

## نیرو و انرژی برای یک مجموعه رسانا

mamwad@mailaps.org

محمد خرمی

نیرو بر مساحت وارد بر یک دسته رسانا ی بردار به دست می‌آید، با استفاده از تغییر انرژی در اثر جا-جا-به-جایی مجازی و نیز به طر مستقیم.

### 0 مسئله

مرز ناحیه  $V$  شامل یک دسته رسانا است. البته این ناحیه ممکن است تا بینهایت هم برود، که در این صورت بینهایت هم مثل یک رسانا ی بزرگ در نظر گرفته میشود، که پتانسیل آن ثابت است. رسانا ی  $i$  را با  $S_i$  نشان می‌دهم. بردار یکه ی عمود بر مرز رسانا را با  $n$  نشان می‌دهم، و جهت آن را به بیرون ناحیه  $V$  می‌گیرم. رسانا ی  $i$  به پتانسیل  $V^i$  وصل است. اگر  $V$  تا بینهایت رفت  $V^0$  (پتانسیل بینهایت) را هم صفر می‌گیرم. میدان الکتریکی را با  $E$ ، پتانسیل الکتریکی را با  $\phi$ ، و بار رسانا ی  $i$  را با  $Q_i$  نشان می‌دهم.  $U$  (انرژی الکترُستاتیک این مجموعه) میشود

$$U = \frac{\epsilon_0}{2} \int_V dV \mathbf{E} \cdot \mathbf{E}, \quad (1)$$

$$U = \frac{1}{2} \sum_i Q_i V^i. \quad (2)$$

مسئله این است که نیرو-بر-مساحت در هر نقطه از مرز کدام است.

### 1 روش جا-به-جایی-ی-مجازی

کار نیروی الکتریکی به خاطر جا-به-جایی مجازی مرز، برابر با تغییر انرژی الکترستاتیک در پتانسیل ثابت (با هم ان جا-به-جایی مجازی) است (مثلن [1]):

$$(\delta U)_V = \oint_{\partial V} dS \mathbf{f} \cdot \delta \mathbf{r} + o(\delta \mathbf{r}), \quad (3)$$

که  $\mathbf{f}$  نیرو-بر-مساحت است و  $\delta \mathbf{r}$  جا-به-جایی مجازی است. کمیتها ی متناظر با حالت ی که جا-به-جایی مجازی انجام شده است را با پریم نشان میدهم. رُشن است که

$$\delta \Xi = \Xi' - \Xi. \quad (4)$$

از (1) نتیجه میشود

$$(\delta U)_V = \frac{\epsilon_0}{2} \left( \int_{V'} dV \mathbf{E}' \cdot \mathbf{E}' - \int_V dV \mathbf{E} \cdot \mathbf{E} \right) \quad (5)$$

دیده میشود

$$\begin{aligned} \int_{V'} dV \mathbf{E}' \cdot \mathbf{E} - \int_V dV \mathbf{E} \cdot \mathbf{E} = & - \left( \oint_{\partial V'} dS \phi' \mathbf{n} \cdot \mathbf{E} - \oint_{\partial V} dS \phi \mathbf{n} \cdot \mathbf{E} \right) \\ & + \left( \int_{V'} dV \phi' \nabla \cdot \mathbf{E} - \int_V dV \phi \nabla \cdot \mathbf{E} \right). \quad (6) \end{aligned}$$

پرانتر دوم در طرف راست صفر است، چون دیورژانس میدان الکتریکی صفر است. تغییر  $\nabla$  به خاطر تغییر  $\mathbb{S}_i$  را با  $\nabla_i$  نشان می‌دهم.  $(n dS)$  را با  $dS$  نشان می‌دهم. دیده میشود

$$\begin{aligned} \oint_{\partial \mathbb{V}'} dS \cdot \mathbf{E} \phi' - \oint_{\partial \mathbb{V}} dS \cdot \mathbf{E} \phi &= \sum_i V^i \left( \oint_{\mathbb{S}'_i} - \oint_{\mathbb{S}_i} \right) dS \cdot \mathbf{E}, \\ &= \sum_i V^i \int_{\partial(\delta \mathbb{V}_i)} dS \cdot \mathbf{E}, \\ &= \sum_i V^i \int_{\delta \mathbb{V}_i} dV \nabla \cdot \mathbf{E}. \end{aligned} \quad (7)$$

به این ترتیب پرانتر اول در طرف راست (6) هم صفر است. پس

$$\int_{\mathbb{V}'} dV \mathbf{E}' \cdot \mathbf{E} - \int_{\mathbb{V}} dV \mathbf{E} \cdot \mathbf{E} = 0. \quad (8)$$

از اینجا نتیجه میشود

$$(\delta U)_V = \frac{\epsilon_0}{2} \int_{\mathbb{V}'} dV \mathbf{E}' \cdot \delta \mathbf{E}, \quad (9)$$

یا

$$(\delta U)_V = \frac{\epsilon_0}{2} \int_{\mathbb{V}} dV \mathbf{E} \cdot \delta \mathbf{E} + o(\delta \mathbf{r}). \quad (10)$$

به این ترتیب، با استفاده از این که دیورژانس میدان الکتریکی صفر است،

$$\begin{aligned} (\delta U)_V &= -\frac{\epsilon_0}{2} \int_{\mathbb{V}} dV \nabla \cdot (\mathbf{E} \delta \phi) + o(\delta \mathbf{r}), \\ &= -\frac{\epsilon_0}{2} \oint_{\partial \mathbb{V}} dS \mathbf{n} \cdot \mathbf{E} \delta \phi + o(\delta \mathbf{r}). \end{aligned} \quad (11)$$

شرط مرزی برای پتانسیل نتیجه میدهد

$$\delta \phi + (\nabla \phi) \cdot \delta \mathbf{r} = o(\delta \mathbf{r}), \quad \mathbf{r} \in (\partial \mathbb{V}). \quad (12)$$

به این ترتیب،

$$(\delta U)_V = -\frac{\epsilon_0}{2} \oint_{\partial \mathbb{V}} dS (\mathbf{n} \cdot \mathbf{E})(\mathbf{E} \cdot \delta \mathbf{r}) + o(\delta \mathbf{r}). \quad (13)$$

نیرو و انرژی برای یک مجموعه رسانا

بر سطح رسانا، میدان الکتریکی با بردار عمود-بر-سطح موازی است. پس،

$$(\delta U)_V = -\frac{\varepsilon_0}{2} \oint_{\partial V} dS (\mathbf{E} \cdot \mathbf{E}) \mathbf{n} \cdot \delta \mathbf{r} + o(\delta \mathbf{r}), \quad (14)$$

و از آنجا

$$\mathbf{f} = -\frac{\varepsilon_0}{2} (\mathbf{E} \cdot \mathbf{E}) \mathbf{n}. \quad (15)$$

تغییر انرژی الکترستاتیک را به تغییر ظرفیت هم میشود مربوط کرد. ماتریس ظرفیت را با  $C$  نشان میدهم:

$$U = \frac{1}{2} C_{ij} V^i V^j. \quad (16)$$

در این صورت،

$$(\delta C_{ij}) V^i V^j = -\varepsilon_0 \oint_{\partial V} dS (\mathbf{E} \cdot \mathbf{E}) \mathbf{n} \cdot \delta \mathbf{r} + o(\delta \mathbf{r}). \quad (17)$$

## 2 روش مستقیم

نیرو-بر-مساحت وارد بر یک چگالی سطحی چنین میشود

$$\mathbf{f} = \sigma \mathbf{E}_{av}, \quad (18)$$

که  $\sigma$  چگالی سطحی و  $\mathbf{E}_{av}$  میانگین میدان در د-سوی سطح است. اگر سطح رسانا باشد، میدان درون رسانا صفر است و بیرون رسانا (و بر سطح رسانا)

$$\mathbf{E} = -\frac{\sigma}{\varepsilon_0} \mathbf{n}, \quad (19)$$

که  $\mathbf{n}$  بردار یکه عمود بر رسانا به سوی درون رسانا است. به این ترتیب،

$$\mathbf{E}_{av} = -\frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \mathbf{n}, \quad (20)$$

که نتیجه میدهد

$$\mathbf{f} = -\frac{1}{2\epsilon_0} \sigma^2 \mathbf{n}, \quad (21)$$

که ترکیب آن با (19) هم هم ان (15) است.

### 3 پانوشتها

- [1] John David Jackson; "Classical electrodynamics" 3rd edition (John Wiley & Sons, 1998) chapter 4