X1-133 (2018/07/24)

میدان ِ یک ذره یِ باردار ِ فرانوری

محمد خرمی mamwad@mailaps.org

درون ِ ماده، ذرات ِ باردار میتوانند سریعتر از نور حرکت کنند. میدانها یِ الکتریکی و مغناطیسی یِ یک ذره یِ باردار به دست میئاید که درون ِ ماده سریعتر از نور حرکت میکند.

1 معادلات ِ میدان

چنان که در مثلَن فصل ِ 6 از [1] آمده، معادلات ِ میدانها یِ الکترُمغناطیسی درون ِ ماده (معادلات ِ ماکرُسکپی یِ مَکسوِل [2]) چنین است.

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{B}=0. \tag{1}$$

$$\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{E}+\nabla_0\,\boldsymbol{B}=0. \tag{2}$$

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{D}=\rho. \tag{3}$$

$$\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{H}-\nabla_0\boldsymbol{D}=\boldsymbol{J}. \tag{4}$$

$\boldsymbol{E}$ میدانِ الکتریکی، $\boldsymbol{B}$ میدانِ مغناطیسی، $\boldsymbol{D}$ چگالی یِ شارِ الکتریکی، و $\boldsymbol{H}$ چگالی یِ گردشِ مغناطیسی ست. $\boldsymbol{\nabla}$ مشتق-گیری نسبت به مکان $(\boldsymbol{r})$، و ∇_0 مشتق-گیری نسبت به زمان (t) است. ρ و $\boldsymbol{J}$، به ترتیب، چگالی-یِ-بار و چگالی-یِ-جریانِ آزاد َند. چشمِها (ρ و $\boldsymbol{J}$) معادله یِ پیوستگی را بر میئاورند:

$$\nabla_0\,\rho + \boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{J} = 0. \tag{5}$$

البته این معادله از (3) و (4) مستقل نیست.

معادلاتِ (1) و (2) را میشود بر حسبِ پتانسیلها یِ اسکالر و برداری (ϕ و $\boldsymbol{A}$) حل کرد:

$$\boldsymbol{B} = \boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{A}. \tag{6}$$

$$\boldsymbol{E} = -\boldsymbol{\nabla}\,\phi - \nabla_0\,\boldsymbol{A}. \tag{7}$$

برا یِ حلِ معادلاتِ (3) و (4)، روابطِ ساختاری (بستِگی یِ $\boldsymbol{D}$ و $\boldsymbol{H}$ به $\boldsymbol{E}$ و $\boldsymbol{B}$) لازم است. در سادِترین حالت، این بستِگیها با پارامترها یِ عددی و ثابتِ ε و μ (گذردهی یِ و تراوایی) داده میشود:

$$\boldsymbol{D} = \varepsilon\,\boldsymbol{E}. \tag{8}$$

$$\boldsymbol{H} = \frac{\boldsymbol{B}}{\mu}. \tag{9}$$

البته ماده ای نیست که برا یِ آن این روابط همواره (در همه یِ بسامدها و شدت-ِ-میدانها) برقرار باشند، جز خلئ. اما در ادامه فرض میشود این روابط برقرار َند. در این صورت (3) و (4) میشوند

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{E} = \frac{\rho}{\varepsilon}. \tag{10}$$

$$\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{B} - \mu\,\varepsilon\,\nabla_0\,\boldsymbol{E} = \mu\,\boldsymbol{J}. \tag{11}$$

بر حسبِ پتانسیلها،

$$-\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{\nabla}\,\phi - \nabla_0\,\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{A} = \frac{\rho}{\varepsilon}. \tag{12}$$

$$-\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{\nabla}\,\boldsymbol{A} + \boldsymbol{\nabla}(\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{A}) + \mu\,\varepsilon\,\boldsymbol{\nabla}\,\nabla_0\,\phi + \mu\,\varepsilon\,\nabla_0\,\nabla_0\,\boldsymbol{A} = \mu\,\boldsymbol{J}. \tag{13}$$

جواب ِ این معادلات برا یِ پتانسیلها، با شرایط ِ اولیه، یکتا نیست. برا یِ به-دست-آوردن ِ جواب تثبیت ِ پیمانه لازم است. یک انتخاب پیمانه یِ لُرِنتس [3] است:

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{A}+\mu\,\varepsilon\,\nabla_0\,\phi=0. \tag{14}$$

معادلات میشوند

$$(-\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{\nabla}+\mu\,\varepsilon\,\nabla_0\,\nabla_0)\phi=\frac{\rho}{\varepsilon}. \tag{15}$$

$$(-\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{\nabla}+\mu\,\varepsilon\,\nabla_0\,\nabla_0)\boldsymbol{A}=\mu\,\boldsymbol{J}. \tag{16}$$

اینها معادله-یِ-مُج ِ ساده با سرعت- ِ-انتشار ِ u اند، که

$$u=\frac{1}{\sqrt{\mu\,\varepsilon}}. \tag{17}$$

u سرعت ِ انتشار ِ نور در محیط است. (15) و (16) حالتها یی از معادله یِ

$$\left(-\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{\nabla}+\frac{1}{u^2}\,\nabla_0\,\nabla_0\right)\mathfrak{X}=\mathfrak{S} \tag{18}$$

اند. جواب ِ این معادله، با این شرط که برا یِ $\mathfrak{S}$ ها یِ جایگزیده-در-زمان $\mathfrak{X}$ در گذشته یِ دور صفر شود، چنین است.

$$\mathfrak{X}(t,\boldsymbol{r})=\frac{1}{4\,\pi}\int\frac{\mathrm{d}^3\,r'\,\mathrm{d}\,t'}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\,\delta\left(t-t'-\frac{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}{u}\right)\,\mathfrak{S}(t',\boldsymbol{r}'), \tag{19}$$

که با انتگرال-گیری بر t' میشود

$$\mathfrak{X}(t,\boldsymbol{r})=\frac{1}{4\,\pi}\int\frac{\mathrm{d}^3\,r'}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\,\mathfrak{S}\left(t-\frac{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}{u},\boldsymbol{r}'\right). \tag{20}$$

به این ترتیب جوابها یِ معادلات ِ (15) و (16) میشوند.

$$\phi(t,\boldsymbol{r})=K\int\frac{\mathrm{d}^3\,r'\,\mathrm{d}\,t'}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\,\delta\left(t-t'-\frac{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}{u}\right)\,\rho(t',\boldsymbol{r}'), \tag{21}$$

$$\boldsymbol{A}(t,\boldsymbol{r})=\frac{K}{u^2}\int\frac{\mathrm{d}^3\,r'\,\mathrm{d}\,t'}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\,\delta\left(t-t'-\frac{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}{u}\right)\,\boldsymbol{J}(t',\boldsymbol{r}'), \tag{22}$$

که

$$K=\frac{1}{4\,\pi\,\varepsilon}. \tag{23}$$

و البته (21) و (22) را هم میشود چنین نوشت.

$$\phi(t,\boldsymbol{r}) = K \int \frac{\mathrm{d}^3\, r'}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\, \rho\left(t - \frac{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}{u}, \boldsymbol{r}'\right). \tag{24}$$

$$\boldsymbol{A}(t,\boldsymbol{r}) = \frac{K}{u^2} \int \frac{\mathrm{d}^3\, r'}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\, \boldsymbol{J}\left(t - \frac{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}{u}, \boldsymbol{r}'\right). \tag{25}$$

اینها هم مشابه ِ هم ان َند که در فصل ِ 6 از [1] آمده، اگر ε و μ به جا یِ ε_0 و μ_0 به کار روند.

2 پتانسیل و میدان ِ ذره ای که با سرعت ِ ثابت حرکت میکند

برا یِ ذره ای با بار ِ q که مکان َ ش $\boldsymbol{r}_\mathrm{s}$ (وابسته به زمان) است،

$$\rho(t,\boldsymbol{r}) = q\, \delta[\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_\mathrm{s}(t)]. \tag{26}$$

$$\boldsymbol{J}(t,\boldsymbol{r}) = \boldsymbol{v}_\mathrm{s}(t)\, \rho(t,\boldsymbol{r}), \tag{27}$$

که $\boldsymbol{v}_\mathrm{s}$ سرعت ِ ذره است:

$$\boldsymbol{v}_\mathrm{s} = \mathrm{D}\, \boldsymbol{r}_\mathrm{s}. \tag{28}$$

D مشتق-گیری ست. (21) و (22) میشوند

$$\phi(t,\boldsymbol{r}) = K\, q \int \frac{\mathrm{d}\, t'}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_\mathrm{s}(t')|}\, \delta\left[t - t' - \frac{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_\mathrm{s}(t')|}{u}\right]. \tag{29}$$

$$\boldsymbol{A}(t,\boldsymbol{r}) = \frac{K\, q}{u^2} \int \frac{\mathrm{d}\, t'\, \boldsymbol{v}_\mathrm{s}(t')}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_\mathrm{s}(t')|}\, \delta\left[t - t' - \frac{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_\mathrm{s}(t')|}{u}\right]. \tag{30}$$

تعریف میکنم

$$-t + t' + \frac{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_\mathrm{s}(t')|}{u} =: f(t,t',\boldsymbol{r}). \tag{31}$$

مشتق ِ f نسبت به t' را با λ، و t' ها یی که در آنها f صفر میشود (زمانها یِ تئخیری) را با t_a ها نشان میدهم:

$$f(t,t_a,\boldsymbol{r}) = 0. \tag{32}$$

تعریف میکنم

$$\boldsymbol{r}_{\mathrm{s}}(t_a) =: \boldsymbol{r}_a. \tag{33}$$

$$\boldsymbol{v}_{\mathrm{s}}(t_a) =: \boldsymbol{v}_a. \tag{34}$$

$$\lambda(t, t_a, \boldsymbol{r}) =: \lambda_a. \tag{35}$$

پس،

$$(t - t_a)u = |\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_a|. \tag{36}$$

همچنین،

$$\phi(t, \boldsymbol{r}) = K\, q \sum_a \frac{1}{|\lambda_a|\, |\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_a|}. \tag{37}$$

$$\boldsymbol{A}(t, \boldsymbol{r}) = \frac{K\, q}{u^2} \sum_a \frac{\boldsymbol{v}_a}{|\lambda_a|\, |\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_a|}. \tag{38}$$

از این پس $\boldsymbol{v}_{\mathrm{s}}$ را ثابت میگیرم. در این صورت $\boldsymbol{v}_a$ هم ان $\boldsymbol{v}_{\mathrm{s}}$ است، و

$$\boldsymbol{A}(t, \boldsymbol{r}) = \frac{\boldsymbol{v}_{\mathrm{s}}}{u^2}\, \phi(t, \boldsymbol{r}). \tag{39}$$

به این ترتیب،

$$\boldsymbol{E} = -\left(\boldsymbol{\nabla} + \frac{\boldsymbol{v}_{\mathrm{s}}}{u^2}\, \nabla_0\right) \phi. \tag{40}$$

$$\boldsymbol{B} = -\frac{\boldsymbol{v}_{\mathrm{s}}}{u^2} \times \boldsymbol{\nabla}\, \phi. \tag{41}$$

از جمله رُشن است که

$$\boldsymbol{B} = \frac{\boldsymbol{v}_{\mathrm{s}}}{u^2} \times \boldsymbol{E}. \tag{42}$$

دیده میشود

$$
\begin{aligned}
\lambda_a^2\,|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_a|^2 &= \left[|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_a| - \frac{(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_a)\cdot\boldsymbol{v}_\mathrm{s}}{u}\right]^2,\\
&= (\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_a)\cdot(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_a) - 2\,(t-t_a)(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_a)\cdot\boldsymbol{v}_\mathrm{s}\\
&\quad + \left[\frac{(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_a)\cdot\boldsymbol{v}_\mathrm{s}}{u}\right]^2,\\
&= [\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_a-(t-t_a)\boldsymbol{v}_\mathrm{s}]\cdot[\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_a-(t-t_a)\boldsymbol{v}_\mathrm{s}] - [(t-t_a)\boldsymbol{v}_\mathrm{s}]^2\\
&\quad + \left[\frac{(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_a)\cdot\boldsymbol{v}_\mathrm{s}}{u}\right]^2,\\
&= [\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_\mathrm{s}(t)]\cdot[\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_\mathrm{s}(t)] - (\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_a)\cdot(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_a)\,\frac{\boldsymbol{v}_\mathrm{s}\cdot\boldsymbol{v}_\mathrm{s}}{u^2}\\
&\quad + (\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_a)_\parallel\cdot(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_a)_\parallel\,\frac{\boldsymbol{v}_\mathrm{s}\cdot\boldsymbol{v}_\mathrm{s}}{u^2},\\
&= [\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_\mathrm{s}(t)]\cdot[\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_\mathrm{s}(t)] - (\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_a)_\perp\cdot(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_a)_\perp\,\frac{\boldsymbol{v}_\mathrm{s}\cdot\boldsymbol{v}_\mathrm{s}}{u^2},
\end{aligned}
\tag{43}
$$

که موازی ($\|$) و قائم ($\perp$) نسبت به $\boldsymbol{v}_\mathrm{s}$ اند. رُشن است که

$$
(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_a)_\perp = [\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_\mathrm{s}(t)]_\perp. \tag{44}
$$

به این ترتیب،

$$
\begin{aligned}
\lambda_a^2\,|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_a|^2 &= [\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_\mathrm{s}(t)]_\parallel\cdot[\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_\mathrm{s}(t)]_\parallel\\
&\quad + [\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_\mathrm{s}(t)]_\perp\cdot[\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_\mathrm{s}(t)]_\perp\left(1-\frac{\boldsymbol{v}_\mathrm{s}\cdot\boldsymbol{v}_\mathrm{s}}{u^2}\right).
\end{aligned}
\tag{45}
$$

دیده میشود طرف ِ راست مستقل از a است و به فقط مکان ِ نقطه یِ مشاهده، مکان ِ بار در زمان ِ مشاهده (و البته سرعت ِ بار) بستِگی دارد. تعریف میکنم

$$
1-\frac{\boldsymbol{v}_\mathrm{s}\cdot\boldsymbol{v}_\mathrm{s}}{u^2} =: \mathfrak{g}. \tag{46}
$$

$$
\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_\mathrm{s}(t) =: \boldsymbol{\mathfrak{R}}(t,\boldsymbol{r}). \tag{47}
$$

به این ترتیب،

$$
\lambda_a^2\,|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_a|^2 = \mathfrak{R}_\parallel^2(t,\boldsymbol{r}) + \mathfrak{g}\,|\boldsymbol{\mathfrak{R}}_\perp(t,\boldsymbol{r})|^2. \tag{48}
$$

$\mathfrak{Y}_{\|}$ تصویر ِ $\mathfrak{Y}$ در جهت ِ $\boldsymbol{v}_{\mathrm{s}}$ است. رابطه ی ِ (37) میشود

$$\phi(t,\boldsymbol{r}) = \frac{m\,K\,q}{[\mathfrak{R}_{\|}^2(t,\boldsymbol{r}) + \mathfrak{g}\,|\boldsymbol{\mathfrak{R}}_{\perp}(t,\boldsymbol{r})|^2]^{1/2}}, \tag{49}$$

که m تعداد ِ جوابها ی ِ معادله ی ِ (32) برا ی ِ t_a است. رابطه ی ِ (40) میشود

$$\boldsymbol{E}(t,\boldsymbol{r}) = \frac{m\,K\,q}{[\mathfrak{R}_{\|}^2(t,\boldsymbol{r}) + \mathfrak{g}\,|\boldsymbol{\mathfrak{R}}_{\perp}(t,\boldsymbol{r})|^2]^{3/2}} \Big(\boldsymbol{\mathfrak{R}}_{\|}(t,\boldsymbol{r}) + \mathfrak{g}\,\boldsymbol{\mathfrak{R}}_{\perp}(t,\boldsymbol{r}) - \frac{\boldsymbol{v}_{\mathrm{s}}}{u^2}\{[\boldsymbol{\mathfrak{R}}_{\|}(t,\boldsymbol{r})]\cdot\boldsymbol{v}_{\mathrm{s}}\}\Big), \tag{50}$$

یا

$$\boldsymbol{E}(t,\boldsymbol{r}) = \frac{m\,K\,q\,\mathfrak{g}\,\boldsymbol{\mathfrak{R}}(t,\boldsymbol{r})}{[\mathfrak{R}_{\|}^2(t,\boldsymbol{r}) + \mathfrak{g}\,|\boldsymbol{\mathfrak{R}}_{\perp}(t,\boldsymbol{r})|^2]^{3/2}}. \tag{51}$$

دیده میشود میدان ِ الکتریکی در راستا ی ِ خط ی ست که بار (در زمان ِ مشاهده) را به نقطه ی ِ مشاهده وصل میکند. تصویر ِ میدان در جهت ِ خط ی که بار (در زمان ِ مشاهده) را به نقطه ی ِ مشاهده وصل میکند را با E نشان میدهم:

$$E(t,\boldsymbol{r}) = \frac{m\,K\,q\,\mathfrak{g}\,|\boldsymbol{\mathfrak{R}}(t,\boldsymbol{r})|}{[\mathfrak{R}_{\|}^2(t,\boldsymbol{r}) + \mathfrak{g}\,|\boldsymbol{\mathfrak{R}}_{\perp}(t,\boldsymbol{r})|^2]^{3/2}}. \tag{52}$$

تعریف میکنم

$$\cos^{-1}\left[\frac{\boldsymbol{v}_{\mathrm{s}}\cdot[\boldsymbol{\mathfrak{R}}(t,\boldsymbol{r})]}{|\boldsymbol{v}_{\mathrm{s}}|\,|\boldsymbol{\mathfrak{R}}(t,\boldsymbol{r})|}\right] =: \theta. \tag{53}$$

$$\frac{m\,\mathfrak{g}}{(\cos^2\theta + \mathfrak{g}\,\sin^2\theta)^{3/2}} =: W(\theta). \tag{54}$$

به این ترتیب،

$$E(t,\boldsymbol{r}) = \frac{K\,q}{|\boldsymbol{\mathfrak{R}}(t,\boldsymbol{r})|^2}\,W(\theta). \tag{55}$$

ضریب ِ W در طرف ِ راست، هم ان میدان ِ بار ِ ساکن است. W بستِگی ی ِ میدان ِ بار ِ متحرک به زاویه را میدهد. قضیه ی ِ گاؤس [4] برا ی ِ گوی ی که مرکز َ ش جا ی ِ بار است، نتیجه میدهد انتگرال ِ W بر زاویه ی ِ فضایی ($4\,\pi$) است، که یعنی

$$\int_0^{\pi} \mathrm{d}\,\theta\,\sin\theta\,W(\theta) = 2. \tag{56}$$

3 شکل ِ میدان

شکل ِ میدان ِ الکتریکی به این وابسته است که نسبت ِ سرعت ِ بار به سرعت ِ نور در محیط کوچکتر از یک است (فرونوری)، برابر با یک است (نوری)، یا بزرگتر از یک است (فرانوری). این نسبت، از جمله مقدار ِ m را تعیین میکند.

3.1 تعداد ِ زمانها یِ تئخیری

با مجذور-کردن ِ رابطه یِ (36) نتیجه میشود

$$\begin{aligned} u^2(t-t_a)^2 &= |\mathfrak{R}(t,\boldsymbol{r})+\boldsymbol{v}_\mathrm{s}(t-t_a)|^2,\\ &= |\mathfrak{R}(t,\boldsymbol{r})|^2+2\,\boldsymbol{v}_\mathrm{s}\cdot[\mathfrak{R}(t,\boldsymbol{r})](t-t_a)+\boldsymbol{v}_\mathrm{s}\cdot\boldsymbol{v}_\mathrm{s}(t-t_a)^2, \end{aligned} \tag{57}$$

یا

$$-\mathfrak{g}\,(t-t_a)^2+2\,\frac{\boldsymbol{v}_\mathrm{s}\cdot[\mathfrak{R}(t,\boldsymbol{r})]}{u^2}\,(t-t_a)+\frac{|\mathfrak{R}(t,\boldsymbol{r})|^2}{u^2}=0. \tag{58}$$

البته از (36) دیده میشود $(t-t_a)$ نامنفی ست. پس فقط جوابها یِ نامنفی یِ (58) برا یِ $(t-t_a)$ پذیرفتنی یَند.

در حالت ِ فرونوری $\mathfrak{g}$ مثبت است. در این حالت (58) برا یِ $(t-t_a)$ یک جواب ِ مثبت و یک ریشه یِ منفی دارد. پس m یک است.

در حالت ِ فرانوری $\mathfrak{g}$ منفی ست. در این حالت (58) برا یِ $(t-t_a)$ دُ ریشه یِ هم-علامت دارد، به شرط ِ آن که مبین ِ معادله مثبت باشد. این جوابها مثبت َند (پذیرفتنی یَند)، به شرط ِ این که $\{\boldsymbol{v}_\mathrm{s}\cdot[\mathfrak{R}(t,\boldsymbol{r})]\}$ منفی باشد. برا یِ حالت ِ فرانوری تعریف میکنم

$$\sin^{-1}\left(\frac{u}{|\boldsymbol{v}_\mathrm{s}|}\right)=:\psi. \tag{59}$$

نتیجه میشود m صفر است اگر θ کوچکتر از $(\pi-\psi)$ باشد، و دُ است اگر θ بزرگتر از $(\pi-\psi)$ باشد.

خلاصه،

$$m = \begin{cases} 1, & |\boldsymbol{v}_{\rm s}| < u \\ 0, & |\boldsymbol{v}_{\rm s}| > u \wedge \theta < (\pi - \psi) \\ 2, & |\boldsymbol{v}_{\rm s}| > u \wedge \theta > (\pi - \psi) \end{cases} \cdot \tag{60}$$

3.2 حالتِ فرونوری

رابطه یِ (54) میشود

$$W(\theta) = \frac{\mathfrak{g}}{(\cos^2\theta + \mathfrak{g}\,\sin^2\theta)^{3/2}}. \tag{61}$$

$\mathfrak{g}$ بینِ صفر و یک است. W نسبت به $\cos^2\theta$ نزولی ست (مگر بار ساکن باشد، که در این صورت $\mathfrak{g}$ یک و W مستقل از θ میشود). این یعنی خطها یِ میدان به طرفِ صفحه یِ عمود بر سرعتِ بار (و گذرنده از بار) جمع میشوند. هر چه سرعتِ بار بیشتر باشد این ناهمسانگردی شدیدتر میشود. البته میدان نسبت به صفحه یِ عمود بر سرعتِ بار (و گذرنده از بار) متقارن است. با محاسبه یِ مستقیم، معلوم میشود (56) برقرار است.

3.3 حالتِ فرانوری

ظاهرَن رابطه یِ (54) میشود

$$W(\theta) = -2\,\cot^2\psi\,\frac{\Theta(\theta + \psi - \pi)}{(\cos^2\theta - \cot^2\psi\,\sin^2\theta)^{3/2}}, \tag{62}$$

که Θ تابعِ هِویسایِد [5] (پله یِ واحد) است. از این رابطه دیده میشود میدان فقط درونِ مخروطِ چرِنکُف [6] ناصفر است. این ناحیه مخروط ی ست که رئس َش جا یِ بار، محورَش مسیرِ (گذشته یِ) بار، و نیم-زاویه-یِ-رئس َش ψ است. اما رابطه یِ (62) مشکلات ی دارد. یک مشکل جهتِ میدانِ الکتریکی ست. برا یِ حالتِ فرانوری $\mathfrak{g}$ منفی ست. پس اگر بار مثبت باشد میدانِ الکتریکی به سو یِ بار است. مشکلِ دیگر این که انتگرالِ W بر زاویه یِ فضایی بینهایت میشود: W در θ یِ نزدیک به $(\pi - \psi)$ مثلِ $(\theta + \psi - \pi)^{-3/2}$ رفتار میکند. در نتیجه طرفِ راستِ (56)، به جا یِ این که 2 بشود $(-\infty)$ میشود.

ریشه ی ِ این مشکلها در مشتق-گیری ی ِ نادقیق از پتانسیل ِ الکتریکی، رابطه ی ِ (49)، است. این پتانسیل برا ی ِ حالت ِ فرانوری و در θ ی ِ نزدیک به $(\pi-\psi)$ مثل ِ $(\theta+\psi-\pi)^{-1/2}$ رفتار میکند. خُد ِ این پتانسیل مشکل ی ندارد: هر چند در θ به سو ی ِ $(\pi-\psi)$ بینهایت میشود، انتگرال-پذیر است. اما مشتق ِ پتانسیل که در میدان ظاهر میشود، با شکل ِ معمول ِ مشتق-گیری انتگرال-پذیر نیست. آن چه در میدان ظاهر میشود مشتق ِ تُزیعی ی ِ پتانسیل است. مشتق ِ تُزیعی ی ِ $\mathfrak{F}$، با اثر ِ آن بر تابع- ِ-آزمون ِ $\mathfrak{p}$، چنین تعریف میشود (مثلَن فصل ِ 2 از [7]) :

$$\int \mathrm{d}\,\xi\,[(\mathrm{D}\,\mathfrak{F})(\xi)][\mathfrak{p}(\xi)] := -\int \mathrm{d}\,\xi\,[\mathfrak{F}(\xi)][(\mathrm{D}\,\mathfrak{p})(\xi)]. \tag{63}$$

این رابطه را برا ی ِ

$$\mathfrak{F}(\xi) = \frac{\Theta(\xi)}{\xi^{1/2}} \tag{64}$$

به کار میبرم. برا ی ِ مشتق ِ تُزیعی ی ِ طرف ِ راست هم علامت ِ شبه- ِ-تابع (pf) را به کار میبرم:

$$(\mathrm{D}\,\mathfrak{F})(\xi) = -\frac{1}{2}\,\mathrm{pf}\left[\frac{\Theta(\xi)}{\xi^{3/2}}\right]. \tag{65}$$

دیده میشود

$$\begin{aligned}\int \mathrm{d}\,\xi\,\left\{\mathrm{pf}\left[\frac{\Theta(\xi)}{\xi^{3/2}}\right]\right\}[\mathfrak{p}(\xi)] &= 2\int \mathrm{d}\,\xi\,\left[\frac{\Theta(\xi)}{\xi^{1/2}}\right][(\mathrm{D}\,\mathfrak{p})(\xi)],\\ &= \lim_{s\to 0^+}\left[2\int_s^\infty \mathrm{d}\,\xi\,\frac{(\mathrm{D}\,\mathfrak{p})(\xi)}{\xi^{1/2}}\right],\\ &= \lim_{s\to 0^+}\left[-2\,\frac{\mathfrak{p}(s)}{s^{1/2}} + \int_s^\infty \mathrm{d}\,\xi\,\frac{\mathfrak{p}(\xi)}{\xi^{3/2}}\right].\end{aligned} \tag{66}$$

از اینجا یک نمایش برا ی ِ $\mathrm{pf}[\xi^{-3/2}\,\Theta(\xi)]$ به دست میئاید:

$$\mathrm{pf}\left[\frac{\Theta(\xi)}{\xi^{3/2}}\right] = \lim_{s\to 0^+}\begin{cases}0, & \xi<0\\ -2\,s^{-3/2}, & 0<\xi<s\\ \xi^{-3/2}, & \xi>s\end{cases}\cdot \tag{67}$$

البته نمایش ِ بالا به این معنی ست که حد-گیری بعد از انتگرال-گیری انجام شود. از جمله دیده میشود

$$\int_{-\infty}^{x} \mathrm{d}\,\xi\,\mathrm{pf}\left[\frac{\Theta(\xi)}{\xi^{3/2}}\right] = -\frac{2\,\Theta(x)}{x^{1/2}}. \tag{68}$$

به این ترتیب به جا یِ (62) باید نوشت

$$W(\theta) = -2\,\cot^2\psi\,\mathrm{pf}\left[\frac{\Theta(\theta+\psi-\pi),}{(\cos^2\theta - \cot^2\psi\,\sin^2\theta)^{3/2}}\right]. \tag{69}$$

این یعنی برا یِ بار ِ مثبت میدان درون ِ مخروط ِ چرِنکُف [6] به سو یِ بار هست، اما رو یِ مخروط بینهایت میشود و جهت َش هم از بار به بیرون است. به علاوه،

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi} \mathrm{d}\,\theta\,\sin\theta\,W(\theta) &= -2\,\cot^2\psi\,\lim_{s\to 0^+}\Bigg\{-\frac{2\,s\,\sin\psi}{[\cos^2(\psi-s) - \cot^2\psi\,\sin^2(\psi-s)]^{3/2}}\\ &\quad + \int_{\pi-\psi+s}^{\pi} \frac{\mathrm{d}\,\theta\,\sin\theta}{(\cos^2\theta - \cot^2\psi\,\sin^2\theta)^{3/2}}\Bigg\},\\ &= -2\,\cot^2\psi\,\lim_{s\to 0^+}\Bigg\{-\frac{2\,s\,\sin^4\psi}{[\cos^2(\psi-s)-\cos^2\psi]^{3/2}}\\ &\quad + \frac{\sin^2\psi\,\tan\psi}{[\cos^2(\psi-s)-\cos^2\psi]^{1/2}} - \tan^2\psi\Bigg\}.\end{aligned} \tag{70}$$

حد ِ مجموع ِ دُ-جمله یِ اول ِ درون ِ آکلاد صفر است. به این ترتیب، (56) برقرار است.

3.4 حالت ِ نوری

این حالت را میشود حد ِ هر یک از حالتها یِ فرونوری یا فرانوری در $\mathfrak{g}$ به صفر گرفت. $\mathfrak{G}$ را چنین تعریف میکنم.

$$\frac{1}{[\xi^2 + \mathfrak{g}\,\eta^2]^{1/2}} =: \mathfrak{G}(\xi,\eta). \tag{71}$$

دیده میشود

$$\mathfrak{G}(\xi,\eta) = \frac{\partial}{\partial\,\xi}\left(\sinh^{-1}\frac{\xi}{\sqrt{\mathfrak{g}\,\eta^2}}\right). \tag{72}$$

برا یِ $\mathfrak{g}$ ها یِ مثبت و کوچک،

$$\sinh^{-1}\frac{\xi}{\sqrt{\mathfrak{g}\,\eta^2}} = \frac{\mathrm{sgn}(\xi)}{2}\left[\ln\frac{4}{\mathfrak{g}} + \ln\frac{\xi^2}{\eta^2}\right] + o(\mathfrak{g}), \tag{73}$$

که sgn تابع ِ علامت است. به این ترتیب،

$$\mathfrak{G}(\xi,\eta) = \delta(\xi)\,\ln\frac{\xi^2}{\eta^2} + \left(\ln\frac{4}{\mathfrak{g}}\right)\delta(\xi) + \mathrm{pf}\left(\frac{1}{|\xi|}\right) + o(\mathfrak{g}), \tag{74}$$

که δ دلتا یِ دیرَک [8] است. پس (49) میشود

$$\phi = \phi_{\mathrm{eff}} + \phi_{\mathrm{l}} + o(\mathfrak{g}), \tag{75}$$

که

$$\phi_{\mathrm{eff}}(t, \boldsymbol{r}) = K\, q\, \delta[\mathfrak{R}_{\|}(t, \boldsymbol{r})]\, \ln \frac{\mathfrak{R}_{\|}^2(t, \boldsymbol{r})}{|\boldsymbol{\mathfrak{R}}_{\perp}(t, \boldsymbol{r})|^2}. \tag{76}$$

$$\phi_{\mathrm{l}}(t, \boldsymbol{r}) = K\, q\, \left(\ln \frac{4}{\mathfrak{g}}\right) \delta[\mathfrak{R}_{\|}(t, \boldsymbol{r})] + \mathrm{pf}\left(\frac{1}{|\mathfrak{R}_{\|}(t, \boldsymbol{r})|}\right). \tag{77}$$

رابطه یِ (40) میشود

$$\boldsymbol{E} = -\boldsymbol{\nabla}_{\perp}\, \phi - \boldsymbol{e} \left(\nabla_{\|} + \frac{1}{u}\, \nabla_0\right) \phi + o(\mathfrak{g})\, \phi. \tag{78}$$

دیده میشود

$$\left(\nabla_{\|} + \frac{1}{u}\, \nabla_0\right) [\mathfrak{R}_{\|}(t, \boldsymbol{r})] = 0. \tag{79}$$

به این ترتیب،

$$\boldsymbol{E} = -\boldsymbol{\nabla}_{\perp}\, \phi_{\mathrm{eff}} + o(\mathfrak{g}\, \ln \mathfrak{g}). \tag{80}$$

پس در $\mathfrak{g}$ به صفر،

$$\boldsymbol{E}(t, \boldsymbol{r}) = 2\, K\, q\, \delta[\mathfrak{R}_{\|}(t, \boldsymbol{r})]\, \frac{\boldsymbol{\mathfrak{R}}_{\perp}(t, \boldsymbol{r})}{|\boldsymbol{\mathfrak{R}}_{\perp}(t, \boldsymbol{r})|}. \tag{81}$$

این را میشود چنین نوشت.

$$\begin{aligned} \boldsymbol{E}(t, \boldsymbol{r}) &= 2\, K\, q\, \delta[|\boldsymbol{\mathfrak{R}}(t, \boldsymbol{r})|\, \cos\theta]\, \frac{\boldsymbol{\mathfrak{R}}(t, \boldsymbol{r})}{|\boldsymbol{\mathfrak{R}}(t, \boldsymbol{r})|}, \\ &= \frac{K\, q\, \boldsymbol{\mathfrak{R}}(t, \boldsymbol{r})}{|\boldsymbol{\mathfrak{R}}(t, \boldsymbol{r})|^2} [2\, \delta(\cos\theta)]. \end{aligned} \tag{82}$$

با حد-گیری از (61) هم نتیجه میشود

$$W(\theta) = 2\, \delta[\cos(\theta)], \tag{83}$$

که هم ان است که از (83) به دست میئاید. دیده میشود $W(\theta)$ صفر است مگر $\cos(\theta)$ صفر باشد.

4 پانوشتها

[1] John David Jackson; “Classical electrodynamics” 3rd edition (John Wiley & Sons, 1998)

[2] Maxwell

[3] Lorentz

[4] Gauss

[5] Heaviside

[6] Cherenkov

[7] Ivar Stakgold; “Green’s functions and boundary value problems” 2nd edition (John Wiley & Sons, 1998)

[8] Dirac