X1-110 (2015/08/28)

برازش، تخمین، نایقینی II

محمد خرمی

mamwad@mailaps.org

مثالها یی از برازش ِ روابط به یک دسته داده بررسی میشود.

0 درامد

در [1] یک فرمولبندی برا یِ برازش ارائه شد. هم ان فرمولبندی و نمداگذاریها را به کار میبرم. خلاصه اَش این است که بین ِ یک دسته متغیر ِ $\boldsymbol{X}$ روابط ی برقرار است. این روابط با یک دسته پارامتر ِ $\boldsymbol{A}$ مشخص میشوند:

$$\boldsymbol{Q}(\boldsymbol{A},\boldsymbol{X})=0. \tag{1}$$

مقدار ی که با سنجش برا یِ $\boldsymbol{X}$ به دست میئاید را با $\boldsymbol{Y}$ نشان میدهم. حل ِ (1) میشود

$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{f}_0(\boldsymbol{B}). \tag{2}$$

$$\boldsymbol{X}=\boldsymbol{f}_1(\boldsymbol{B}). \tag{3}$$

تعداد ِ متغیرها (تعداد ِ سنجشها) را با N، تعداد ِ پارامترها را با m، و تعداد ِ رابطِها یِ بین ِ اینها (تعداد ِ قیدها) را با η نشان میدهم. تعداد ِ متغیرها یِ مستقل (تعداد ِ مئلفِها یِ $\boldsymbol{B}$) را هم با ϕ

نشان میدهم. نتیجه میشود

$$\phi = N + m - \eta. \tag{4}$$

شرط ِ وجود ِ یک چگالی-یِ-احتمال ِ بازبهنجارش-پذیر برا یِ پارامترها یِ آزاد این است که ϕ از N بزرگتر نباشد. همٔرز با آن، m از η بزرگتر نباشد. از این پس فرض این است که m از η کوچکتر است.

مقدار ِ واقعی یِ $\mathfrak{Q}$ را با $\hat{\mathfrak{Q}}$، و مقدار ِ متناظر با خطا یِ کمینه بر اساس ِ سنجشها را با $\bar{\mathfrak{Q}}$ نشان میدهم. $\bar{\mathfrak{Q}}$ تابع ِ مقدارها یِ سنجیده-شده است، و

$$\bar{\mathfrak{Q}}(\hat{\boldsymbol{Y}}) = \hat{\mathfrak{Q}}. \tag{5}$$

$$\boldsymbol{f}_1(\hat{\boldsymbol{B}}) = \hat{\boldsymbol{Y}}. \tag{6}$$

همبستگی یِ $\boldsymbol{Y}$ برابر با $\boldsymbol{C}$ است:

$$\mathsf{E}[(Y^i - \hat{Y}^i)\,(Y^j - \hat{Y}^j)] = C^{i\,j}, \tag{7}$$

که E مقدار ِ چشمداشتی ست. برا یِ $\boldsymbol{B}$ هم،

$$\mathsf{E}[(B^\alpha - \hat{B}^\alpha)\,(B^\beta - \hat{B}^\beta)] = K^{\alpha\,\beta}, \tag{8}$$

که

$$K^{-1}_{\alpha\,\beta} = C^{-1}_{i\,j}\,\Gamma^i{}_\alpha\,\Gamma^j{}_\beta, \tag{9}$$

و $\boldsymbol{\Gamma}$ مشتق ِ $f_1(\boldsymbol{B})$ نسبت به $\boldsymbol{B}$ است، که جا یی نزدیک ِ $\hat{\boldsymbol{B}}$ یا $\bar{\boldsymbol{B}}$ حساب شده است.

$\bar{\boldsymbol{B}}(\boldsymbol{y})$ مقدار ی برا یِ $\boldsymbol{b}$ است که $\boldsymbol{C}\,[\boldsymbol{y} - \boldsymbol{f}_1(\boldsymbol{b}), \boldsymbol{y} - \boldsymbol{f}_1(\boldsymbol{b})]$ را کمینه میکند. همٔرز با این، $(\bar{\boldsymbol{A}}, \bar{\boldsymbol{X}})(\boldsymbol{y})$ مقدار ی برا یِ $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{x})$ است که $\boldsymbol{C}\,(\boldsymbol{y} - \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} - \boldsymbol{x})$ را با قید ِ $\boldsymbol{Q}(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{x}) = 0$ کمینه میکند. برا یِ گشتاورها هم،

$$\mathsf{E}[(\bar{A}^p - \hat{A}^p)\,(\bar{A}^q - \hat{A}^q)] = C^{k\,l}\,\underset{\sim}{\Theta}{}^p{}_k\,\underset{\sim}{\Theta}{}^q{}_l. \tag{10}$$

$$\mathsf{E}[(\bar{X}^i - \hat{X}^i)\,(\bar{X}^j - \hat{X}^j)] = C^{k\,l}\,\underset{\sim}{\Gamma}{}^i{}_k\,\underset{\sim}{\Gamma}{}^j{}_l. \tag{11}$$

$\underset{\sim}{\boldsymbol{\Theta}}$ و $\underset{\sim}{\boldsymbol{\Gamma}}$ ماتریسها یِ مشتق ِ، به ترتیب، $\bar{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{y})$ و $\bar{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{y})$ نسبت به $\boldsymbol{y}$ اند، که جا یی نزدیک ِ $\hat{\boldsymbol{B}}$ یا $\bar{\boldsymbol{B}}$ حساب شده اند.

یک تخمین برا یِ گشتاورها با استفاده از مقدارها یِ سنجیده-شده چنین است.

$$\mathsf{es}\{\boldsymbol{C}^{-1}\,[\boldsymbol{y}-\bar{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{y}),\boldsymbol{y}-\bar{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{y})]\}=\eta-m. \tag{12}$$

1 برازش ِ یک رویه به یک دسته داده

میخاهم به یک دسته نقطه در یک فضا یِ ℓ-بُعدی یک رویه یِ κ-بُعدی ببرازانم. n-نقطه در این فضا متناظر با $(\ell\,n)$ عدد َند (هر نقطه متناظر با ℓ عدد است). هر رویه یِ κ-بُعدی در این فضا با $(\ell-\kappa)$ معادله مشخص میشود. پس به ازا یِ هر نقطه یک دسته، $(\ell-\kappa)$ تا، معادله (قید) هست. نتیجه این که

$$N=\ell\,n, \tag{13}$$

$$\eta=(\ell-\kappa)\,n, \tag{14}$$

و از آنجا،

$$\eta-m=(\ell-\kappa)\,n-m. \tag{15}$$

$$\phi=\kappa\,n+m. \tag{16}$$

یک حالت ِ خاص رویه ای ست که در آن $(\ell-\kappa)$ مختصه تابع ِ κ مختصه اند، و هر یک از این تابعها شامل ِ ϖ پارامتر است. در این حالت،

$$m=\varpi\,(\ell-\kappa). \tag{17}$$

$$\eta-m=(\ell-\kappa)\,(n-\varpi). \tag{18}$$

$$\phi=\kappa\,n+\varpi\,(\ell-\kappa). \tag{19}$$

شرط ِ مثبت-بودن ِ $(\eta-m)$، همراه با نامنفی-بودن ِ m، میشود

$$\kappa<\ell. \tag{20}$$

$$\varpi<n. \tag{21}$$

اولی یعنی بُعد ِ رویه کمتر از بُعد ِ فضا ست. دومی یعنی تعداد ِ پارامترها یِ هر یک از تابعها کمتر از تعداد ِ نقطِها یِ سنجیده-شده است.

در این حالت میشود متغیرها و پارامترها را با دُ شاخص نشان داد: میشود به جا یِ X^i و A^p، به ترتیب $X^{(\imath',\imath'')}$ و $A^{(p',p'')}$ را به کار برد. شاخص ِ اول ِ X مختصه یِ نقطه، و شاخص ِ دوم ِ X شماره یِ نقطه یِ سنجیده-شده است. شاخص ِ اول ِ A شماره یِ تابع، و شاخص ِ دوم ِ A شماره یِ پارامتر در آن تابع است. به این ترتیب، شاخص ِ ها یِ اول و دوم ِ X و شاخصها یِ اول و دوم ِ A در، به ترتیب، $\{1,\dots,\ell\}$ و $\{1,\dots,n\}$ و $\{1,\dots,l-\kappa\}$ و $\{1,\dots,\varpi\}$ مقدار میگیرند. قیدها را هم میشود با دُ شاخص نشان داد: $Q^{(p',\imath'')}$ را به جا یِ Q^ν به کار میبرم، که شاخص ِ اول و دوم ِ Q در، به ترتیب، $\{1,\dots,\ell-\kappa\}$ و $\{1,\dots,n\}$ مقدار میگیرند.

2 برازش ِ یک نقطه به یک دسته داده

در این حالت ℓ مختصه اند، که تابع ِ هیچ مختصه یِ دیگر ی نیستند. هر یک از این مختصِها تابع ِ یک پارامتر است. پس،

$$\varpi = 1. \tag{22}$$

$$\kappa = 0. \tag{23}$$

$$m = \ell. \tag{24}$$

$$\eta = \ell\, n. \tag{25}$$

$$\eta - m = \ell\,(n-1). \tag{26}$$

$$\phi = \ell. \tag{27}$$

قیدها میشوند

$$Q^{(\imath',\imath'')}(\boldsymbol{A},\boldsymbol{X}) = X^{(\imath',\imath'')} - A^{\imath'}. \tag{28}$$

این قیدها به سادِگی حل میشوند. متغیرها یِ مستقل را میشود هم ان مثلفها یِ $\boldsymbol{A}$ گرفت. به این ترتیب تابع ی که باید بیشینه شود Υ است:

$$\Upsilon(\boldsymbol{a}) = -\frac{1}{2}\, C^{-1}_{i\,j}\,(y^i-\tilde{a}^i)\,(y^j-\tilde{a}^j), \tag{29}$$

که

$$\tilde{a}^{(\imath',\imath'')} = a^{\imath'}\, s^{\imath''}. \tag{30}$$

$$s^{\imath''} = 1. \tag{31}$$

معادله یِ بیشینه‌-ساز ِ Υ میشود

$$-C^{-1}_{(\imath',\imath'')\,(\jmath',\jmath'')}\, s^{\imath''}\, s^{\jmath''}\, \bar{A}^{\jmath'} + C^{-1}_{(\imath',\imath'')\,(\jmath',\jmath'')}\, s^{\imath''}\, y^{(\jmath',\jmath'')} = 0, \tag{32}$$

که نتیجه میدهد

$$\bar{A}^{k'} = \underset{\sim}{C}^{k'\,\imath'}\, C^{-1}_{(\imath',\imath'')\,(\jmath',\jmath'')}\, s^{\imath''}\, y^{(\jmath',\jmath'')}. \tag{33}$$

$$(\underset{\sim}{C}^{-1})_{\imath'\,\jmath'} = C^{-1}_{(\imath',\imath'')\,(\jmath',\jmath'')}\, s^{\imath''}\, s^{\jmath''}. \tag{34}$$

همچنین،

$$\mathsf{es}\{\mathsf{E}[(\bar{A}^{\imath'}-\hat{A}^{\imath'})\,(\bar{A}^{\jmath'}-\hat{A}^{\jmath'})]\} = \frac{\boldsymbol{C}^{-1}\,[\boldsymbol{y}-\tilde{\bar{\boldsymbol{A}}}(\boldsymbol{y}), \boldsymbol{y}-\tilde{\bar{\boldsymbol{A}}}(\boldsymbol{y})]}{\ell\,(n-1)}\, \underset{\sim}{C}^{\imath'\,\jmath'}. \tag{35}$$

یک حالت ِ ساده وقت ی ست که سنجشها مستقل از هم َند و خطا یِشان هم یکسان است:

$$C^{(\imath',\imath'')\,(\jmath',\jmath'')} = \sigma^2\, \delta^{\imath'\,\jmath'}\, \delta^{\imath''\,\jmath''}. \tag{36}$$

در این حالت،

$$\underset{\sim}{C}^{\imath'\,\jmath'} = \frac{\sigma^2}{n}\, \delta^{\imath'\,\jmath'}. \tag{37}$$

$$\bar{A}^{\imath'} = \frac{1}{n} \sum_{\imath''=1}^{n} y^{(\imath',\imath'')}. \tag{38}$$

$$\mathsf{es}(\sigma^2) = \frac{1}{\ell\,(n-1)} \sum_{k'\,k''} [y^{(k',k'')} - \bar{A}^{k'}]^2. \tag{39}$$

$$\mathsf{es}\{\mathsf{E}[(\bar{A}^{\imath'}-\hat{A}^{\imath'})\,(\bar{A}^{\jmath'}-\hat{A}^{\jmath'})]\} = \frac{\delta^{\imath'\,\jmath'}}{\ell\,n\,(n-1)} \sum_{k'\,k''} [y^{(k',k'')} - \bar{A}^{k'}]^2. \tag{40}$$

اگر ℓ یک باشد، شاخصها یِ پریمدار (شاخص ِ $\boldsymbol{A}$ و شاخص ِ اول ِ $\boldsymbol{X}$) حذف میشود. در این حالت میشود هم ان شاخصها یِ ساده را به کار برد. (33) تا (35) میشوند

$$\bar{A} = \frac{\boldsymbol{C}^{-1}(\boldsymbol{s}, \boldsymbol{y})}{\boldsymbol{C}^{-1}(\boldsymbol{s}, \boldsymbol{s})}. \tag{41}$$

$$\mathsf{es}\{\mathsf{E}[(\bar{A} - \hat{A})^2]\} = \frac{\boldsymbol{C}^{-1}\,[\boldsymbol{y} - \bar{A}\,\boldsymbol{s}, \boldsymbol{y} - \bar{A}\,\boldsymbol{s}]}{(n-1)\,\boldsymbol{C}^{-1}(\boldsymbol{s}, \boldsymbol{s})}. \tag{42}$$

تعریف میکنم

$$\mathsf{me}(\boldsymbol{y}) = \frac{\boldsymbol{C}^{-1}(\boldsymbol{s}, \boldsymbol{y})}{\boldsymbol{C}^{-1}(\boldsymbol{s}, \boldsymbol{s})}. \tag{43}$$

$$\mathsf{va}(\boldsymbol{y}) = \frac{\boldsymbol{C}^{-1}\,\{\boldsymbol{y} - [\mathsf{me}(\boldsymbol{y})]\,\boldsymbol{s}, \boldsymbol{y} - [\mathsf{me}(\boldsymbol{y})]\,\boldsymbol{s}\}}{\boldsymbol{C}^{-1}(\boldsymbol{s}, \boldsymbol{s})}. \tag{44}$$

رابطه یِ اخیر را میشود چنین نوشت.

$$\mathsf{va}(\boldsymbol{y}) = \frac{[\boldsymbol{C}^{-1}\,(\boldsymbol{s}, \boldsymbol{s})]\,[\boldsymbol{C}^{-1}\,(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{y})] - [\boldsymbol{C}^{-1}\,(\boldsymbol{s}, \boldsymbol{y})]^2}{[\boldsymbol{C}^{-1}\,(\boldsymbol{s}, \boldsymbol{s})]^2}. \tag{45}$$

به این ترتیب (41) و (42) میشوند

$$\bar{A} = \mathsf{me}(\boldsymbol{y}). \tag{46}$$

$$\mathsf{es}\{\mathsf{E}[(\bar{A} - \hat{A})^2]\} = \frac{\mathsf{va}(\boldsymbol{y})}{(n-1)}. \tag{47}$$

سرانجام، اگر ℓ یک باشد و سنجشها هم مستقل از هم و با خطا یِ یکسان باشند،

$$\bar{A} = \frac{1}{n}\,\sum_i y^i. \tag{48}$$

$$\mathsf{es}(\sigma^2) = \frac{1}{n-1}\,\sum_i (y^i - \bar{A})^2. \tag{49}$$

$$\mathsf{es}\{\mathsf{E}[(\bar{A} - \hat{A})^2]\} = \frac{1}{n\,(n-1)}\,\sum_i (y^i - \bar{A})^2. \tag{50}$$

3 برازشِ یک خط به یک دسته داده

در این حالت $(\ell - 1)$ مختصه اند، که هر کدام تابعِ یک-مختصه یِ باقیمانده و 2 پارامتر َند. پس،

$$\varpi = 2. \tag{51}$$

$$\kappa = 1. \tag{52}$$

$$m = 2\,(\ell - 1). \tag{53}$$

$$\eta = (\ell - 1)\,n. \tag{54}$$

$$\eta - m = (\ell - 1)\,(n - 2). \tag{55}$$

$$\phi = n + 2\,(\ell - 1). \tag{56}$$

قیدها میشوند

$$Q^{(p',\imath'')}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{X}) = X^{(p',\imath'')} - A^{(p',1)} - A^{(p',2)}\,X^{(\ell,\imath'')}. \tag{57}$$

این قیدها به سادگی حل میشوند. متغیرها یِ مستقل را میشود $X^{(\ell,\imath'')}$ ها و مئلفِها یِ $\boldsymbol{A}$ گرفت. شاخصها را سادِتر میکنم و تعریف میکنم

$$G^p = A^{(p,1)}. \tag{58}$$

$$U^p = A^{(p,2)}. \tag{59}$$

$$\Xi^i = X^{(\ell,i)}. \tag{60}$$

و قیدها میشوند

$$Q^{(p,i)}(\boldsymbol{G}, \boldsymbol{U}, \Xi, \boldsymbol{X}) = X^{(p,i)} - G^p - U^p\,\Xi^i. \tag{61}$$

شاخصها یِ اول و دوم ِ X در، به ترتیب، $\{1,\dots,\ell-1\}$ و $\{1,\dots,n\}$ مقدار میگیرند. تابع ی که باید بیشینه شود Υ است:

$$\begin{aligned}\Upsilon(\boldsymbol{g},\boldsymbol{u},\boldsymbol{\xi}) = &-\frac{1}{2}\,C^{-1}_{(p,i)\,(q,j)}\,[y^{(p,i)} - g^p\,s^i - u^p\,\xi^i]\,[y^{(q,j)} - g^q\,s^j - u^q\,\xi^j]\\ &- F_{(p,i)\,j}\,[y^{(p,i)} - g^p\,s^i - u^p\,\xi^i]\,(z^j - \xi^j)\\ &- \frac{1}{2}\,H_{i\,j}\,(z^i - \xi^i)\,(z^j - \xi^j),\end{aligned} \tag{62}$$

که $\boldsymbol{Z}$ مقدار ِ سنجیده-شده برا یِ Ξ است، و

$$F_{(p,i)\,j} = C^{-1}_{(p,i)\,(\ell,j)}. \tag{63}$$

$$H_{i\,j} = C^{-1}_{(\ell,i)\,(\ell,j)}. \tag{64}$$

اگر خطا یِ سنجش ِ Ξ (متغیرها یِ مستقل ِ خط) ناچیز باشد، مقدارها یِ سنجیده-شده برا یِ Ξ را میشود با خُد ِ Ξ یکی گرفت. یعنی میشود $\boldsymbol{Z}$ را با Ξ یکی گرفت. در این حالت جملِها یِ دوم و سوم در (62) حذف میشوند و (62) به این شکل در میٱید.

$$\Upsilon(\boldsymbol{g},\boldsymbol{u}) = -\frac{1}{2}\,C^{-1}_{(p,i)\,(q,j)}\,[y^{(p,i)} - g^p\,s^i - u^p\,z^i]\,[y^{(q,j)} - g^q\,s^j - u^q\,z^j]. \tag{65}$$

اگر فضا دُ-بُعدی باشد (خط در صفحه)، شاخص ِ اول ِ $\boldsymbol{X}$ حذف میشود و (62) میشود

$$\begin{aligned}\Upsilon(g,u,\boldsymbol{\xi}) = &-\frac{1}{2}\,C^{-1}_{i\,j}\,(y^i - g\,s^i - u\,\xi^i)\,(y^j - g\,s^j - u\,\xi^j)\\ &- F_{i\,j}\,(y^i - g\,s^i - u\,\xi^i)\,(z^j - \xi^j) - \frac{1}{2}\,H_{i\,j}\,(z^i - \xi^i)\,(z^j - \xi^j).\end{aligned} \tag{66}$$

3.1 خط در صفحه، با خطا-یِ-سنجش ِ ناچیز در متغیرها یِ مستقل

در این صورت Ξ هم ان $\boldsymbol{Z}$ است، و شاخص ِ اول ِ $\boldsymbol{X}$ هم حذف میشود. (62) میشود

$$\Upsilon(g,u) = -\frac{1}{2}\,C^{-1}_{i\,j}\,(y^i - g\,s^i - u\,z^i)\,(y^j - g\,s^j - u\,z^j). \tag{67}$$

معادلات ِ بیشینه-ساز ِ Υ میشوند

$$[\boldsymbol{C}^{-1}(\boldsymbol{s},\boldsymbol{s})]\,\bar{g} + [\boldsymbol{C}^{-1}(\boldsymbol{s},\boldsymbol{z})]\,\bar{u} = \boldsymbol{C}^{-1}(\boldsymbol{s},\boldsymbol{y}), \tag{68}$$

$$[\boldsymbol{C}^{-1}(\boldsymbol{s},\boldsymbol{z})]\,\bar{g} + [\boldsymbol{C}^{-1}(\boldsymbol{z},\boldsymbol{z})]\,\bar{u} = \boldsymbol{C}^{-1}(\boldsymbol{z},\boldsymbol{y}), \tag{69}$$

که نتیجه میدهند

$$\bar{g} = \frac{[\boldsymbol{C}^{-1}(\boldsymbol{z},\boldsymbol{z})]\,[\boldsymbol{C}^{-1}(\boldsymbol{s},\boldsymbol{y})] - [\boldsymbol{C}^{-1}(\boldsymbol{s},\boldsymbol{z})]\,[\boldsymbol{C}^{-1}(\boldsymbol{z},\boldsymbol{y})]}{[\boldsymbol{C}^{-1}(\boldsymbol{s},\boldsymbol{s})]\,[\boldsymbol{C}^{-1}(\boldsymbol{z},\boldsymbol{z})] - [\boldsymbol{C}^{-1}(\boldsymbol{s},\boldsymbol{z})]^2}, \\ = \frac{[\boldsymbol{C}^{-1}(\boldsymbol{z},\boldsymbol{z})]\,[\boldsymbol{C}^{-1}(\boldsymbol{s},\boldsymbol{y})] - [\boldsymbol{C}^{-1}(\boldsymbol{s},\boldsymbol{z})]\,[\boldsymbol{C}^{-1}(\boldsymbol{z},\boldsymbol{y})]}{[\boldsymbol{C}^{-1}(\boldsymbol{s},\boldsymbol{s})]^2\,[\mathsf{va}(\boldsymbol{z})]}. \tag{70}$$

$$\bar{u} = \frac{[\boldsymbol{C}^{-1}(\boldsymbol{s},\boldsymbol{s})]\,[\boldsymbol{C}^{-1}(\boldsymbol{z},\boldsymbol{y})] - [\boldsymbol{C}^{-1}(\boldsymbol{s},\boldsymbol{z})]\,[\boldsymbol{C}^{-1}(\boldsymbol{s},\boldsymbol{y})]}{[\boldsymbol{C}^{-1}(\boldsymbol{s},\boldsymbol{s})]\,[\boldsymbol{C}^{-1}(\boldsymbol{z},\boldsymbol{z})] - [\boldsymbol{C}^{-1}(\boldsymbol{s},\boldsymbol{z})]^2}, \\ = \frac{[\boldsymbol{C}^{-1}(\boldsymbol{s},\boldsymbol{s})]\,[\boldsymbol{C}^{-1}(\boldsymbol{z},\boldsymbol{y})] - [\boldsymbol{C}^{-1}(\boldsymbol{s},\boldsymbol{z})]\,[\boldsymbol{C}^{-1}(\boldsymbol{s},\boldsymbol{y})]}{[\boldsymbol{C}^{-1}(\boldsymbol{s},\boldsymbol{s})]^2\,[\mathsf{va}(\boldsymbol{z})]}. \tag{71}$$

با تعریفِ

$$\mathsf{co}(\boldsymbol{z},\boldsymbol{y}) = \frac{\boldsymbol{C}^{-1}\{\boldsymbol{z} - [\mathsf{me}(\boldsymbol{z})]\,\boldsymbol{s}, \boldsymbol{y} - [\mathsf{me}(\boldsymbol{y})]\,\boldsymbol{s}\}}{\boldsymbol{C}^{-1}(\boldsymbol{s},\boldsymbol{s})}, \\ = \frac{[\boldsymbol{C}^{-1}\,(\boldsymbol{s},\boldsymbol{s})]\,[\boldsymbol{C}^{-1}\,(\boldsymbol{z},\boldsymbol{y})] - [\boldsymbol{C}^{-1}\,(\boldsymbol{s},\boldsymbol{z})]\,[\boldsymbol{C}^{-1}\,(\boldsymbol{s},\boldsymbol{y})]}{[\boldsymbol{C}^{-1}\,(\boldsymbol{s},\boldsymbol{s})]^2}, \tag{72}$$

رابطه یِ (71) میشود

$$\bar{u} = \frac{\mathsf{co}(\boldsymbol{z},\boldsymbol{y})}{\mathsf{va}(\boldsymbol{z})}. \tag{73}$$

همچنین،

$$\frac{\partial \bar{g}}{\partial y^i} = \frac{[\boldsymbol{C}^{-1}(\boldsymbol{z},\boldsymbol{z})]\,C^{-1}_{i\,j}\,s^j - [\boldsymbol{C}^{-1}(\boldsymbol{s},\boldsymbol{z})]\,C^{-1}_{i\,j}\,z^j}{[\boldsymbol{C}^{-1}(\boldsymbol{s},\boldsymbol{s})]^2\,[\mathsf{va}(\boldsymbol{z})]}. \tag{74}$$

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial y^i} = \frac{[\boldsymbol{C}^{-1}(\boldsymbol{s},\boldsymbol{s})]\,C^{-1}_{i\,j}\,z^j - [\boldsymbol{C}^{-1}(\boldsymbol{z},\boldsymbol{s})]\,C^{-1}_{i\,j}\,s^j}{[\boldsymbol{C}^{-1}(\boldsymbol{s},\boldsymbol{s})]^2\,[\mathsf{va}(\boldsymbol{z})]}. \tag{75}$$

به این ترتیب،

$$\mathsf{E}[(\bar{g}-\hat{g})^2] = \frac{\boldsymbol{C}^{-1}(\boldsymbol{z},\boldsymbol{z})]}{[\boldsymbol{C}^{-1}(\boldsymbol{s},\boldsymbol{s})]^2\,[\mathsf{va}(\boldsymbol{z})]}. \tag{76}$$

$$\mathsf{E}[(\bar{g}-\hat{g})\,(\bar{u}-\hat{u})] = \frac{-\mathsf{me}(\boldsymbol{z})}{[\boldsymbol{C}^{-1}(\boldsymbol{s},\boldsymbol{s})]\,[\mathsf{va}(\boldsymbol{z})]}. \tag{77}$$

$$\mathsf{E}[(\bar{u}-\hat{u})^2] = \frac{1}{[\boldsymbol{C}^{-1}(\boldsymbol{s},\boldsymbol{s})]\,[\mathsf{va}(\boldsymbol{z})]}. \tag{78}$$

تعریف میکنم

$$P = G + U\,[\mathsf{me}(\boldsymbol{z})]. \tag{79}$$

کمیت ِ P عرض ِ خط به ازا یِ میانگین ِ طول است. رابطِها یِ (76) و (77) میشوند

$$\mathsf{E}[(\bar p-\hat p)^2]=\frac{1}{\boldsymbol{C}^{-1}(\boldsymbol{s},\boldsymbol{s})}. \tag{80}$$

$$\mathsf{E}[(\bar p-\hat p)\,(\bar u-\hat u)]=0. \tag{81}$$

رابطه یِ (12) برا یِ تخمین ِ خطا میشود

$$\mathsf{es}[\boldsymbol{C}^{-1}(\boldsymbol{y}-\bar g\,\boldsymbol{s}-\bar u\boldsymbol{z},\boldsymbol{y}-\bar g\,\boldsymbol{s}-\bar u\boldsymbol{z})]=n-2. \tag{82}$$

از (68) و (69) دیده میشود

$$\boldsymbol{C}^{-1}(\boldsymbol{s},\bar g\,\boldsymbol{s}+\bar u\,\boldsymbol{z})=\boldsymbol{C}^{-1}(\boldsymbol{s},\boldsymbol{y}). \tag{83}$$

$$\boldsymbol{C}^{-1}(\boldsymbol{z},\bar g\,\boldsymbol{s}+\bar u\,\boldsymbol{z})=\boldsymbol{C}^{-1}(\boldsymbol{z},\boldsymbol{y}). \tag{84}$$

به این ترتیب (82) میشود

$$\mathsf{es}[\boldsymbol{C}^{-1}(\boldsymbol{y},\boldsymbol{y})-\boldsymbol{C}^{-1}(\bar g\,\boldsymbol{s}+\bar u\,\boldsymbol{z},\boldsymbol{y})]=n-2. \tag{85}$$

تعریف میکنم

$$\mathsf{re}(\boldsymbol{z},\boldsymbol{y})=\frac{\mathsf{co}(\boldsymbol{z},\boldsymbol{y})}{\sqrt{[\mathsf{va}(\boldsymbol{z})]\,[\mathsf{va}(\boldsymbol{y})]}}. \tag{86}$$

نتیجه میشود

$$\begin{aligned}\boldsymbol{C}^{-1}(\boldsymbol{y}-\bar g\,\boldsymbol{s}-\bar u\,\boldsymbol{z},\boldsymbol{y})&=\frac{[\boldsymbol{C}^{-1}(\boldsymbol{s},\boldsymbol{s})]\,\{[\mathsf{va}(\boldsymbol{z})]\,[\mathsf{va}(\boldsymbol{y})]-[\mathsf{co}(\boldsymbol{z},\boldsymbol{y})]^2\}}{\mathsf{va}(\boldsymbol{z})},\\&=[\boldsymbol{C}^{-1}(\boldsymbol{s},\boldsymbol{s})]\,[\mathsf{va}(\boldsymbol{y})]\,\{1-[\mathsf{re}(\boldsymbol{z},\boldsymbol{y})]^2\},\end{aligned} \tag{87}$$

و رابطه یِ (85) میشود

$$\mathsf{es}\Big([\boldsymbol{C}^{-1}(\boldsymbol{s},\boldsymbol{s})]\,[\mathsf{va}(\boldsymbol{y})]\,\{1-[\mathsf{re}(\boldsymbol{z},\boldsymbol{y})]^2\}\Big)=n-2. \tag{88}$$

این را در (76) تا (78) میگذارم:

$$\mathsf{es}\{\mathsf{E}[(\bar g-\hat g)^2]\}=\frac{1-[\mathsf{re}(\boldsymbol{z},\boldsymbol{y})]^2}{n-2}\,\frac{\mathsf{va}(\boldsymbol{y})}{\mathsf{va}(\boldsymbol{z})}\,\frac{\boldsymbol{C}^{-1}(\boldsymbol{z},\boldsymbol{z})}{\boldsymbol{C}^{-1}(\boldsymbol{s},\boldsymbol{s})}. \tag{89}$$

$$\mathsf{es}\{\mathsf{E}[(\bar g-\hat g)\,(\bar u-\hat u)]\}=\frac{1-[\mathsf{re}(\boldsymbol{z},\boldsymbol{y})]^2}{n-2}\,\frac{\mathsf{va}(\boldsymbol{y})}{\mathsf{va}(\boldsymbol{z})}\,\frac{-\boldsymbol{C}^{-1}(\boldsymbol{s},\boldsymbol{z})}{\boldsymbol{C}^{-1}(\boldsymbol{s},\boldsymbol{s})}. \tag{90}$$

$$\mathsf{es}\{\mathsf{E}[(\bar u-\hat u)^2]\}=\frac{1-[\mathsf{re}(\boldsymbol{z},\boldsymbol{y})]^2}{n-2}\,\frac{\mathsf{va}(\boldsymbol{y})}{\mathsf{va}(\boldsymbol{z})}. \tag{91}$$

رابطِها یِ (80) و (81) هم میشوند

$$\mathsf{es}\{\mathsf{E}[(\bar{p}-\hat{p})^2]\} = \frac{1-[\mathsf{re}(\boldsymbol{z},\boldsymbol{y})]^2}{n-2}\,[\mathsf{va}(\boldsymbol{y})]. \tag{92}$$

$$\mathsf{es}\{\mathsf{E}[(\bar{p}-\hat{p})\,(\bar{u}-\hat{u})]\} = 0. \tag{93}$$

یک حالت ِ ساده این است که خطا یِ سنجش ِ مثلفِها یِ $\boldsymbol{Y}$ یکسان و مستقل از هم باشد:

$$C^{i\,j} = \sigma^2\,\delta^{i\,j}. \tag{94}$$

میانگین ِ ساده یِ کمیت ِ $\bar{\mathfrak{Q}}$ را با $\langle\bar{\mathfrak{Q}}\rangle$ نشان میدهم و آن را چنین تعریف میکنم.

$$\langle\boldsymbol{\mathfrak{Q}}\rangle = \frac{1}{n}\,\sum_i \mathfrak{Q}^i. \tag{95}$$

در این حالت،

$$\mathsf{me}(\boldsymbol{\mathfrak{Q}}) = \langle\bar{\mathfrak{Q}}\rangle. \tag{96}$$

$$\begin{aligned}\mathsf{va}(\boldsymbol{\mathfrak{Q}}) &= \langle[\boldsymbol{\mathfrak{Q}} - \langle\boldsymbol{\mathfrak{Q}}\rangle\,\boldsymbol{s}]^2\rangle,\\ &= \langle[\boldsymbol{\mathfrak{Q}}]^2\rangle - \langle\boldsymbol{\mathfrak{Q}}\rangle^2.\end{aligned} \tag{97}$$

$$\begin{aligned}\mathsf{co}(\boldsymbol{\mathfrak{Q}}_1,\boldsymbol{\mathfrak{Q}}_2) &= \langle[\boldsymbol{\mathfrak{Q}}_1 - \langle\boldsymbol{\mathfrak{Q}}_1\rangle\,\boldsymbol{s}]\,[\boldsymbol{\mathfrak{Q}}_2 - \langle\boldsymbol{\mathfrak{Q}}_2\rangle\,\boldsymbol{s}]\rangle,\\ &= \langle\boldsymbol{\mathfrak{Q}}_1\,\boldsymbol{\mathfrak{Q}}_2\rangle - \langle\boldsymbol{\mathfrak{Q}}_1\rangle\,\langle\boldsymbol{\mathfrak{Q}}_2\rangle.\end{aligned} \tag{98}$$

تخمین ِ پارامترها میشود.

$$\bar{g} = \frac{\langle\boldsymbol{z}^2\rangle\,\langle\boldsymbol{y}\rangle - \langle\boldsymbol{z}\rangle\,\langle\boldsymbol{z}\,\boldsymbol{y}\rangle}{\mathsf{va}(\boldsymbol{z})}. \tag{99}$$

$$\bar{u} = \frac{\langle\boldsymbol{z}\,\boldsymbol{y}\rangle - \langle\boldsymbol{z}\rangle\,\langle\boldsymbol{y}\rangle}{\mathsf{va}(\boldsymbol{z})}. \tag{100}$$

تخمین ِ خطاها هم میشود

$$\mathsf{es}\{\mathsf{E}[(\bar{g}-\hat{g})^2]\} = \frac{1-[\mathsf{re}(\boldsymbol{z},\boldsymbol{y})]^2}{n-2}\,\frac{\mathsf{va}(\boldsymbol{y})}{\mathsf{va}(\boldsymbol{z})}\,\langle\boldsymbol{z}^2\rangle. \tag{101}$$

$$\mathsf{es}\{\mathsf{E}[(\bar{g}-\hat{g})\,(\bar{u}-\hat{u})]\} = \frac{1-[\mathsf{re}(\boldsymbol{z},\boldsymbol{y})]^2}{n-2}\,\frac{\mathsf{va}(\boldsymbol{y})}{\mathsf{va}(\boldsymbol{z})}\,(-\langle\boldsymbol{z}\rangle). \tag{102}$$

$$\mathsf{es}\{\mathsf{E}[(\bar{u}-\hat{u})^2]\} = \frac{1-[\mathsf{re}(\boldsymbol{z},\boldsymbol{y})]^2}{n-2}\,\frac{\mathsf{va}(\boldsymbol{y})}{\mathsf{va}(\boldsymbol{z})}. \tag{91}$$

4 پانوشتها

[1] محمد خرمی؛ «برازش، تخمین، نایقینی I»؛ (2015/07/30) X1-109