X1-091 (2013/04/25)

ذره یِ نسبیتی در میدانها یِ خارجی

محمد خرمی

mamwad@mailaps.org

لَگرانژی و معادله‌یِ‌حرکت ِ یک ذره یِ نسبیتی بررسی میشود که نیرو یِ وارد بر آن ناشی از میدانها یِ تانسُری است.

0 قراردادها

قراردادها هم ان اند که در [1] به کار رفته. منظور از جرم جرم ِ سکون است،

$$r^0 := t, \tag{1}$$

و

$$\eta_{\mu\,\nu} = \begin{cases} -c^2, & \mu = \nu = 0 \\ 1, & \mu = \nu \neq 0 \\ 0, & \mu \neq \nu \end{cases}, \tag{2}$$

که r^μ ها مئلفه‌ها یِ چاربردار ِ مکان اند، و t زمان و η متریک (ِ مینکُفسکی [2]) است. بردارها یِ سه‌مئلفه‌ای (با مئلفه‌ها یِ فضایی) را با حروف ِ سیاه، و ویژه‌زمان را با τ نمایش میدهیم. شاخصها یی

که مقدارها یِ فضازمانی (از 0 تا 3) را میگیرند را با حروف ِ یونانی و شاخصها یی که فقط مقدارها یِ فضایی (از 1 تا 3) را میگیرند را با حروف ِ لاتین نمایش میدهیم. سرعت (مشتق ِ مکان نسبت به زمان) را با $\boldsymbol{v}$ نشان میدهیم:

$$\boldsymbol{v} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}. \tag{3}$$

چاربردار ِ سرعت (مشتق ِ چاربردار ِ مکان نسبت به ویژه‌زمان) را با u نشان میدهیم:

$$u := \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\tau}, \tag{4}$$

که از آن نتیجه میشود

$$u = \gamma\, v, \tag{5}$$

که γ ضریب ِ لُرِنتس [3] است:

$$\begin{aligned} \gamma :=& \left(1 - \frac{\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{v}}{c^2}\right)^{-1/2}, \\ =& \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\tau}, \end{aligned} \tag{6}$$

و

$$\begin{aligned} v^0 :=& \frac{\mathrm{d}r^0}{\mathrm{d}t}, \\ =& 1. \end{aligned} \tag{7}$$

رُشن است که

$$u\cdot u = -c^2. \tag{8}$$

رابطه یِ E (انرژی) با تکانه

$$E = c^2\, p^0 \tag{9}$$

است.

معادلات ِ حرکت را میشود به شکل ِ زمانی نوشت، که رابطه یِ مختصات ِ فضایی با زمان را میدهند؛ یا به شکل ِ پارامتری، که رابطه یِ مختصات ِ فضازمانی با یک پارامتر (مثلَن ویژه‌زمان) را میدهند. شکل ِ صریحَن-هموردا یِ معادلات ِ حرکت از این گونه است. در این شکل، معادلات باید

با (8) سازگار باشد، یعنی (8) اگر در یک زمان برقرار باشد، در اثر ِ تحول ی که با معادلات ِ حرکت داده میشود هم همچنان برقرار بماند.

برا یِ سیستم ی شامل ِ یک ذره 2 لَگرانژی (یا کنش) به کار میبریم. در شکل ِ اول (زمانی) زمان پارامتر ِ تحول است و لَگرانژی تابع ِ $(t, \boldsymbol{r}, \boldsymbol{v})$ (زمان، سه‌بردار ِ مکان، و سه‌بردار ِ سرعت) است. لَگرانژی و کنش در این شکل را با به ترتیب L و S نشان میدهیم. در شکل ِ دوم (پارامتری) زمان هم یک متغیر ِ دینامیکی است. ویژه‌زمان (یا یک پارامترآفین ِ دیگر ِ مسیر) را پارامتر ِ تحول میگیریم و لَگرانژی و کنش ِ متناظر را با به ترتیب L_{s} و S_{s} نمایش میدهیم. L_{s} تابع ِ (r, u) (چاربردارها یِ مکان و سرعت) است، و در آن مئلفه‌ها یِ چاربردار ِ سرعت مستقل از هم فرض میشوند. یعنی (8) اعمال نمیشود، بل که انتظار میرود اگر با شرط ِ اولیه برقرار باشد با تحول هم برقرار بمانَد.

داریم

$$S = \int \mathrm{d}t\; L, \tag{10}$$

$$S_{\mathrm{s}} = \int \mathrm{d}\tau\; L_{\mathrm{s}}. \tag{11}$$

تعریف میکنیم

$$\begin{aligned}\mathcal{E}_i &:= \left(\frac{\delta S}{\delta r^i}\right)_{\mathrm{in}},\\ &= \frac{\partial L}{\partial r^i} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial v^i}\right),\end{aligned} \tag{12}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{E}_{\mathrm{s}\,\alpha} &:= \left(\frac{\delta S_{\mathrm{s}}}{\delta r^\alpha}\right)_{\mathrm{in}},\\ &= \frac{\partial L_{\mathrm{s}}}{\partial r^\alpha} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\left(\frac{\partial L_{\mathrm{s}}}{\partial u^\alpha}\right),\end{aligned} \tag{13}$$

که شاخص ِ in یعنی وردش بدون ِ درنظرگرفتن ِ جمله‌ها یِ مرزی.

1 لَگرانژی و اسکالریده یِ آن

برا یِ ذره یِ آزاد ی به جرم ِ m، لَگرانژی (L^{f}) چنین است.

$$L^{\mathrm{f}} = -m\, c^2\, \gamma^{-1}. \tag{14}$$

از اینجا $\mathfrak{m}$ را چنین تعریف میکنیم.

$$L =: -\mathfrak{m}\, c^2\, \gamma^{-1}. \tag{15}$$

به $\mathfrak{m}$ جرم ِ مئثر میگوییم. برا یِ یک ذره یِ بدون ِساختار، لَگرانژی و جرم ِ مئثر تابع ِ فضازمان و چاربردار ِ سرعت اند. بسته‌گی یِ لَگرانژی و جرم ِ مئثر به فضازمان را از طریق ِ میدانها یِ خارجی میگیریم. میدانها یِ خارجی را با T نشان میدهیم. جرم ِ مئثر را چنان میگیریم که

$$\mathfrak{m}[u', T'(r')] = \mathfrak{m}[u, T(r)], \tag{16}$$

که متغیرها یِ پریمدار تبدیل‌-یافته یِ متغیرها یِ بدون پریم تحت ِ تبدیلها یِ پوُئَنکَره [4] اند. (16) پوُئَنکَره‌-هموردایی یِ کنش (یا اسکالربودن ِ جرم ِ مئثر) است.

جرم ِ مئثر (اگر نسبت به چاربردار ِ سرعت بسط ِ تِیلِر [5] داشته باشد) میشود

$$\mathfrak{m} = \sum_k \frac{1}{k!}\, \mathfrak{m}^{(k)}_{\alpha_1\cdots\alpha_k}\, u^{\alpha_1}\cdots u^{\alpha_k}, \tag{17}$$

که $\mathfrak{m}^{(k)}$ متقارن و مستقل از سرعت است. $\mathfrak{m}^{(k)}$ ها هم ان میدانها یِ خارجی یِ T (یا تابع ِ آنها) یند.

1.1 شکل ِ زمانی

بسته‌گی یِ لَگرانژی به سرعت از طریق ِ ضریب ِ لُرِنتس [3] در (15)، و از طریق ِ بسته‌گی یِ جرم ِ مئثر به چاربردار ِ سرعت است. داریم

$$\frac{\partial\gamma}{\partial v^i} = c^{-2}\,\gamma^3\, v_i, \tag{18}$$

که نتیجه میدهد

$$\begin{aligned}\frac{\partial\gamma^{-1}}{\partial v^i} &= -c^{-2}\,\gamma\, v_i,\\ &= -c^{-2}\, u_i, \end{aligned} \tag{19}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial u^\alpha}{\partial v^i} &= \gamma\,(\delta^\alpha_i + c^{-2}\,\gamma^2\; v^\alpha\, v_i),\\ &= \gamma\,(\delta^\alpha_i + c^{-2}\, u^\alpha\, u_i). \end{aligned} \tag{20}$$

دیده میشود

$$
\begin{aligned}
-\frac{\partial u^\alpha}{\partial v^i}\, v^i &= -\delta^\alpha_i\, u^i - c^{-2}\, u^\alpha\, u_i\, u^i,\\
&= \delta^\alpha_0\, u^0 - u^\alpha + c^{-2}\, u^\alpha\, u_0\, u^0 - c^{-2}\, u^\alpha\,(u\cdot u),\\
&= \gamma\,(\delta^\alpha_0 + c^{-2}\, u^\alpha\, u_0).
\end{aligned}
\tag{21}
$$

تعریف میکنیم

$$
\mathfrak{h}^\alpha_\beta := \eta^\alpha_\beta + c^{-2}\, u^\alpha\, u_\beta,
\tag{22}
$$

و نتیجه میشود

$$
\frac{\partial u^\alpha}{\partial v^i} = \gamma\, \mathfrak{h}^\alpha_i,
\tag{23}
$$

$$
-\frac{\partial u^\alpha}{\partial v^i}\, v^i = \gamma\, \mathfrak{h}^\alpha_0.
\tag{24}
$$

دیده میشود $\mathfrak{h}$ افکنش بر فضا یِ عمود بر u است، یعنی اثر َش بر هر بردار ِ عمود بر u همانی، و بر u صفر است.

به این ترتیب،

$$
\begin{aligned}
p_i &= -c^2\, \frac{\partial(\mathfrak{m}\,\gamma^{-1})}{\partial v^i},\\
&= \mathfrak{m}\, u_i - c^2\, \mathfrak{h}^\alpha_i\, \frac{\partial \mathfrak{m}}{\partial u^\alpha}.
\end{aligned}
\tag{25}
$$

همچنین،

$$
\begin{aligned}
p_0 &= L - p_i\, v^i,\\
&= \gamma^{-1}\,(-\mathfrak{m}\, c^2 - p_i\, u^i),\\
&= \gamma^{-1}\left(-\mathfrak{m}\, c^2 - \mathfrak{m}\, u_i\, u^i + c^{-2}\, \mathfrak{h}^\alpha_i\, \frac{\partial \mathfrak{m}}{\partial u^\alpha}\, u^i\right),\\
&= \gamma^{-1}\left(\mathfrak{m}\, u_0\, u^0 - c^{-2}\, \mathfrak{h}^\alpha_0\, \frac{\partial \mathfrak{m}}{\partial u^\alpha}\, u^0\right),\\
&= \mathfrak{m}\, u_0 - c^{-2}\, \mathfrak{h}^\alpha_0\, \frac{\partial \mathfrak{m}}{\partial u^\alpha}.
\end{aligned}
\tag{26}
$$

ترکیب ِ (25) و (26) میشود
$$p_\alpha = \mathfrak{m}\, u_\alpha - c^2\, \mathfrak{h}_\alpha^\beta\, \frac{\partial \mathfrak{m}}{\partial u^\beta}. \tag{27}$$
از جمله دیده میشود
$$p_\alpha\, u^\alpha = -\mathfrak{m}\, c^2. \tag{28}$$
برا یِ معادله یِ حرکت هم داریم
$$\mathcal{E}_i = \frac{\partial L}{\partial r^i} - \frac{\mathrm{d}p_i}{\mathrm{d}t}. \tag{29}$$
از این نتیجه میشود
$$\begin{aligned} -v^i\, \mathcal{E}_i &= -v^i\, \frac{\partial L}{\partial r^i} - \frac{\mathrm{d}v^i}{\mathrm{d}t}\, p_i + \frac{\mathrm{d}(v^i\, p_i)}{\mathrm{d}t}, \\ &= -\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}t} + \frac{\partial L}{\partial t} - \frac{\mathrm{d}p_0}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}(v^\alpha\, p_\alpha)}{\mathrm{d}t}, \\ &= \frac{\partial L}{\partial t} - \frac{\mathrm{d}p_0}{\mathrm{d}t}, \end{aligned} \tag{30}$$
که در تساوی یِ آخر (28) به کار رفته. به این ترتیب با افزودن ِ $\mathcal{E}_0$ با
$$v^\alpha\, \mathcal{E}_\alpha = 0, \tag{31}$$
برا یِ معادله یِ حرکت میشود این شکل را نوشت.
$$\gamma\, \mathcal{E}_\alpha = \frac{\partial(-\mathfrak{m}\, c^2)}{\partial r^\alpha} - \frac{\mathrm{d}p_\alpha}{\mathrm{d}\tau}. \tag{32}$$
تعداد ِ معادلات ِ حرکت یک ی بیشتر شده. اما تعداد ِ معادلات ِ مستقل عوض نشده: معادله یِ صفرُم یک ترکیب ِ خطی از معادلات ِ قبلی است. در واقع
$$\mathcal{E}_0 = \frac{\partial L}{\partial t} + \frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}t}, \tag{33}$$
که H همیلتنی است. معادله یِ صفرُم این است که مشتق ِ زمانی یِ کامل ِ همیلتنی به اضافه یِ مشتق ِ زمانی یِ پاره‌ای یِ لَگرانژی صفر است، و البته این از معادله‌ها یِ حرکت نتیجه میشود ([6]، مثلَن).

1.2 شکل ِ پارامتری

دنبال ِ L_s یم، چنان که
$$\frac{\partial L_\mathrm{s}}{\partial r_\alpha} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\left(\frac{\partial L_\mathrm{s}}{\partial u^\alpha}\right) \stackrel{\mathrm{s}}{=} \gamma\, \mathcal{E}_\alpha. \tag{34}$$

$\overset{\mathrm{s}}{=}$ یعنی تساوی وقت ی برقرار است که (8) برقرار باشد. یک راه ِ براوردن ِ (34) این است.

$$L_{\mathrm{s}} \overset{\mathrm{s}}{=} -\mathfrak{m}\, c^2, \tag{35}$$

$$\frac{\partial L_{\mathrm{s}}}{\partial u^\alpha} \overset{\mathrm{s}}{=} p_\alpha. \tag{36}$$

یک نهاده برا یِ L_{s} این است.

$$L_{\mathrm{s}} = a\,\mathfrak{m} + b\,u^\beta\,\frac{\partial \mathfrak{m}}{\partial u^\beta}, \tag{37}$$

که a و b تابعها یی از u اند، در واقع تابعها یی از $(u\cdot u)$ اند، که از $\mathfrak{m}$ مستقل اند. از (35) دیده میشود

$$a \overset{\mathrm{s}}{=} -c^2, \tag{38}$$

$$b \overset{\mathrm{s}}{=} 0. \tag{39}$$

از (36) هم نتیجه میشود

$$\frac{\partial a}{\partial u^\alpha}\,\mathfrak{m} + a\,\frac{\partial \mathfrak{m}}{\partial u^\alpha} + \frac{\partial b}{\partial u^\alpha}\,u^\beta\,\frac{\partial \mathfrak{m}}{\partial u^\beta} + b\,\frac{\partial}{\partial u^\alpha}\left(u^\beta\,\frac{\partial \mathfrak{m}}{\partial u^\beta}\right) \overset{\mathrm{s}}{=} \mathfrak{m}\,u_\alpha - c^2\,\frac{\partial \mathfrak{m}}{\partial u^\alpha} - u_\alpha\,u^\beta\,\frac{\partial \mathfrak{m}}{\partial u^\beta}, \tag{40}$$

که با استفاده از (38) و (39) نتیجه میدهد

$$\frac{\partial a}{\partial u^\alpha} \overset{\mathrm{s}}{=} u_\alpha, \tag{41}$$

$$\frac{\partial b}{\partial u^\alpha} \overset{\mathrm{s}}{=} -u_\alpha. \tag{42}$$

تا جا یی که به معادلات ِ حرکت مربوط میشود، از a و b فقط خُد ِشان و مشتق ِشان وقت ی (8) برقرار است لازم اند. انتخاب ِ ساده ای که (38) و (39) و (41) و (42) را بر میآورَد این است.

$$a = -\frac{1}{2}\,(1 - c^{-2}\,u\cdot u)\,c^2, \tag{43}$$

$$b = -\frac{1}{2}\,(1 + c^{-2}\,u\cdot u)\,c^2. \tag{44}$$

از اینجا،

$$\begin{aligned} L_{\mathrm{s}} &= -\left[\frac{1}{2}\,(1 - c^{-2}\,u\cdot u)\,\mathfrak{m} + \frac{1}{2}\,(1 + c^{-2}\,u\cdot u)\,u^\beta\,\frac{\partial \mathfrak{m}}{\partial u^\beta}\right]\,c^2,\\ &= -\mathfrak{m}\,c^2 + b\,\mathfrak{n}, \end{aligned} \tag{45}$$

که

$$\mathfrak{n} := u^\alpha\,\frac{\partial \mathfrak{m}}{\partial u^\alpha} - \mathfrak{m}. \qquad (46)$$

به ساده‌گی دیده میشود (چنان که انتظار میرود) که معادلاتِ حرکتِ $L_{\rm s}$ شرطِ (8) را حفظ میکنند. به این معنی که (8) اگر زمان ی برقرار باشد، طیِ تحولِ حاصل از معادلات ی که با $L_{\rm s}$ به دست می‌آیند هم برقرار میمانَد. برا یِ اثبات، توجه میکنیم که معادلاتِ حرکتِ حاصل از $L_{\rm s}$ این اند که $\mathcal{E}_{{\rm s}\,\alpha}$ صفر است، که

$$\mathcal{E}_{{\rm s}\,\alpha} = -c^2\,\mathsf{O}_\alpha\,\mathfrak{m} + b\,\mathsf{O}_\alpha\,\mathfrak{n} - \frac{{\rm d}b}{{\rm d}\tau}\,\frac{\partial \mathfrak{n}}{\partial u^\alpha} - \left[\frac{\rm d}{{\rm d}\tau}\left(\frac{\partial b}{\partial u^\alpha}\right)\right]\mathfrak{n} - \frac{\partial b}{\partial u^\alpha}\,\frac{{\rm d}\mathfrak{n}}{{\rm d}\tau}, \qquad (47)$$

که

$$\mathsf{O}_\alpha\,\mathcal{Q} := \frac{\partial \mathcal{Q}}{\partial r^\alpha} - \frac{\rm d}{{\rm d}\tau}\left(\frac{\partial \mathcal{Q}}{\partial u^\alpha}\right). \qquad (48)$$

به این ترتیب، با استفاده از

$$u^\alpha\,\frac{\partial b}{\partial u^\alpha} = 2\,b + c^2, \qquad (49)$$

$$u^\alpha\,\frac{\rm d}{{\rm d}\tau}\left(\frac{\partial b}{\partial u^\alpha}\right) = \frac{{\rm d}b}{{\rm d}\tau}, \qquad (50)$$

نتیجه میشود

$$\begin{aligned} u^\alpha\,\mathcal{E}_{{\rm s}\,\alpha} &= -c^2\,u^\alpha\,\mathsf{O}_\alpha\,\mathfrak{m} + b\,u^\alpha\,\mathsf{O}_\alpha\,\mathfrak{n} - \frac{{\rm d}b}{{\rm d}\tau}\,u^\alpha\,\frac{\partial \mathfrak{n}}{\partial u^\alpha} - \frac{{\rm d}b}{{\rm d}\tau}\,\mathfrak{n} - (2\,b + c^2)\,\frac{{\rm d}\mathfrak{n}}{{\rm d}\tau}, \\ &= b\,\left(u^\alpha\,\mathsf{O}_\alpha\,\mathfrak{n} - 2\,\frac{{\rm d}\mathfrak{n}}{{\rm d}\tau}\right) - \frac{{\rm d}b}{{\rm d}\tau}\,\left(u^\alpha\,\frac{\partial \mathfrak{n}}{\partial u^\alpha} + \mathfrak{n}\right) \\ &\quad - c^2\left(u^\alpha\,\mathsf{O}_\alpha\,\mathfrak{m} + \frac{{\rm d}\mathfrak{n}}{{\rm d}\tau}\right). \end{aligned} \qquad (51)$$

همچنین،

$$\begin{aligned} \frac{{\rm d}\mathfrak{n}}{{\rm d}\tau} &= u^\alpha\,\frac{\rm d}{{\rm d}\tau}\,\left(\frac{\partial \mathfrak{m}}{\partial u^\alpha}\right) - u^\alpha\,\frac{\partial \mathfrak{m}}{\partial r^\alpha}, \\ &= -u^\alpha\,\mathsf{O}_\alpha\,\mathfrak{m}. \end{aligned} \qquad (52)$$

به این ترتیب،

$$\left(u^\alpha\,\frac{\partial \mathfrak{n}}{\partial u^\alpha} + \mathfrak{n}\right)\,\frac{{\rm d}b}{{\rm d}\tau} = \left(u^\alpha\,\mathsf{O}_\alpha\,\mathfrak{n} - 2\,\frac{{\rm d}\mathfrak{n}}{{\rm d}\tau}\right)\,b - u^\alpha\,\mathcal{E}_{{\rm s}\,\alpha}, \qquad (53)$$

که نشان میدهد وقت ی معادلاتِ حرکت برقرار اند، b اگر صفر باشد صفر میمانَد.

2 مثالها

معلوم شد لَگرانژی، تکانه، و معادلات ِ حرکت، همه با جرم ِ مئثر ($\mathfrak{m}$) مشخص میشوند، که از طریق ِ (15) به شکل ِ زمانی ی ِلَگرانژی مربوط است. در مثالها ی زیر، تکانه و معادلات ِ حرکت با اعمال ِ قید ِ (8) محاسبه میشوند.

2.1 ذره ی ِآزاد

برا ی ِ ذره ی آزاد،

$$\mathfrak{m} = m. \tag{54}$$

به این ترتیب،

$$\mathfrak{n} = -m, \tag{55}$$

و از آنجا،

$$L_{\mathrm{s}} = \frac{1}{2}\, m\, u\cdot u - \frac{1}{2}\, m\, c^2. \tag{56}$$

البته جمله ی ِ دوم ِ L_{s}، در معادلات ِ حرکت و نیز در شکل ِ تکانه وارد نمیشود. معمولَن هم آن را از لَگرانژی حذف میکنند. تکانه میشود

$$p_\alpha = m\, u_\alpha, \tag{57}$$

و برا ی ِ معادله ی ِ حرکت داریم

$$\mathcal{E}_{\mathrm{s}\,\alpha} = -\frac{\mathrm{d}p_\alpha}{\mathrm{d}\tau}. \tag{58}$$

2.2 ذره در پتانسیل ِ اسکالر

برا ی ِ ذره ای که در یک پتانسیل ِ اسکالر حرکت میکند، جرم ِ مئثر مستقل از چارسرعت است. میشود مثل ِ [1] نوشت.

$$\mathfrak{m} = m + c^{-2}\, V, \tag{59}$$

که V یک میدان ِ اسکالر است. این یعنی جرم ِ مئثر در (17) شامل ِ فقط $\mathfrak{m}^{(0)}$ است. البته رُشن است که جمله ی ِ ثابت ِ m را هم میشود در V جذب کرد. در واقع ذره ی ِآزاد حالت ِ خاص ی از این مثال

است، که در آن V ثابت است. دیده میشود

$$\mathfrak{n} = -\mathfrak{m}, \tag{60}$$

$$L_{\rm s} = \frac{1}{2}\,\mathfrak{m}\,u\cdot u - \frac{1}{2}\,\mathfrak{m}\,c^2. \tag{61}$$

اینجا دیگر نمیشود جمله یِ دوم ِ لگرانژی را حذف کرد، اما همچنان میشود یک جمله یِ $(-m\,c^2/2)$ را از آن حذف کرد. برا یِ تکانه و معادلات ِ حرکت داریم

$$p_\alpha = \mathfrak{m}\,u_\alpha, \tag{62}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{E}_{{\rm s}\,\alpha} &= -c^2\,\frac{\partial \mathfrak{m}}{\partial r^\alpha} - \frac{{\rm d}p_\alpha}{{\rm d}\tau},\\ &= -c^2\,\mathfrak{h}^\beta_\alpha\,\frac{\partial \mathfrak{m}}{\partial r^\beta} - \mathfrak{m}\,\frac{{\rm d}u_\alpha}{{\rm d}\tau}.\end{aligned} \tag{63}$$

2.3 ذره در پتانسیل ِ برداری

در این حالت جرم ِمئثر در (17) شامل ِ جملهها یِ $\mathfrak{m}^{(0)}$ و $\mathfrak{m}^{(1)}$ است:

$$\begin{aligned}\mathfrak{m} &= \mathfrak{m}^{(0)} + \mathfrak{m}^{(1)}\,\cdot u,\\ &=: m - c^{-2}\,U\cdot u.\end{aligned} \tag{64}$$

البته میشد $\mathfrak{m}^{(0)}$ را هم تابع ِ فضازمان گرفت، مثل (59). در آن صورت علاوه بر پتانسیل ِ برداری یِ U، پتانسیل ِ اسکالر ِ V هم با ذره برهمکنش میداشت. دیده میشود

$$\mathfrak{n} = -m, \tag{65}$$

$$L_{\rm s} = \frac{1}{2}\,m\,u\cdot u - \frac{1}{2}\,m\,c^2 + U\cdot u. \tag{66}$$

همچنین،

$$p_\alpha = m\,u_\alpha + U_\alpha, \tag{67}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{E}_{{\rm s}\,\alpha} &= \frac{\partial U_\beta}{\partial r^\alpha}\,u^\beta - \frac{{\rm d}p_\alpha}{{\rm d}\tau},\\ &= \left(\frac{\partial U_\beta}{\partial r^\alpha} - \frac{\partial U_\alpha}{\partial r^\beta}\right)\,u^\beta - m\,\frac{{\rm d}u_\alpha}{{\rm d}\tau}.\end{aligned} \tag{68}$$

یک مثال ِ خاص حرکت ِ یک ذره ی ِ باردار در یک میدان ِ الکترُمغناطیسی است. در این حالت

$$U = q\, A, \tag{69}$$

که q بار ِ ذره، و A پتانسیل ِ برداری ی ِ متناظر با میدان ِ الکترُمغناطیسی است.

2.4 ذره در پتانسیل ِ تانسُری با رتبه ی ِ 2

در این حالت جرم ِ مئثر در (17) شامل ِ جمله‌ها ی ِ $\mathfrak{m}^{(0)}$ و $\mathfrak{m}^{(2)}$ است:

$$\begin{aligned} \mathfrak{m} &= \mathfrak{m}^{(0)} - \frac{1}{2}\, \mathfrak{m}^{(2)}_{\alpha\,\beta}\, u^\alpha\, u^\beta, \\ &=: m - \frac{c^{-2}}{2}\, T_{\alpha\,\beta}\, u^\alpha\, u^\beta, \\ &=: m - c^{-2}\, T. \end{aligned} \tag{70}$$

دیده میشود

$$\mathfrak{n} = -m - c^{-2}\, T, \tag{71}$$

$$L_{\mathrm{s}} = \frac{1}{2}\, m\, u\cdot u - \frac{1}{2}\, m\, c^2 + \left[1 + \frac{1}{2}\, (1 + c^{-2}\, u\cdot u)\right]\, T. \tag{72}$$

همچنین،

$$p_\alpha = (m + c^{-2}\, T)\, u_\alpha + T_{\alpha\,\beta}\, u^\beta, \tag{73}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{\mathrm{s}\,\alpha} &= \frac{\partial T}{\partial r^\alpha} - \frac{\mathrm{d}p_\alpha}{\mathrm{d}\tau}, \\ &= \frac{\partial T}{\partial r^\alpha} - c^{-2}\, \frac{\partial T}{\partial r^\beta}\, u^\beta\, u_\alpha - \frac{\partial T_{\alpha\,\beta}}{\partial r^\gamma}\, u^\gamma\, u^\beta \\ &\quad - (m + c^{-2}\, T)\, \frac{\mathrm{d}u_\alpha}{\mathrm{d}\tau} - c^{-2}\, T_{\beta\,\gamma}\, u^\beta\, u_\alpha\, \frac{\mathrm{d}u^\gamma}{\mathrm{d}\tau} - T_{\alpha\,\beta}\, \frac{\mathrm{d}u^\beta}{\mathrm{d}\tau}, \\ &= \frac{1}{2}\, \left(\frac{\partial T_{\gamma\,\beta}}{\partial r^\alpha} - \frac{\partial T_{\alpha\,\beta}}{\partial r^\gamma}\right)\, u^\gamma\, u^\beta - \frac{1}{2}\, \mathfrak{h}^\nu_\alpha\, \frac{\partial T_{\nu\,\beta}}{\partial r^\gamma}\, u^\gamma\, u^\beta \\ &\quad - [(m + c^{-2}\, T)\, \eta_{\alpha\,\gamma} + \mathfrak{h}^\beta_\alpha\, T_{\beta\,\gamma}]\, \frac{\mathrm{d}u^\gamma}{\mathrm{d}\tau}. \end{aligned} \tag{74}$$

3 پانوشتها

[1] محمد خرمی؛ «ذره ی ِ نسبیتی در یک میدان ِ اسکالر» X1-071 (2010/10/21)

[2] Minkowski

[3] Lorentz

[4] Poincaré

[5] Taylor

[6] Herbert Goldstein, Charles Poole, & John Safko; “classical mechanics” 3rd edition (Addison Wesley, 2002) chapter 2