X1-119 (2016/10/29)

تانسر ِ انرژی-تکانه III

محمد خرمی mamwad@mailaps.org

سیستمها یی بررسی میشوند که لگرانژی یشان شامل ِ چندپایه است. تانسر ِ انرژی-تکانه برا یِ این سیستمها به دست میئاید.

0 درامد

در [1] و [2] دُ شکل برا یِ تانسر- ِ انرژی-تکانه یِ میدان تعریف و بررسی شد: تانسر- ِ انرژی-تکانه یِ کانُنیک و تانسر- ِ انرژی-تکانه یِ متقارن. تانسر- ِ انرژی-تکانه یِ متقارن و رابطه یِ آن با تانسر- ِ انرژی-تکانه یِ کانُنیک به چیز ی وابسته است که به آن هموردایی یِ عام میگویم، به این معنی که کنش (لَگرانژی) شامل ِ فقط میدان (و مشتقها یِ آن) و هندسه است. اگر هندسه به ضرب ِ درونی محدود شود (مثلَن دستیدِگی یِ کنجها در آن وارد نشود)، نتیجه یِ هموردایی یِ عام این خاهد بود که کنش ِ (لَگرانژی یِ) میدانها یِ تانسری شامل ِ فقط میدان (و مشتقها یِ آن) و متریک (و مشتقها یِ آن) است. اما این نتیجه برا یِ میدانها یِ سْپینُری درست نیست. سْپینُرها بر اساس ِ میدانپایِها یِ یکه-متعامد تعریف میشوند و در نتیجه در لَگرانژی یِ آنها این میدانپایِها (چندپایِها) هم وارد میشود. وقت ی کنش شامل ِ فقط میدان و متریک باشد، تانسر- ِ انرژی-تکانه یِ متقارن بر حسب ِ مشتق ِ کنش نسبت به

متریک به دست میئاید. اما اگر چندپایه هم در کنش وارد شده باشد، مشتقِ کنش نسبت به متریک لزومَن خُش-تعریف نیست، چون با تغییر-دادنِ متریک چندپایه هم تغییر میکند، اما تغییرِ چندپایه به طُرِ یکتا از رو یِ تغییرِ متریک به دست نمیئاید: متریک تابعِ چندپایه هست، اما این تابعیت یک-به-یک نیست و در نتیجه چندپایه تابعِ متریک نیست.

اینجا شکلِ گسترش-یافته ای از هموردایی یِ عام را تعریف میکنم و نشان میدهم اگر هموردایی یِ عام به این معنی برقرار باشد، مشتقِ کنش نسبت به متریک خُش-تعریف است. به این ترتیب تعریفِ (و ویژگیها یِ) تانسُرِ انرژی-تکانه به این حالتها (از جمله سْپینُرها) گسترش میابد.

1 هموردایی یِ عام بر حسبِ چندپایِها

میدانپایِها یِ مختصاتی سرعتها یِ خمها یِ مختصاتی یَند (خمها یی که بر آنها یک مختصه با آهنگِ یک تغییر میکند و بقیه یِ مختصات ثابت َند). میدانپایِها یِ متریک-دِکَرتی آنهایی یَند که حاصل-ِ-ضربها یِشان ثابت است. مثلفِها یِ متناظر با میدانپایِها یِ مختصاتی را با شاخصها یِ پریمدار، و مثلفِها یِ متناظر با میدانپایِها یِ متریک-دِکَرتی را با شاخصها یِ بدون-ِ-پریم نشان میدهم. از جمله،

$$e^a = g^a_{\mu'}\, \mathbf{d}\, x^\mu, \tag{1}$$

که g متریک است. شاخصها با متریک پایین-ُ-بالا میروند، از جمله،

$$g_{\mu'\,\nu'} = g^a_{\mu'}\, g^b_{\nu'}\, g_{a\,b}. \tag{2}$$

دترمینانِ ماتریس ی که عنصرها یَش مثلفِها یِ متریک در میدانپایه یِ مختصاتی یَند را با $\mathfrak{D}$، و دترمینانِ ماتریس ی که عنصرها یَش $g^a_{\mu'}$ ها یَند را با $\mathfrak{D}_e$ نشان میدهم. دیده میشود

$$\mathfrak{D} = \mathfrak{c}(\mathfrak{D}_e)^2, \tag{3}$$

که $\mathfrak{c}$ ثابت است، دترمینانِ ماتریس ی ست که عنصرها یَش مثلفِها یِ متریک در میدانپایه یِ متریک-دِکَرتی یَند. به این ترتیب،

$$\sqrt{|\mathfrak{D}|} = \mathfrak{d}\,\mathfrak{D}_e \tag{4}$$

که $\mathfrak{d}$ ثابت است. اگر e^a ها یکه و دُ-به-دُ بر هم عمود باشند،

$$g^{a\,b} = \pm\,\delta^{a\,b}, \tag{5}$$

آنگاه،

$$|\mathfrak{c}| = 1. \tag{6}$$

اگر علاوه بر این

$$\mathfrak{D}_e > 0. \tag{7}$$

آنگاه،

$$\sqrt{|\mathfrak{D}|} = \mathfrak{D}_e. \tag{8}$$

(5) و (7) را میشود با انتخاب ِ مناسب ِ میدانپایه یِ متریک-دِکَرتی براوَرْد.

$\mathcal{L}$ (چگالی یِ لگرانژی) را تابع ِ فقط میدان ِ ψ (و مشتقها یَش) و میدانپایه یِ متریک-دِکَرتی (و مشتقها یَش) میگیرم. $\tilde{\mathcal{L}}$ را چنین تعریف میکنم.

$$\mathcal{L} = \mathfrak{d}\,\mathfrak{D}_e\,\tilde{\mathcal{L}}. \tag{9}$$

این در واقع هم ان تعریف ی ست که در [2] آمده.

چندپایه یکتا نیست. اگر

$$\underset{\sim}{e}^a = \Lambda^a{}_c\,e^c, \tag{10}$$

که Λ متعامد است:

$$g_{a\,b}\,\Lambda^a{}_c\,\Lambda^b{}_d = g_{c\,d}, \tag{11}$$

آنگاه

$$\underset{\sim}{e}^a\cdot\underset{\sim}{e}^b = e^a\cdot e^b. \tag{12}$$

این رابطه اگر Λ ثابت نباشد هم درست است.

تغییر-دادنِ چندپایه یک تغییر در مئلفها یِ میدانِ تانسُری القا میکند:

$$\underset{\smile}{\psi} = U\,\psi. \tag{13}$$

رُشن است که U به Λ مربوط است.

یک تبدیلِ دیگرِ چندپایه تبدیل ی ست که متریک را با پیشرانِ یک تابع تبدیل میکند: اگر f یک وابرریختی از فضا-زمان به فضا-زمان باشد، $f_*\,e$ را چنان میگیرم که

$$\left[\frac{\partial f^{\mu}}{\partial r^{\alpha}}\,\frac{\partial f^{\nu}}{\partial r^{\beta}}\,(f_*\,g)_{\mu'\,\nu'}\right][f(r)] = g_{\alpha'\,\beta'}(r). \tag{14}$$

$$(f_*\,g)_{a\,b} = g_{a\,b}. \tag{15}$$

$$(f_*\,g)_{\mu'\,\nu'} = (f_*\,g)^{a}_{\mu'}\,(f_*\,g)^{a}_{\nu'}\,(f_*\,g)_{a\,b}. \tag{16}$$

البته (16) اثرِ f_* بر چندپایه را یکتا نمیدهد. اما دیده میشود اگر

$$\left[\frac{\partial f^{\mu}}{\partial r^{\alpha}}\,(f_*\,g)^{a}_{\mu'}\right][f(r)] = g^{a}_{\alpha'}(r), \tag{17}$$

آنگاه (16) براورده میشود.

هموردایی یِ عام را به شکلِ دُ شرط تعریف میکنم:

a اگر چندپایه و میدان با، به ترتیب، (10) و (13) تبدیل شوند، کنش (S) تغییر نمیکند.

b اگر چندپایه با (16)، یا در حالتِ خاص (17)، تبدیل شود، و ناحیه یِ انتگرالگیری برا یِ کنش با f تبدیل شود، کنش تغییر نمیکند.

شرطِ **a** این است که

$$S(\underset{\smile}{e}, \underset{\smile}{\psi}) = S(e, \psi), \tag{18}$$

یا بر حسبِ چگالی-یِ-لگرانژی:

$$\mathcal{L}(\underset{\smile}{e}, \underset{\smile}{\psi}) = \mathcal{L}(e, \psi). \tag{19}$$

رُشن است که

$$\mathfrak{D}_{\underset{\sim}{e}} = \mathfrak{D}_e. \tag{20}$$

به این ترتیب (19) همئرز است با

$$\tilde{\mathcal{L}}(\underset{\sim}{e}, \underset{\sim}{\psi}) = \tilde{\mathcal{L}}(e, \psi). \tag{21}$$

اگر Λ یک تبدیل ِ متعامد ِ پیوسته-به-همانی باشد

$$\Lambda = \exp(\theta). \tag{22}$$

$$\theta = \frac{1}{2}\,\theta^{a\,b}\,M_{b\,a}, \tag{23}$$

که M مولد ِ تبدیل است. $M_{b\,a}$ ها یک پایه برا یِ ماتریسها یِ پادمتقارن میسازند:

$$(M_{a\,b})^c{}_d = g_{a\,d}\,\delta^c_b - g_{b\,d}\,\delta^c_a. \tag{24}$$

اگر ψ یک جواب ِ معادله یِ حرکت باشد، تغییر ِ کنش تا مرتبه یِ یک (جز بخش ی که از مرز ِ ناحیه یِ انتگرالگیری میئاید) نسبت به تغییر ِ ψ صفر است. به این ترتیب با Λ به شکل ِ (22) و (23)، وقت ی θ کوچک است،

$$\begin{aligned} 0 &= [S(\underset{\sim}{e}, \psi) - S(\underset{\sim}{e}, \underset{\sim}{\psi})]_{\rm in} + o(\theta), \\ &= [S(\underset{\sim}{e}, \psi) - S(e, \psi)]_{\rm in} + o(\theta). \end{aligned} \tag{25}$$

شاخص ِ in یعنی بخش ی از تغییر که از مرز ِ ناحیه یِ انتگرالگیری میئاید در نظر گرفته نشده. البته رابطه یِ بالا وقت ی درست است که ψ معادله یِ حرکت را براورَد. به این ترتیب، این رابطه را میشود چنین نوشت.

$$\left(\frac{\delta\, S}{\delta\, \theta^{a\,b}}\right)_{\rm in} \overset{\rm ns}{=} 0. \tag{26}$$

نماد ِ $\overset{\rm ns}{=}$ یعنی دُ-طرف ِ آن رو یِ لاک (وقت ی معادله یِ حرکت براورده میشود) برابر َند. رُشن است که

$$\frac{\delta\, S}{\delta\, \theta^{a\,b}} = \frac{\delta\, S}{\delta\, g^c_{\mu'}}\,\frac{\partial\, g^c_{\mu'}}{\partial\, \theta^{a\,b}}. \tag{27}$$

از (1) و (10) و (22) و (23) هم دیده میشود

$$\frac{\partial\, g^c_{\mu'}}{\partial\, \theta^{a\, b}} = \frac{1}{2}\, (M_{b\, a})^c{}_d\, g^d_{\mu'}. \tag{28}$$

به این ترتیب،

$$\left(\frac{\delta\, S}{\delta\, g^c_{\mu'}}\right)_{\text{in}} g^d_{\mu'}\, (M_{b\, a})^c{}_d \overset{\text{ns}}{=} 0, \tag{29}$$

که با استفاده از (24) نتیجه میدهد

$$\left(\frac{\delta\, S}{\delta\, g^b_{\mu'}}\right)_{\text{in}} g_{a\, \mu'} \overset{\text{ns}}{=} \left(\frac{\delta\, S}{\delta\, g^a_{\mu'}}\right)_{\text{in}} g_{b\, \mu'}. \tag{30}$$

2 تانسُرِ انرژی- تکانه

تعریف میکنم

$$\underset{\sim}{T}_{a\, b} = \left(\frac{\delta\, S}{\delta\, g^a_{\mu'}}\right)_{\text{in}} g_{b\, \mu'}. \tag{31}$$

رابطه یِ (30) یعنی $\underset{\sim}{T}$ رو یِ لاک متقارن است:

$$\underset{\sim}{T}_{b\, a} \overset{\text{ns}}{=} \underset{\sim}{T}_{a\, b}. \tag{32}$$

از (31) دیده میشود

$$\underset{\sim}{T}^{\rho'\, \sigma'} = g^{a\, \rho'} \left(\frac{\delta\, S}{\delta\, g^a_{\sigma'}}\right)_{\text{in}}, \tag{33}$$

و البته

$$\underset{\sim}{T}^{\sigma'\, \rho'} \overset{\text{ns}}{=} \underset{\sim}{T}^{\rho'\, \sigma'}. \tag{34}$$

از (33) دیده میشود

$$\left(\frac{\delta\, S}{\delta\, g^b_{\sigma'}}\right)_{\text{in}} = g_{b\, \rho'}\, \underset{\sim}{T}^{\rho'\, \sigma'}, \tag{35}$$

که با استفاده از تقارن ِ $\underset{\sim}{T}$ (رو ی ِ لاک) نتیجه میدهد

$$\left(\frac{\delta\, S}{\delta\, g^b_{\sigma'}}\right)_{\rm in} \overset{\rm ns}{=} \frac{1}{2}\,\underset{\sim}{T}^{\mu'\,\nu'}\,(g_{b\,\mu'}\,\delta^{\sigma'}_{\nu'}+g_{b\,\nu'}\,\delta^{\sigma'}_{\mu'}). \tag{36}$$

این هم، با استفاده از

$$\frac{\partial\, g_{\mu'\,\nu'}}{\partial\, g^b_{\sigma'}} = g_{b\,\mu'}\,\delta^{\sigma'}_{\nu'}+g_{b\,\nu'}\,\delta^{\sigma'}_{\mu'}, \tag{37}$$

نتیجه میدهد

$$\left(\frac{\delta\, S}{\delta\, g^b_{\sigma'}}\right)_{\rm in} \overset{\rm ns}{=} \frac{1}{2}\,\underset{\sim}{T}^{\mu'\,\nu'}\,\frac{\partial\, g_{\mu'\,\nu'}}{\partial\, g^b_{\sigma'}}. \tag{38}$$

این رابطه نشان میدهد رو ی ِ لاک، تغییر ِ کنش ناشی از تغییر ِ فقط مئلفِها ی ِ متریک است، یعنی اگر چارپایه تغییر کند ولی متریک تغییر نکند کنش تغییر نمیکند. به این ترتیب، رو ی ِ لاک مشتق ِ کنش نسبت به متریک خُش-تعریف است:

$$\left(\frac{\delta\, S}{\delta\, g_{\mu'\,\nu'}}\right)_{\rm in} \overset{\rm ns}{=} \frac{1}{2}\,\underset{\sim}{T}^{\mu'\,\nu'}. \tag{39}$$

از اینجا تانسُر ِ انرژی-تکانه را مشابه با وقت ی بستِگی کنش به چارپایه از طریق ِ فقط متریک است تعریف میکنم:

$$\begin{aligned} T^{\mu'\,\nu'} &\overset{\rm ns}{=} \frac{2}{\sqrt{|\mathfrak{D}|}}\,\left(\frac{\delta\, S}{\delta\, g_{\mu'\,\nu'}}\right)_{\rm in}, \\ &\overset{\rm ns}{=} \frac{1}{\mathfrak{d}\,\mathfrak{D}_e}\,g^{a\,\mu'}\,\left(\frac{\delta\, S}{\delta\, g^a_{\nu'}}\right)_{\rm in}, \\ &\overset{\rm ns}{=} \frac{1}{\mathfrak{d}\,\mathfrak{D}_e}\,\underset{\sim}{T}^{\mu'\,\nu'}. \end{aligned} \tag{40}$$

به این ترتیب شرط ِ **a** نتیجه میدهد تانسُر ِ انرژی-تکانه، حتا اگر بستِگی ی ِ کنش به هندسه را نشود فقط از طریق ِ متریک وارد کرد، دست- ِ-کم رو ی ِ لاک خُش-تعریف و متقارن است.

f را یک خانواده ی ِ یک-پارامتری ی ِ وابرریختیها فضا-زمان میگیرم که پیوسته به همانی ست و نسبت به پارامتر مشتقپذیر است:

$$f^\mu(r) = r^\mu + s\,\xi^{\mu'}(r) + o(s). \tag{41}$$

ξ را چنان میگیرم که رو یِ مرز ِ ناحیه یِ انتگرالگیری برا یِ کنش، خُد َش و تعداد ِ کافی از مشتقها یَش صفر شود، از جمله این که رو یِ مرز ِ ناحیه یِ انتگرالگیری تغییر ِ چندپایه و تعداد ِ کافی از مشتقها یَش صفر شود. شرط ِ **b** نتیجه میدهد

$$\int \frac{\mathrm{d}V}{\mathfrak{d}\,\mathfrak{D}_e}\,\left(\frac{\delta\,S}{\delta\,g^b_{\sigma'}}\right)_{\mathrm{in}}\,\delta\,g^b_{\sigma'}=0. \tag{42}$$

با استفاده از (38) نتیجه میشود

$$\frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}V}{\mathfrak{d}\,\mathfrak{D}_e}\,\underset{\sim}{T}^{\mu'\,\nu'}\,\delta\,g_{\mu'\,\nu'}\overset{\mathrm{ns}}{=}0, \tag{43}$$

که با استفاده از

$$\delta\,g_{\mu'\,\nu'}=(\boldsymbol{\nabla}_{\mu'}\,\xi)_{\nu'}+(\boldsymbol{\nabla}_{\nu'}\,\xi)_{\mu'}, \tag{44}$$

و تقارن ِ $\underset{\sim}{T}$ نتیجه میدهد

$$\int \mathrm{d}V\,\frac{1}{\mathfrak{d}\,\mathfrak{D}_e}\,\underset{\sim}{T}^{\mu'\,\nu'}\,(\boldsymbol{\nabla}_{\mu'}\,\xi)_{\nu'}\overset{\mathrm{ns}}{=}0, \tag{45}$$

یا،

$$\int \mathrm{d}V\,[\boldsymbol{\nabla}_{\mu'}(T\,\xi)]^{\mu'}-[\boldsymbol{\nabla}_{\mu'}\,T]^{\mu'\,\nu'}\,\xi_{\nu'}\overset{\mathrm{ns}}{=}0. \tag{46}$$

جمله یِ اول ِ طرف ِ چپ، به یک انتگرال بر مرز تبدیل میشود، و چون ξ بر مرز صفر است صفر میشود. رابطه یِ بالا برا یِ هر ξ (با این شرط که بر مرز خُد َش و تعداد ِ کافی از مشتقها یَش صفر شود) برقرار است. پس،

$$[\boldsymbol{\nabla}_{\mu'}\,T]^{\mu'\,\nu'}\overset{\mathrm{ns}}{=}0. \tag{47}$$

روش ِ کار هم ان بود که در [2] به کار رفته بود. نتیجه هم هم ان است. ولی این نتیجه حتا اگر کنش صریحَن به چندپایه بستِگی داشته باشد هم درست است.

3 تانسرِ انرژی-تکانه برا یِ میدانِ سْپینُری

تعریفِ هموستار و مشتقِ هموردا برا یِ میدانِ سْپینُری، در مثلَن [3] آمده است. برا یِ نمایشِ سْپینُری، U یِ متناظر با Λ در (22) و (23) میشود

$$U = \exp\left(\frac{1}{2}\,\theta^{a\,b}\,\sigma_{b\,a}\right). \tag{48}$$

$$\sigma_{a\,b} = -\frac{1}{4}\,[\gamma_a, \gamma_b]. \tag{49}$$

γ_a ها ماتریسها یِ دیرَک [4] َند، که ثابت َند و

$$\{\gamma_a, \gamma_b\} = 2\,g_{a\,b}. \tag{50}$$

$$[\sigma_{a\,b}, \sigma_{c\,d}] = g_{a\,c}\,\sigma_{b\,d} - g_{b\,c}\,\sigma_{a\,d} + g_{a\,d}\,\sigma_{c\,b} - g_{b\,d}\,\sigma_{c\,a}. \tag{51}$$

$$\begin{aligned}[\sigma_{a\,b}, \gamma_c] &= g_{a\,c}\,\gamma_b - g_{b\,c}\,\gamma_a,\\ &= -[(M_{a\,c})_b{}^d - (M_{b\,c})_a{}^d]\,\gamma_d.\end{aligned} \tag{52}$$

مشتقِ میدانپایه با هموستار داده میشود. برا یِ هر پایه،

$$\boldsymbol{\nabla}_\mu\,e_\nu = \Gamma^\rho{}_{\mu\,\nu}\,e_\rho, \tag{53}$$

یا

$$\boldsymbol{\nabla}_\mu\,e^\rho = -\Gamma^\rho{}_{\mu\,\nu}\,e^\nu. \tag{54}$$

اگر هموستار با متریک سازگار باشد، در یک میدانپایه یِ متریک-دِکَرتی

$$\Gamma_{c\,a\,b} = -\Gamma_{b\,a\,c}. \tag{55}$$

هوستارِ سْپینُری برا یِ یک هموستارِ سازگار-با-متریک تعریف میشود:

$$\Gamma_a = \frac{1}{2}\,\Gamma_{c\,a\,b}\,\sigma^{b\,c}. \tag{56}$$

مشتقِ هموردا یِ سْپینُرِ ψ چنین میشود.

$$\boldsymbol{\nabla}_a\,\psi = (\partial_a + \Gamma_a)\,\psi. \tag{57}$$

همچنین،

$$\boldsymbol{\nabla}_a\,\bar{\psi} = \partial_a\,\bar{\psi} - \bar{\psi}\,\Gamma_a. \tag{58}$$

مشتق و مشتقِ هموردا یِ ماتریسها یِ دیرَک [4] هم صفر است.

چگالی یِ-لگرانژی برا یِ میدانِ سْپینُری یِ آزاد چنین است.

$$\tilde{\mathcal{L}} = \bar{\psi}(\gamma^a\,\boldsymbol{\nabla}_a - m)\psi, \tag{59}$$

که m یک ثابت است. بستِگی یِ $\tilde{\mathcal{L}}$ به چندپایه از طریقِ مشتقِ هموردا ست:

$$\boldsymbol{\nabla}_a\,\psi = g_a^{\mu'}\,\partial_{\mu'}\,\psi + \Gamma_a\,\psi. \tag{60}$$

بستِگی یِ $\mathcal{L}$ به چندپایه هم از طریقِ $\tilde{\mathcal{L}}$ و $\mathfrak{D}_e$ است.

معادلاتِ حرکت میشوند

$$(\gamma^a\,\boldsymbol{\nabla}_a - m)\psi \overset{\text{ns}}{=} 0, \tag{61}$$

$$\bar{\psi}(\overleftarrow{\boldsymbol{\nabla}}_a\,\gamma^a + m) \overset{\text{ns}}{=} 0, \tag{62}$$

که تعریف شده

$$\mathfrak{X}\,\overleftarrow{\mathfrak{O}} = \mathfrak{O}\,\mathfrak{X}. \tag{63}$$

از (61) نتیجه میشود چگالی-یِ-لگرانژی رو یِ لاک صفر است:

$$\tilde{\mathcal{L}} \overset{\text{ns}}{=} = 0. \tag{64}$$

وردشِ کنش نسبت به چارپایه چنین میشود.

$$\delta\,S = \int \mathrm{d}V\,\left(\frac{\delta\,\mathfrak{D}_e}{\mathfrak{D}_e}\,\tilde{\mathcal{L}} + \delta\,\tilde{\mathcal{L}}\right). \tag{65}$$

با استفاده از (64)، جمله یِ اول ِ طرف ِ راست رو یِ لاک صفر است. پس

$$\delta S \overset{\text{ns}}{=} \int \mathrm{d}V\, \bar{\psi}\, \gamma^a\, [(\delta g_a^{\mu'})\partial_{\mu'} + \delta\, \Gamma_a]\, \psi. \tag{66}$$

هموستار ِ لِوی-چیویتا [5] چنین است.

$$\Gamma_{c\,a\,b} = \frac{1}{2}\,[(g_c^{\mu'}\,\partial_a\, g_{b\,\mu'} - g_b^{\mu'}\,\partial_a\, g_{c\,\mu'}) + g_a^{\mu'}\,(\partial_b\, g_{c\,\mu'} - \partial_c\, g_{a\,\mu'}) + (g_c^{\mu'}\,\partial_b - g_b^{\mu'}\,\partial_c)\, g_{a\,\mu'}]. \tag{67}$$

از این، (56)، و پادتقارن ِ σ نتیجه میشود

$$\gamma^a\, \Gamma_a = \frac{1}{2}\,\gamma^a\, \sigma^{b\,c}\,(g_c^{\mu'}\,\partial_a\, g_{b\,\mu'} + g_a^{\mu'}\,\partial_b\, g_{c\,\mu'} + g_c^{\mu'}\,\partial_b\, g_{a\,\mu'}). \tag{68}$$

به این ترتیب،

$$\gamma^a\, \delta\, \Gamma_a = \frac{1}{2}\,\gamma^a\, \sigma^{b\,c}\,[g_c^{\mu'}\,\partial_a(\delta\, g_{b\,\mu'}) + g_a^{\mu'}\,\partial_b(\delta\, g_{c\,\mu'}) + g_c^{\mu'}\,\partial_b(\delta\, g_{a\,\mu'})] + O_1(\partial\, e), \tag{69}$$

که $O_1(\mathfrak{X})$ چیز ی ست که نسبت به $\mathfrak{X}$ خطی ست. (69) را در (66) میگذارم و با انتگرالگیری یِ جزئ-به-جزئ مشتق را از وردش ِ چارپایه برمیدارم. جملِها یِ مرزی یِ حاصل، در $(\delta S)_{\text{in}}$ وارد نمیشوند. به این ترتیب،

$$(\delta S)_{\text{in}} \overset{\text{ns}}{=} \int \mathrm{d}V\, \Big\{\bar{\psi}\,\gamma^a(\delta g_a^{\mu'})\partial_{\mu'}\,\psi - \frac{1}{2}[g_c^{\mu'}(\delta\, g_{b\,\mu'})\partial_a(\bar{\psi}\,\gamma^a\,\sigma^{b\,c}\,\psi) + g_a^{\mu'}(\delta\, g_{c\,\mu'})\partial_b(\bar{\psi}\,\gamma^a\,\sigma^{b\,c}\,\psi) + g_c^{\mu'}(\delta\, g_{a\,\mu'})\partial_b(\bar{\psi}\,\gamma^a\,\sigma^{b\,c}\,\psi)] + O_1(\partial\, e)\Big\}, \tag{70}$$

که با استفاده از

$$0 = g_a^{\nu'}(\delta\, g_{b\,\nu'}) + (\delta\, g_a^{\nu'})g_{b\,\nu'}, \tag{71}$$

و در نتیجه

$$\delta\, g_a^{\mu'} = -g_a^{\nu'}\, g^{b\,\mu'}(\delta\, g_{b\,\nu'}), \tag{72}$$

میشود

$$(\delta S)_{\rm in} \overset{\rm ns}{=} -\int {\rm d}V\,\Big\{g_a^{\nu'}\,g^{b\,\mu'}(\delta\,g_{b\,\nu'})\bar\psi\,\gamma^a\,\partial_{\mu'}\,\psi+\frac{1}{2}[g_c^{\mu'}(\delta\,g_{b\,\mu'})\partial_a(\bar\psi\,\gamma^a\,\sigma^{b\,c}\,\psi)$$
$$+\,g_a^{\mu'}(\delta\,g_{c\,\mu'})\partial_b(\bar\psi\,\gamma^a\,\sigma^{b\,c}\,\psi)+g_c^{\mu'}(\delta\,g_{a\,\mu'})\partial_b(\bar\psi\,\gamma^a\,\sigma^{b\,c}\,\psi)]$$
$$+\,O_1(\partial\,e)\Big\}. \tag{73}$$

به این ترتیب،

$$\left(\frac{\delta\,S}{\delta\,g_{d\,\sigma'}}\right)_{\rm in} \overset{\rm ns}{=} -(\mathfrak{d}\,\mathfrak{D}_e)\Big\{g_a^{\sigma'}\,g^{d\,\mu'}\,\bar\psi\,\gamma^a\,\partial_{\mu'}\,\psi+\frac{1}{2}[g_c^{\sigma'}\,\partial_a(\bar\psi\,\gamma^a\,\sigma^{d\,c}\,\psi)$$
$$+\,g_a^{\sigma'}\,\partial_b(\bar\psi\,\gamma^a\,\sigma^{b\,d}\,\psi)+g_c^{\sigma'}\,\partial_b(\bar\psi\,\gamma^d\,\sigma^{b\,c}\,\psi)]\Big\}+O_1(\partial\,e), \tag{74}$$

که نتیجه میدهد

$$T^{\rho'\,\sigma'} \overset{\rm ns}{=} -\bar\psi\,\gamma^{\sigma'}\,\partial^{\rho'}\,\psi-\frac{1}{2}\,g_d^{\rho'}\{g_c^{\sigma'}\,\partial_a(\bar\psi\,\gamma^a\,\sigma^{d\,c}\,\psi)$$
$$+\,g_a^{\sigma'}\,\partial_b[\bar\psi(\gamma^a\,\sigma^{b\,d}+\gamma^d\,\sigma^{b\,a})\psi]\}+O_1(\partial\,e). \tag{75}$$

دیده میشود

$$\partial_a(\bar\psi\,\gamma^a\,\sigma^{d\,c}\,\psi)=[(\partial_a\,\bar\psi)\,\gamma^a]\,\sigma^{d\,c}\,\psi+\bar\psi([\gamma^a,\sigma^{d\,c}]+\sigma^{d\,c}\,\gamma^a)\partial_a\,\psi,$$
$$=\bar\psi\,\overleftarrow{\partial}_a\,\gamma^a\,\sigma^{d\,c}\,\psi+\bar\psi\,\sigma^{d\,c}\,\gamma^a\,\partial_a\,\psi$$
$$+\,\bar\psi(g^{a\,c}\gamma^d-g^{a\,d}\,\gamma^c)\partial_a\,\psi. \tag{76}$$

از معادلاتِ حرکت نتیجه میشود

$$(\gamma^a\,\partial_a-m)\psi \overset{\rm ns}{=} O_1(\partial\,e). \tag{77}$$

$$\bar\psi(\overleftarrow{\partial}_a\,\gamma^a+m) \overset{\rm ns}{=} O_1(\partial\,e). \tag{78}$$

به این ترتیب،

$$\partial_a(\bar\psi\,\gamma^a\,\sigma^{d\,c}\,\psi) \overset{\rm ns}{=} \bar\psi(\gamma^d\,\partial^c-\gamma^c\,\partial^d)\psi+O_1(\partial\,e). \tag{79}$$

همچنین،

$$\gamma^a\,\sigma^{b\,d}+\gamma^d\,\sigma^{b\,a}=g^{a\,d}\,\gamma^b-\frac{1}{2}(g^{a\,b}\,\gamma^d+g^{d\,b}\,\gamma^a), \tag{80}$$

که نتیجه میدهد

$$\partial_b[\bar\psi(\gamma^a\,\sigma^{b\,d}+\gamma^d\,\sigma^{b\,a})\psi]\overset{\text{ns}}{=}-\frac{1}{2}\bar\psi[(\overleftarrow{\partial}^d\,\gamma^a+\gamma^a\,\partial^d)+(\overleftarrow{\partial}^a\,\gamma^d+\gamma^d\,\partial^a)]\psi + O_1(\partial\,e). \tag{81}$$

(79) و (81) را در (75) میگذارم. نتیجه میشود

$$T^{\rho'\,\sigma'}\overset{\text{ns}}{=}\frac{1}{4}\,\bar\psi(\overleftarrow{\partial}^{\rho'}\,\gamma^{\sigma'}+\overleftarrow{\partial}^{\sigma'}\,\gamma^{\rho'}-\gamma^{\sigma'}\,\partial^{\rho'}-\gamma^{\rho'}\,\partial^{\sigma'})\psi+O_1(\partial\,e). \tag{82}$$

در هر نقطه میشود چارپایه را چنان گرفت که مشتق ‌َش در آن نقطه صفر شود. در این صورت مشتق ِ هموردا هم ان مشتق ِ پارِئی میشود. به این ترتیب در آن نقطه میشود در طرف ِ راست ِ رابطه یِ بالا جمله یِ آخر را حذف کرد و مشتقها را مشتق ِ هموردا کرد. پس،

$$T^{\rho'\,\sigma'}\overset{\text{ns}}{=}\frac{1}{4}\,\bar\psi(\overleftarrow{\boldsymbol\nabla}^{\rho'}\,\gamma^{\sigma'}+\overleftarrow{\boldsymbol\nabla}^{\sigma'}\,\gamma^{\rho'}-\gamma^{\sigma'}\,\boldsymbol\nabla^{\rho'}-\gamma^{\rho'}\,\boldsymbol\nabla^{\sigma'})\psi. \tag{83}$$

این برابری مستقل-از-پایه است، و در هر نقطه ای میشود به آن رسید. پس مستقل-از-نقطه هم هست.

4 پانوشتها

[1] محمد خرمی؛ «تانسر ِ انرژی-تکانه I»؛ X1-028 (2005/01/07)

[2] محمد خرمی؛ «تانسر ِ انرژی-تکانه II»؛ X1-029 (2005/02/20)

[3] محمد خرمی؛ «سْپینُرها و فضا یِ خمیده»؛ X1-117 (2016/07/28)

[4] Dirac

[5] Levi-Civita