2\right\},\\ &= \psi(R+s),\end{aligned} \tag{24}$$

$$\begin{aligned}\{(\boldsymbol{\nabla}\phi)[\boldsymbol{r}(s)]\}\cdot[\hat{\boldsymbol{\tau}}(s)] &= \frac{g_0\, R^2}{R_{\rm gs}^2}\,\left\{\left[\frac{R_{\rm gs}}{r(s)}\right]^2 - \left[\frac{r(s)}{R_{\rm gs}}\right]\right\},\\ &= ({\rm D}\psi)(R+s).\end{aligned} \tag{25}$$

از (25) دیده میشود طرف ِ راست ِ (12) در $r(s)$ کوچکتر از $R_{\rm gs}$ مثبت، و در $r(s)$ بزرگتر از $R_{\rm gs}$ منفی است. پس بیشینه یِ T در $r(s) = R_{\rm gs}$ رخ میدهد. کمینهها یِ T هم در دُسر ِ کابل رخ میدهند. در سر ِ آزاد ِ کابل کشش صفر است. پس شرط ِ لازم و کافی برا یِ این که کشش هیچ جا منفی نشود این است که

$$T(0) \geq 0. \tag{26}$$

از این که بیشینه یِ T در $r(s) = R_{\rm gs}$ رخ میدهد معلوم میشود سر ِ آزاد ِ کابل، نسبت به مرکز ِ زمین دورتر از ماهوارهها یِ زمین-ثابت است. در واقع برا یِ این که کشش ِ کابل جا یی (جز احتمالَن نقطه یِ اتصال ِ کابل با زمین) صفر شود باید طول ِ کابل دست-ِکم $\ell_{\rm min}$ باشد، که

$$R + \ell_{\rm min} \geq R_{\rm gs}. \tag{27}$$

(26) هم‌ارز است با

$$\int_0^{\ell} \mathrm{d}s\; \lambda(s)\,(\mathrm{D}\psi)(R+s) \le 0, \tag{28}$$

و برا یِ کابل ِ یکنواخت،

$$\psi(R) \ge \psi(R+\ell). \tag{29}$$

این یعنی

$$\frac{R_{\rm gs}}{R+\ell} + \frac{1}{2}\left(\frac{R+\ell}{R_{\rm gs}}\right)^2 \ge \frac{R_{\rm gs}}{R} + \frac{1}{2}\left(\frac{R}{R_{\rm gs}}\right)^2, \tag{30}$$

یا،

$$\frac{(R+\ell)\,(2\,R+\ell)\,R}{R_{\rm gs}^3} \ge 2, \tag{31}$$

که هم‌ارز است با

$$\ell \ge \ell_{\rm mim}, \tag{32}$$

که

$$\frac{\ell_{\rm mim}}{R} = -\frac{3}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{1+8\left(\frac{R_{\rm gs}}{R}\right)^3}. \tag{33}$$

از این که

$$R_{\rm gs} \ge R, \tag{34}$$

رابطه یِ (27) برا یِ حالت ِ خاص ِ کابل ِ یکنواخت نتیجه میشود. برا یِ اثبات، کافی است توجه کنیم

$$(u \ge 1) \quad \Rightarrow \quad 1 + 8\,u^3 \ge (1+2\,u)^2. \tag{35}$$

برا یِ $T_{\max}$ (بیشینه یِ کشش ِ کابل) داریم

$$\begin{aligned} T_{\max} &= \int_{\ell}^{R_{\rm gs}-R} \mathrm{d}s\; \lambda(s)\,(\mathrm{D}\psi)(R+s), \\ &= T(0) + \int_0^{R_{\rm gs}-R} \mathrm{d}s\; \lambda(s)\,(\mathrm{D}\psi)(R+s), \\ &= T(0) + \int_R^{R_{\rm gs}} \mathrm{d}s\; \lambda(r-R)\,(\mathrm{D}\psi)(r), \\ &\ge \int_0^{R_{\rm gs}-R} \mathrm{d}s\; \lambda(s)\,(\mathrm{D}\psi)(R+s). \end{aligned} \tag{36}$$

از جمله برا ی ِ یک کابل ِ یکنواخت،

$$T_{\max} = T_0 + \left[\left(\frac{R}{R_{\rm gs}}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{R}{R_{\rm gs}}\right)^2 - \frac{1}{2}\left(\frac{R}{R_{\rm gs}}\right)^3\right](M\,g_0), \qquad (37)$$

که

$$M = (R_{\rm gs} - R)\,\lambda. \qquad (38)$$

$(M\,g_0)$ وزن ِ بخش ی از کابل (در سطح ِ زمین) است که بین ِ زمین و مدار ِ زمین-ثابت است. تنش ِ طولی ی ِ کابل کشش ِ کابل تقسیم بر مساحت ِ مقطع ِ کابل است. تنش ِ طولی را با $\mathcal{T}$ نشان میدهیم. دیده میشود

$$\mathcal{T}_{\max} \geq \mathcal{T}_{\rm m}, \qquad (39)$$

که

$$\mathcal{T}_{\rm m} = \left[\left(\frac{R}{R_{\rm gs}}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{R}{R_{\rm gs}}\right)^2 - \frac{1}{2}\left(\frac{R}{R_{\rm gs}}\right)^3\right](R_{\rm gs} - R)\,\varrho\,g_0, \qquad (40)$$

که ϱ چگالی ی ِ کابل است.

4 مقدارها ی ِ عددی

$$\begin{aligned} g_0 &= 9.8\,\mathrm{m\,s^{-1}}, \\ R &= 6.4\times 10^6\,\mathrm{m}, \\ \omega &= 7.3\times 10^{-5}\,\mathrm{s^{-1}}, \\ R_{\rm gs} &= 4.2\times 10^7\,\mathrm{m}. \end{aligned} \qquad (41)$$

که نتیجه میدهد

$$\ell_{\min} = 1.4\times 10^8\,\mathrm{m}, \qquad (42)$$

$$\mathcal{T}_{\rm m} = 4.4\times 10^{10}\,\mathrm{Pa}\,\frac{\varrho}{10^3\,\mathrm{kg\,m^{-3}}}. \qquad (43)$$

برا یِ این که کابل بتواند چنین تنش ی را تحمل کند، باید مقدار ِ B_{t} (تنش ِ برشی یِ قابل- ِ-تحمل) برا یِ کابل از $\mathcal{T}_{\mathrm{m}}$ بیشتر باشد. مقدار ِ $[10^3\,\mathrm{kg\,m^{-3}}\,B_{\mathrm{t}}\,\varrho^{-1}]$ را با $\mathfrak{B}_{\mathrm{t}}$ نشان میدهیم. پس شرط ِ لازم برا یِ این که بشود کابل ِ یکنواخت ی را از استوا به بالا آویخت، این است

$$\mathfrak{B}_{\mathrm{t}} \geq 4.4 \times 10^{10}\,\mathrm{Pa}. \tag{44}$$

مقدار ِ $\mathfrak{B}_{\mathrm{t}}$، برا یِ انواع ِ معمولی یِ فولاد از $10^7\,\mathrm{Pa}$ کمتر است و برا یِ فولادها یِ ویژه دست- ِ-بالا به $10^8\,\mathrm{Pa}$ نزدیک میشود. این مقدار برا یِ تار ِ عنکبوت از مرتبه یِ $10^9\,\mathrm{Pa}$ است. برا یِ گرافِن و نانُلولهها یِ کربنی، $\mathfrak{B}_{\mathrm{t}}$ تا $10^{11}\,\mathrm{Pa}$ هم میرسد [1].

5 پانوشتها

[1] http://en.wikipedia.org/wiki/Tensile_strength