X1-105 (2015/01/24)

تابع‌ ِ گرین ِ لَپلَسی برا یِ فضا یِ بیرون ِ یک قرص

محمد خرمی mamwad@mailaps.org

با استفاده از مختصات ِ بیضوی، تابع‌ ِ گرین ِ لَپلَسی برا یِ فضا یِ بیرون ِ یک قرص، به روش ِ جداسازی یِ متغیرها به دست می‌آید.

1 مختصات ِ بیضوی

چنان که در [1] و [2] هم آمده، مختصات ِ بیضوی یِ نُع ِ اول (u, ϕ, v) از رو یِ مختصات ِ استوانِئی یِ (ρ, ϕ, z) چنین تعریف می‌شوند.

$$\rho = c\,\cosh u\,\sin v,$$

$$z = c\,\sinh u\,\cos v. \tag{1}$$

گستره یِ (u, v) را می‌شود $\{[0, \infty) \times [0, \pi]\}$، یا $\{(-\infty, \infty) \times [0, (\pi/2)]\}$ گرفت. در حالت ِ اول، رویه‌ها یِ $u = \text{constant}$ بیضی‌گون‌ها یِ دوار ِ پخ ‌َند، و رویه‌ها یِ $v = \text{constant}$ نیم‌هذلولی‌گون‌ها یِ یک‌پارچه. در حالت ِ دوم، رویه‌ها یِ $u = \text{constant}$ نیم‌بیضی‌گون‌ها یِ دوار ِ پخ ‌َند، و رویه‌ها یِ

$v = \text{constant}$ هذلولیگونها یِ یکپارچه. این رویِها یِ مختصاتی، از دوران ِ (حُل- ِ-محور- ِ-z ِ) بیضیها یا هذلولیها یی به دست میآیند که دورانیافته یِ کانونها یِشان دایره یِ ($\rho = c, z = 0$) است. برا یِ تابع- ِ-گرین ِ لَپلَسی برا یِ فضا یِ بیرون ِ قرص، حالت ِ اول برا یِ مختصات ِ بیضوی یِ نُع ِ اول را به کار میبرم. در این صورت قرص ی به شعاع ِ c که در صفحه یِ $z = 0$ و مرکز َش مبدئ ِ مختصات است، متناظر با $u = 0$ است.

2 لَپلَسی و چشمه

لَپلَسی بر حسب ِ مختصات ِ بیضوی میشود

$$
\begin{aligned}
\nabla^2 = \frac{1}{D^2(u,v)} & \left(\frac{1}{\cosh u} \frac{\partial}{\partial u} \cosh u \frac{\partial}{\partial u} + \frac{1}{\sin v} \frac{\partial}{\partial v} \sin v \frac{\partial}{\partial v} \right) \\
& + \frac{1}{c^2 \cosh^2 u \sin^2 v} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2},
\end{aligned} \tag{2}
$$

که

$$
\begin{aligned}
D^2(u,v) &:= c^2 (\cosh^2 u - \sin^2 v), \\
&= c^2 (\sinh^2 u + \cos^2 v).
\end{aligned} \tag{3}
$$

چگالی یِ متناظر با یک چشمه یِ واحد ِ جایگزیده در $\boldsymbol{r}'$ هم، در $\boldsymbol{r}$ میشود

$$
\delta(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}') = \frac{1}{c\, D^2 \cosh u \sin v} \, \delta(u - u')\, \delta(v - v')\, \delta(\phi - \phi'). \tag{4}
$$

G (تابع- ِ-گرین ِ لَپلَسی) این معادله را بر میآورَد.

$$
\nabla'^2 G = \delta(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'), \tag{5}
$$

که بر حسب ِ مختصات ِ بیضوی میشود

$$
O' G = \frac{\delta(u - u')\, \delta(v - v')\, \delta(\phi - \phi')}{c \cosh u' \sin v'}\,, \tag{6}
$$

که

$$O' = A' + B'. \tag{7}$$

$$A' := \frac{1}{\cosh u'}\,\frac{\partial}{\partial u'}\,\cosh u'\,\frac{\partial}{\partial u'} - \frac{1}{\cosh^2 u'}\,M'^2. \tag{8}$$

$$B' := \frac{1}{\sin v'}\,\frac{\partial}{\partial v'}\,\sin v'\,\frac{\partial}{\partial v'} + \frac{1}{\sin^2 v'}\,M'^2. \tag{9}$$

$$M' = \frac{\partial}{\partial \phi'} \tag{10}$$

شرایط ِ مرزی یِ G به نُع ِ مسئله-یِ-مقدار- ِ-مرزی یِ مُرد- ِ-نظر بستِگی دارد. برا یِ مسئله یِ فضا یِ بیرون ِ قرص ی به شعاع ِ c که در صفحه یِ $z = 0$ و مرکز َش مبدئ ِ مختصات است، مرزها $u' = 0$ و $u' \to \infty$ َند. برا یِ $u' \to \infty$،

$$\lim_{u'\to\infty} G(\boldsymbol{r};\boldsymbol{r}') = 0. \tag{11}$$

برا یِ $u' = 0$،

$$G_{\mathrm{D}}(\boldsymbol{r}; u' = 0, v', \phi') = 0, \tag{12}$$

$$\frac{\partial[G_{\mathrm{N}}(\boldsymbol{r}; u', v', \phi')]}{\partial u'}(u' = 0) = 0, \tag{13}$$

که G_{D} تابع- ِ-گرین ِ دیریکله [3] و G_{N} تابع- ِ-گرین ِ نُیمان [4] است. بحث ی کلی در باره یِ انواع ِ تابع- ِ-گرین را میشود در مثلَن فصل ِ 1 از [5] یافت.

3 جداسازی یِ متغیرها

از (8) تا (10) دیده میشود A' و B' و M' با هم جابِجا میشوند. به این ترتیب از (7) دیده میشود O' هم با این سه جابِجا میشود. G را بر حسب ِ ویژِبردارها یِ همزمان ِ M' و B' بسط میدهم. از شکل ِ L' و B' دیده میشود این ویژِبردارها هم ان هماهنگها یِ کروی یَند، البته با متغیرها یِ (v', ϕ'):

$$M'\,\mathrm{Y}_{l\,m}(v', \phi') = \mathrm{i}\,m\,\mathrm{Y}_{l\,m}(v', \phi'). \tag{14}$$

$$B'\,\mathrm{Y}_{l\,m}(v', \phi') = -l\,(l+1)\,\mathrm{Y}_{l\,m}(v', \phi'). \tag{15}$$

همچنین،

$$\frac{\delta(v-v')\,\delta(\phi-\phi')}{\sin v}=\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l}\mathrm{Y}_{l\,m}(v,\phi)\,\overline{\mathrm{Y}_{l\,m}(v',\phi')}. \tag{16}$$

اینها پیشنهاد میکنند G را بر حسب ِ هماهنگها یِ کروی با متغیرها یِ (v',ϕ') بسط بدهم:

$$G=\frac{1}{c}\sum_{l,m}\mathrm{Y}_{l\,m}(v,\phi)\,\overline{\mathrm{Y}_{l\,m}(v',\phi')}\,G_{l\,m}(u,u'). \tag{17}$$

این را در (6) میگذارم. با استفاده از (7) و

$$B'\,\overline{\mathrm{Y}_{l\,m}(v',\phi')}=-l\,(l+1)\,\overline{\mathrm{Y}_{l\,m}(v',\phi')}, \tag{15'}$$

و (16) نتیجه میشود

$$\sum_{l,m}\mathrm{Y}_{l\,m}(v,\phi)\,\overline{\mathrm{Y}_{l\,m}(v',\phi')}\left[\tilde{A}'_{l\,m}\,G_{l\,m}(u,u')-\frac{\delta(u-u')}{\cosh u}\right]=0, \tag{18}$$

که

$$\tilde{A}'_{l\,m}=\frac{1}{\cosh u'}\,\frac{\partial}{\partial u'}\,\cosh u'\,\frac{\partial}{\partial u'}+\frac{m^2}{\cosh^2 u'}-l\,(l+1). \tag{19}$$

به این ترتیب، با استفاده از خطی-مستقل-بودن ِ هماهنگها یِ کروی، از (18) نتیجه میشود

$$\tilde{A}'_{l\,m}\,G_{l\,m}(u,u')=\frac{\delta(u-u')}{\cosh u}. \tag{20}$$

4 معادله یِ وابسته-یِ-لُژاندر ِ دگرگون

با تغییر- ِ-متغیر ِ

$$U=\sinh u, \tag{21}$$

شکل ِ $\tilde{A}'_{l\,m}$ چنین میشود

$$\tilde{A}'_{l\,m}=\frac{\partial}{\partial U'}\,(1+U'^2)\,\frac{\partial}{\partial U'}+\frac{m^2}{1+U'^2}-l\,(l+1). \tag{22}$$

معادله یِ (20) هم میشود

$$\tilde{A}'_{l\,m}\,G_{l\,m}=\delta(U-U'). \tag{23}$$

دیده میشود معادله یِ حاکم بر $G_{l\,m}$ در $U'\neq U$، بر حسب ِ متغیر ِ $(\mathrm{i}\,U')$ معادله یِ وابسته یِ لُژاندر [6] است. تعریف میکنم

$$\mathrm{R}_{l\,m}(\xi):=\mathrm{i}^{m-l}\,\mathrm{P}_{l\,m}(\mathrm{i}\,\xi), \tag{24}$$

که $\mathrm{P}_{l\,m}$ ها چند جملِئیها یِ وابسته یِ لُژاندر [6] َند. رُشن است که

$$\tilde{A}'_{l\,m}\,[\mathrm{R}_{l\,m}(U')] = 0. \tag{25}$$

به

$$\tilde{A}'_{l\,m}\,[X(U')] = 0, \tag{26}$$

معادله یِ وابسته-یِ-لُژاندر [6] ِ دگرگون برا یِ X میگویم. $\mathrm{S}_{l\,m}$ را جواب ِ

$$\tilde{A}'_{l\,m}\,[\mathrm{S}_{l\,m}(U')] = 0 \tag{27}$$

میگیرم، چنان که از $\mathrm{R}_{l\,m}$ مستقل باشد. یک راه ِ حل ِ (27) (با دانستن ِ $\mathrm{R}_{l\,m}$) وردش ِ پارامتر است:

$$\mathrm{S}_{l\,m} = \alpha_{l\,m}\,\mathrm{R}_{l\,m}. \tag{28}$$

این را در (27) میگذارم و (25) را به کار میبرم:

$$\begin{aligned}
0 &= (1+U'^2)\,\frac{\mathrm{d}[\mathrm{R}_{l\,m}(U')]}{\mathrm{d}U'}\,\frac{\mathrm{d}[\alpha_{l\,m}(U')]}{\mathrm{d}U'}\\
&\quad + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}U'}\,\left\{(1+U'^2(\,\mathrm{R}_{l\,m}(U')\,\frac{\mathrm{d}[\alpha_{l\,m}(U')]}{\mathrm{d}U'}\right\},\\
&= \frac{1}{\mathrm{R}_{l\,m}(U')}\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}U'}\,\left\{(1+U'^2)\,[\mathrm{R}_{l\,m}(U')]^2\,\frac{\mathrm{d}[\alpha_{l\,m}(U')]}{\mathrm{d}U'}\right\},
\end{aligned} \tag{29}$$

که نتیجه میدهد

$$(1+U')^2\,[\mathrm{R}_{l\,m}(U')]^2\,\frac{\mathrm{d}[\alpha_{l\,m}(U')]}{\mathrm{d}U'} = a, \tag{30}$$

که a یک ثابت است. به این ترتیب،

$$\alpha_{l\,m}(\xi) = a\,\int_{\infty}^{\xi}\frac{\mathrm{d}\zeta}{(1+\zeta^2)\,[\mathrm{R}_{l\,m}(\zeta)]^2} + b, \tag{31}$$

که b هم یک ثابت است. از جمله با انتخاب ِ

$$\begin{aligned}
a &= -1,\\
b &= 0,
\end{aligned} \tag{32}$$

نتیجه میشود

$$\mathrm{S}_{l\,m}(\xi) = \mathrm{R}_{l\,m}(\xi)\,\int_{\xi}^{\infty}\frac{\mathrm{d}\zeta}{(1+\zeta^2)\,[\mathrm{R}_{l\,m}(\zeta)]^2}. \tag{33}$$

از تعریفِ $\mathrm{R}_{l\,m}$ دیده میشود

$$\mathrm{R}_{l\,m}(\xi)=\frac{1}{2^l\,l!}\,(1+\xi^2)^{m/2}\,\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\xi}\right)^{l+m}\,(1+\xi^2)^l, \tag{34}$$

به این ترتیب،

$$\mathrm{R}_{l\,m}(\xi)=\mathfrak{a}_{l\,m}\,\xi^l+O(\xi^{l-2}),\qquad \xi\gg 1, \tag{35}$$

$$\mathrm{S}_{l\,m}(\xi)=\frac{1}{(2\,l+1)\,\mathfrak{a}_{l\,m}}\,\xi^{-l-1}+O(\xi^{-l-3}),\qquad \xi\gg 1, \tag{36}$$

که

$$\mathfrak{a}_{l\,m}=\frac{(2\,l)!}{2^l\,l!\,(l-m)!}. \tag{37}$$

هچنین،

$$\mathrm{R}_{l\,m}(\xi)=\mathfrak{b}_{l\,m}+O(\xi^2),\qquad \xi\ll 1,\quad \frac{l-m}{2}\in\mathbb{Z}, \tag{38}$$

$$\mathrm{S}_{l\,m}(\xi)=\mathfrak{b}_{l\,m}\,\mathfrak{c}_{l\,m}-\frac{\xi}{\mathfrak{b}_{l\,m}}+O(\xi^2),\qquad \xi\ll 1,\quad \frac{l-m}{2}\in\mathbb{Z}, \tag{39}$$

$$\mathrm{R}_{l\,m}(\xi)=\mathfrak{d}_{l\,m}\,\xi+O(\xi^3),\qquad \xi\ll 1,\quad \frac{l-m-1}{2}\in\mathbb{Z}, \tag{40}$$

$$\mathrm{S}_{l\,m}(\xi)=\frac{1}{\mathfrak{d}_{l\,m}}+\mathfrak{d}_{l\,m}\,\mathfrak{e}_{l\,m}\,\xi+O(\xi^2),\qquad \xi\ll 1,\quad \frac{l-m-1}{2}\in\mathbb{Z}, \tag{41}$$

که

$$\begin{aligned}
\mathfrak{b}_{l\,m}&=\frac{(l+m)!}{2^l\,[(l+m)/2]!\,[(l-m)/2]!}.\\
\mathfrak{c}_{l\,m}&=\int_0^\infty\frac{\mathrm{d}\zeta}{(1+\zeta^2)\,[\mathrm{R}_{l\,m}(\zeta)]^2}.\\
\mathfrak{d}_{l\,m}&=\frac{(l+m+1)!}{2^l\,[(l+m+1)/2]!\,[(l-m-1)/2]!}.\\
\mathfrak{e}_{l\,m}&=\int_0^\infty\frac{\mathrm{d}\zeta}{\zeta}\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\zeta}\,\left\{\frac{\zeta^2}{(1+\zeta^2)\,[\mathrm{R}_{l\,m}(\zeta)]^2}\right\}.
\end{aligned} \tag{42}$$

از رفتارها یِ حدی، دیده میشود در متغیرها یِ بزرگ $\mathrm{S}_{l\,m}$ به صفر میگراید. همچنین، تعریف میکنم

$$\mathrm{R}^{\mathrm{D}}_{l\,m}=\mathrm{R}_{l\,m}-\frac{1}{\mathfrak{c}_{l\,m}}\,\mathrm{S}_{l\,m},\quad \frac{l-m}{2}\in\mathbb{Z}. \tag{43}$$

$$\mathrm{R}^{\mathrm{N}}_{l\,m}=\mathrm{R}_{l\,m},\qquad \frac{l-m}{2}\in\mathbb{Z}. \tag{44}$$

$$\mathrm{R}^{\mathrm{D}}_{l\,m}=\mathrm{R}_{l\,m},\qquad \frac{l-m-1}{2}\in\mathbb{Z}. \tag{45}$$

$$\mathrm{R}^{\mathrm{N}}_{l\,m}=\mathrm{R}_{l\,m}-\frac{1}{\mathfrak{c}_{l\,m}}\,\mathrm{S}_{l\,m},\quad \frac{l-m-1}{2}\in\mathbb{Z}. \tag{46}$$

دیده میشود

$$\mathrm{R}^{\mathrm{D}}_{l\,m}(0)=0. \tag{47}$$

$$\frac{\mathrm{d}[\mathrm{R}^{\mathrm{N}}_{l\,m}(\xi)]}{\mathrm{d}\xi}(\xi=0)=0. \tag{48}$$

X و Y را دُ تابع میگیرم که معادله یِ وابسته-یِ-لُژاندر [6] ِ دگرگون را بر میآورند. وْرُنسکی [7] یِ X و Y را $\boldsymbol{W}(X,Y)$ نشان میدهم. $\boldsymbol{W}(X,Y)$ این معادله را بر میآورَد.

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\xi}\{(1+\xi^2)\,[\boldsymbol{W}(X,Y)](\xi)\}=0, \tag{49}$$

که نتیجه میدهد

$$[\boldsymbol{W}(X,Y)](\xi)=\frac{w(X,Y)}{1+\xi^2}. \tag{50}$$

$w(X,Y)$ یک ثابت است (که البته به تابعها یِ X و Y بستگی دارد). از تعریف ِ R^{D} و R^{N} رُشن است که

$$\begin{aligned}\boldsymbol{W}(\mathrm{R}_{l\,m},\mathrm{S}_{l\,m})&=\boldsymbol{W}(\mathrm{R}^{\mathrm{D}}_{l\,m},\mathrm{S}_{l\,m}),\\&=\boldsymbol{W}(\mathrm{R}^{\mathrm{N}}_{l\,m},\mathrm{S}_{l\,m}).\end{aligned} \tag{51}$$

$\boldsymbol{W}(\mathrm{R}_{l\,m},\mathrm{S}_{l\,m})$ را با $\boldsymbol{W}$ نشان میدهم. از (35) و (36) دیده میشود

$$\boldsymbol{W}(\xi)=-\xi^{-2}+O(\xi^{-4}),\qquad \xi\gg 1, \tag{52}$$

که از ترکیب َش با (50) نتیجه میشود

$$\boldsymbol{W}(\xi)=-\frac{1}{1+\xi^2}. \tag{53}$$

5 جواب ِ معادله

آن جواب ِ (20) یا (23) در $U' \neq U$ که شرایط ِ مرزی را بر میآورَد و در $U' = U$ پیوسته است، میشود

$$G_{l\,m}(u,u') = g_{l\,m}\mathfrak{R}_{l\,m}(U_<)\,\mathrm{S}_{l\,m}(U_>), \tag{54}$$

که $g_{l\,m}$ یک ثابت است و $\mathfrak{R}$ برا یِ مسئله یِ دیریکله [3] هم ان $\mathrm{R}^{\mathrm{D}}_{l\,m}$ و برا یِ مسئله یِ نُیمان [4] هم ان $\mathrm{R}^{\mathrm{N}}_{l\,m}$ است. برا یِ این که (54) جواب ِ کامل ِ معادله (از جمله در $U' = U$) باشد، باید

$$(1+U^2)\,\left[\frac{\partial G_{l\,m}}{\partial U'}(U'=U^+) - \frac{\partial G_{l\,m}}{\partial U'}(U'=U^-)\right] = 1, \tag{55}$$

که نتیجه میدهد

$$g_{l\,m}\,(1+U^2)\,\boldsymbol{W}(U) = 1, \tag{56}$$

یا

$$g_{l\,m} = -1. \tag{57}$$

به این ترتیب،

$$G = -\frac{1}{c}\sum_{l,m}\mathrm{Y}_{l\,m}(,\phi)\,\overline{\mathrm{Y}_{l\,m}(,\phi')}\,\mathfrak{R}_{l\,m}(U_<)\,\mathrm{S}_{l\,m}(U_>), \tag{58}$$

که یعنی

$$G^{\mathrm{D}} = -\frac{1}{c}\sum_{l,m}\mathrm{Y}_{l\,m}(,\phi)\,\overline{\mathrm{Y}_{l\,m}(,\phi')}\,R^{\mathrm{D}}_{l\,m}(U_<)\,\mathrm{S}_{l\,m}(U_>). \tag{59}$$

$$G^{\mathrm{N}} = -\frac{1}{c}\sum_{l,m}\mathrm{Y}_{l\,m}(,\phi)\,\overline{\mathrm{Y}_{l\,m}(,\phi')}\,R^{\mathrm{N}}_{l\,m}(U_<)\,\mathrm{S}_{l\,m}(U_>). \tag{60}$$

G^{D} تابع- ِ-گرین ِ مسئله یِ دیریکله [3] و G^{N} تابع- ِ-گرین ِ مسئله یِ نُیمان [4] است.

6 جواب ِ مسئله یِ شرط- ِ-مرزی

چنان که در مثلَن فصل ِ 1 از [5] آمده، جواب ِ مسئله یِ دیریکله [3] برا یِ فضا یِ بیرون ِ قرص میشود

$$\phi(\boldsymbol{r}) = \int_{u'>0}\mathrm{d}V'\,G^{\mathrm{D}}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')\,\rho(\boldsymbol{r}') + \oint_{u'=0}\mathrm{d}S'\,\frac{\partial G^{\mathrm{D}}}{\partial n'}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')\,\phi(\boldsymbol{r}'), \tag{61}$$

که $(\partial/\partial n)$ مشتقگیری در جهت ِ عمود بر مرز به سو ی ِبیرون ِ فضا، و ρ چشمه است:

$$\rho = \nabla^2\,\phi. \tag{62}$$

دیده میشود

$$\begin{aligned}\frac{\partial G}{\partial n'}(u'=0) &= -\frac{1}{c}\,\frac{\partial G}{\partial u'}(u'=0),\\ &= -\frac{1}{c}\,\frac{\partial G}{\partial U'}(U'=0).\end{aligned} \tag{63}$$

از اینجا،

$$\frac{\partial G^{\mathrm{D}}}{\partial n'}(u'=0) = \frac{1}{c^2}\,\sum_{l,m}\mathfrak{f}^{\mathrm{D}}_{l\,m}\mathrm{Y}_{l\,m}(,\phi)\,\overline{\mathrm{Y}_{l\,m}(,\phi')}\,\mathrm{S}_{l\,m}(U), \tag{64}$$

که

$$\mathfrak{f}^{\mathrm{D}}_{l\,m} = \frac{1}{\mathfrak{b}_{l\,m}\,\mathfrak{c}_{l\,m}},\quad \frac{l-m}{2}\in\mathbb{Z}. \tag{65}$$

$$\mathfrak{f}^{\mathrm{D}}_{l\,m} = \mathfrak{d}_{l\,m},\qquad \frac{l-m-1}{2}\in\mathbb{Z}. \tag{66}$$

همچنین، جواب ِ مسئله ی ِنُیمان [4] برا ی ِفضا ی ِبیرون ِ قرص میشود

$$\phi(\boldsymbol{r}) = \int_{u'>0}\mathrm{d}V'\,G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')\,\rho(\boldsymbol{r}') - \oint_{u'=0}\mathrm{d}S'\,G^{\mathrm{N}}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')\,\frac{\partial\phi}{\partial n'}(\boldsymbol{r}'), \tag{67}$$

که

$$G^{\mathrm{N}}(u'=0) = -\frac{1}{c}\,\sum_{l,m}\mathfrak{f}^{\mathrm{N}}_{l\,m}\mathrm{Y}_{l\,m}(,\phi)\,\overline{\mathrm{Y}_{l\,m}(,\phi')}\,\mathrm{S}_{l\,m}(U), \tag{68}$$

و دیده میشود

$$\mathfrak{f}^{\mathrm{N}}_{l\,m} = \mathfrak{b}_{l\,m},\qquad \frac{l-m}{2}\in\mathbb{Z}. \tag{69}$$

$$\mathfrak{f}^{\mathrm{N}}_{l\,m} = -\frac{1}{\mathfrak{d}_{l\,m}\,\mathfrak{e}_{l\,m}},\quad \frac{l-m-1}{2}\in\mathbb{Z}. \tag{70}$$

7 پانوشتها

[1] محمد خرمی؛ «مختصات ِ بیضوی در چند مسئله ی ِالکترُمغناطیس»؛ X1-010 (2002/04/17)

[2] محمد خرمی؛ «بیضیگون ِ دوار ِ توپر ِ یکنواخت-باردار»؛ X1-035 (2006/01/08)

[3] Dirichlet

[4] Neumann

[5] John David Jackson; “Classical electrodynamics” 3rd edition (John Wiley & Sons, 1998)

[6] Legendre