X1-136 (2018/11/28)

کوانتم-مکانیک بر دایره

محمد خرمی

mamwad@mailaps.org

ویژه-بردارها یِ انرژی برا یِ سیستم ی بررسی میشود که شامل ِ یک ذره بر یک دایره است؛ با تفصیل ِ بیشتر برا یِ حالت ی که انرژی-یِ-پتانسیل تکِئی-ثابت است.

0 درامد

ذره ای بر یک خط و در انرژی-یِ-پتانسیل ِ V است. همیلتنی (انرژی) را با H، و ویژه-فضا یِ H متناظر با ویژه-مقدار ِ E را با $\mathbb{V}_E$ نشان میدهم.

- اگر E از هم $V(-\infty)$ و هم $V(\infty)$ بزرگتر باشد، $\mathbb{V}_E$ دُ-بُعدی ست. $\mathbb{V}_E$ شامل ِ یک مُج است که در راست ِ دور راست-رُست، و شامل ِ یک مُج است که در چپ ِ دور چپ-رُست.

- اگر E بین ِ $V(-\infty)$ و $V(\infty)$ باشد، $\mathbb{V}_E$ یک-بُعدی ست.

- اگر E از هم $V(-\infty)$ و هم $V(\infty)$ کوچکتر باشد، $\mathbb{V}_E$ جز در مقدارها یی ویژه از E صفر-بُعدی ست. در آن مقدارها یِ ویژه، $\mathbb{V}_E$ یک-بُعدی ست.

- به این ترتیب، بخش ی از طیف ِ همیلتنی که متناظر با دُ-وضعیت ِ اول است پیوسته، و بخش ی که متناظر با وضعیت ِ سوم است گسسته است. وضعیت ِ سوم متناظر با حالتها ی ِ مقید است، که تابع- ِ-مُج جاها ی ِ دور نمایی صفر میشود.
- در وضعیتها ی ِ دوم و سوم که $\mathbb{V}_E$ یک-بُعدی ست، تابع- ِ-مُج ِ متناظر با اعضا ی ِ $\mathbb{V}_E$ حقیقی (ضریب در یک ثابت) است و جریان ِ احتمال صفر است.
- البته اینها برا ی ِ انرژی-ی ِ-پتانسیلها ی ِ «معقول» درست َند. انرژی-ی ِ-پتانسیلها یی که در یک ناحیه بینهایت نیستند، در چپ ِ دور و در راست ِ دور حد دارند (ممکن است هر یک از این حدها بینهایت باشد)، و اگر جا یی به منفی-ی ِ-بینهایت بگرایند سریعتر از حد ی چنین نشوند، از جمله ی ِ انرژی-ی ِ-پتانسیلها ی ِ «معقول» َند.

چیزها یی شبیه ِ اینها را میشود در مثلَن [1] یافت.

وقت ی حرکت ِ ذره به بر یک دایره باشد، چیزها یی فرق میکنند. یک مثال از این وضعیت آونگ ِ ساده است. اینجا مثال ی بررسی میشود که سادتر است: انرژی-ی ِ-پتانسیل تکِئی-ثابت است. خاصتر، وقت ی دایره اجتماع ِ دُ کمان است که بر هر یک انرژی-ی ِ-پتانسیل ثابت است.

1 معادله ی ِ ویژه-مقداری برا ی ِ همیلتنی

برا ی ِ ذره ای که بر یک دایره است،

$$H = \frac{L^2}{2\,I} + V, \qquad (1)$$

که L تکانه ی ِ زاویِئی ست و I یک ثابت ِ مثبت (جرم ضرب در مجذور ِ شعاع ِ دایره) است. در پایه ی ِ مکان،

$$L = -\mathrm{i}\,\hbar\,\mathrm{D}, \qquad (2)$$

که D مشتق-گیری نسبت به زاویه است. تابع- ِ-مُج دُرِئی، با دُره ی ِ $(2\,\pi)$، است. معادله ی ِ ویژه-مقداری برا ی ِ همیلتنی چنین است.

$$H\,\psi = E\,\psi. \qquad (3)$$

وقت ی انرژی-یِ-پتانسیل در یک کمان ِ j ثابت است (این ثابت را با V_j نشان میدهم)، در آن کمان ویژه-تابع ترکیب ی خطی از تابعها یی نمایی ست:

$$\psi_j(\theta) = c_j^+\ \exp(\mathrm{i}\,\mu_j\,\theta) + c_j^-\ \exp(-\mathrm{i}\,\mu_j\,\theta), \tag{4}$$

که ψ_j تابع-ِ-مُج بر کمان ِ j است، c_j^+ و c_j^- ثابت َند، و

$$\mu_j = \sqrt{\frac{2\,I\,(E-V_j)}{\hbar^2}}. \tag{5}$$

μ_j حقیقی ست اگر E بزرگتر از V_j باشد، و مُهومی ست اگر E کوچکتر از V_j باشد. اگر انرژی-یِ-پتانسیل تکِئی-ثابت باشد، متناظر با هر کمان که بر آن انرژی-یِ-پتانسیل ثابت است 2 ثابت در تابع-ِ-مُج ظاهر میشود. متناظر با مرز ِ بین ِ هر-دُ-کمان ِ مجاور هم 2 شرط-ِ-پیوستِگی (خُد ِ تابع-ِ-مُج و مشتق ِ اول ِ آن) هست. تعداد ِ مرزها با تعداد ِ کمانها برابر است. پس تعداد ِ معادلات و تعداد ِ مجهولها (ثابتها یِ تابع-ِ-مُج) یکسان است. این معادلات یک جواب ِ بدیهی دارند، که همه یِ ثابتها صفر باشند. جواب ِ نابدیهی زمان ی هست که ماتریس-ِ-ضرایب ِ دستگاه ِ معادلات تکین باشد. این ماتریس به E وابسته است و این است که انرژی را گسسته (کوانتیده) میکند.

حالت ی را در نظر میگیرم که تعداد ِ کمانها یی که انرژی-یِ-پتانسیل بر آنها ثابت است 2 است. زاویه یِ کمان ِ j را با $(2\,\alpha_j)$ نشان میدهم. کمان ِ اول $(-\alpha_1, \alpha_1)$و کمان ِ دوم $(\pi-\alpha_2, \pi+\alpha_2)$ است.

$$\alpha_1 + \alpha_2 = \pi. \tag{6}$$

انعکاس نسبت به خط ِ θ برابر با 0 یا π را با S نشان میدهم. S یک تقارن ِ سیستم است. پس میشود ویژه-بردارها یِ همیلتنی را ویژه-بردار ِ S هم گرفت. ویژه-مقدارها یِ S برابر با یک یا منفی-یِ-یک َند؛ متناظر با ویژه-تابعها یِ، به ترتیب، زُج و فرد. برا یِ آنها که زُج َند، ویژه-تابع ِ همیلتنی چنین میشود.

$$\psi_1(\theta) = a_1\ \cos(\mu_1\,\theta). \tag{7}$$

$$\psi_2(\theta) = a_2\ \cos[\mu_2\,(\theta-\pi)]. \tag{8}$$

برا یِ فردها هم

$$\psi_1(\theta) = b_1\ \sin(\mu_1\,\theta). \tag{9}$$

$$\psi_2(\theta) = b_2\ \sin[\mu_2\,(\theta - \pi)]. \tag{10}$$

شرط ِ وجود ِ جواب ِ ناصفر هم، در هر یک از این دُ-حالت چنین میشود.

$$\mu_2\ \tan(\mu_2\,\alpha_2) = -\mu_1\ \tan(\mu_1\,\alpha_1), \quad \text{زُج}\ . \tag{11}$$

$$\mu_2\ \cot(\mu_2\,\alpha_2) = -\mu_1\ \cot(\mu_1\,\alpha_1), \quad \text{فرد}\ . \tag{12}$$

به سادِگی دیده میشود معادلات ِ بالا در حالت ی که E از هم V_1 و هم V_2 کوچکتر باشد جواب ندارند. در این حالت

$$|\mu_2|\ \tanh(|\mu_2|\,\alpha_2) = -|\mu_1|\ \tanh(|\mu_1|\,\alpha_1), \quad \text{زُج}\ . \tag{13}$$

$$|\mu_2|\ \coth(|\mu_2|\,\alpha_2) = -|\mu_1|\ \cot(|\mu_1|\,\alpha_1), \quad \text{فرد}\ . \tag{14}$$

در هر-دُ-معادله، طرف ِ چپ مثبت است و طرف ِ راست منفی ست. این که نمیشود E همه-جا از V کوچکتر باشد را از معادله یِ (1) هم میشود دید. اگر E همه-جا از V کوچکتر باشد،

$$\langle L^2\rangle < 0, \tag{15}$$

در حال ی که L^2 مجذور ِ یک عمل-گر ِ اِرمیتی ست و مقدار ِ چشم-داشتی یَ ش نا-منفی ست.

در تشابه با حرکت ِ ذره بر خط، به حالتها یی که E بین ِ V_1 و V_2 باشد حالتها یِ شبه- ِ-مقید، و به حالتها یی که E از هم V_1 و هم V_2 بزرگتر باشد حالتها یِ شبه- ِ-پراکنش میگویم.

2 حالتها یِ شبه- ِ-مقید

اگر E بین ِ V_1 و V_2 باشد، از μ_1 و μ_2 یک ی مُهومی و دیگری حقیقی ست. بی آن که از کلیت کاسته شود، V_1 را کوچکتر از V_2 میگیرم. در این حالت μ_1 حقیقی و μ_2 مُهومی ست:

$$V_1 \le E_1 \le V_2, \tag{16}$$

که نتیجه میدهد

$$0 \le \mu_1 \le \frac{\pi\, v}{\alpha_1}, \tag{17}$$

که

$$v = \frac{\alpha_1}{\pi} \sqrt{\frac{2\, I\, (V_2 - V_1)}{\hbar^2}}. \tag{18}$$

همچنین،

$$|\mu_2|^2 = \left(\frac{\pi\, v}{\alpha_1}\right)^2 - \mu_1^2. \tag{19}$$

معادلاتِ (11) و (12) میشوند

$$|\mu_2|\, \tanh(|\mu_2|\, \alpha_2) = \mu_1\, \tan(\mu_1\, \alpha_1), \quad \text{زُج} . \tag{20}$$

$$|\mu_2|\, \coth(|\mu_2|\, \alpha_2) = -\mu_1\, \cot(\mu_1\, \alpha_1), \quad \text{فرد} . \tag{21}$$

معادله یِ (20) با روابطِ (17) و (19) همواره برا یِ μ_1 جواب دارد. تعدادِ جوابها n است، اگر

$$n - 1 \le v < n. \tag{22}$$

برا یِ معادله یِ (20) با روابطِ (17) و (19)، این معادله را بررسی میکنم.

$$\frac{\alpha_1}{\alpha_2} = -(\pi\, x)\, \cot(\pi\, x). \tag{23}$$

جوابها یِ مثبتِ این معادله برا یِ x را به ترتیبِ صعودی مرتب میکنم و جوابِ n اُم از این گونه را با x_n نشان میدهم. دیده میشود

$$n - \frac{1}{2} < x_n < n, \tag{24}$$

و در (21) تعدادِ جوابها n است اگر

$$x_n \le v < x_{n+1}. \tag{25}$$

ترکیبِ بحث در باره یِ جوابها یِ زُج و فرد چنین میشود.

$$n - 1 \le v < x_n, \quad n \text{ جوابِ زُج و } (n-1) \text{ جوابِ فرد} \tag{26}$$

$$x_n \le v < n, \quad n \text{ جوابِ زُج و } n \text{ جوابِ فرد} \tag{27}$$

3 حالتها یِ شبه- ِ-پراکنش

اگر E از هم V_1 و هم V_2 بزرگتر باشد، μ_1 و μ_2 هر-دُ حقیقی یند و

$$\mu_2^2 - \mu_1^2 = \frac{2\,I\,(V_1 - V_2)}{\hbar^2}. \tag{28}$$

معادله یِ (11) همراه با (28) جوابها یِ زُج را میدهد و معادله یِ (12) همراه با (28) جوابها یِ فرد را میدهد.

اگر V_2 با V_1 برابر باشد (انرژی یِ پتانسیل ثابت باشد) معادلات ِ متناظر با جوابها یِ زُج و فرد یکسان میشوند. هر-دُ نتیجه میدهند

$$\mu_i = n, \tag{29}$$

که n صحیح است. در این حالت اگر E یک ویژه-مقدار ِ ناصفر ِ H باشد $\mathbb{V}_E$ دُ-بُعدی ست، و $\mathbb{V}_E$ شامل ِ دُ عضو است که تابع- ِ-مُج ِ متناظر با هر کدام ِ شان شامل ِ فقط یک نمایی ست. جریان- ِ-احتمال ِ متناظر با اینها ناصفر است. یک ی متناظر با مُج ی پاد-ساعت-گرد-روان است و دیگری متناظر با مُج ی ساعت-گرد-روان.

اگر V_2 با V_1 برابر نباشد، نُعَن انرژیها یی که برا یی جوابها یِ زُج به دست میئاید با آنها یی که برا یِ جوابها یِ فرد به دست میئاید متفاوت است. اما ممکن است حالت ِ خاص ی باشد که برا یِ یک انرژی هم جواب ِ زُج وجود داشته باشد و هم جواب ِ فرد. با فرض ِ این که V_2 با V_1 برابر نیست (و در نتیجه μ_2 با μ_1 برابر نیست)، چنین-وضع ی زمان ی رخ میدهد که

$$\tan(\mu_2\,\alpha_2) = \tan(\mu_1\,\alpha_1) = 0, \tag{30}$$

یا

$$\cot(\mu_2\,\alpha_2) = \cot(\mu_1\,\alpha_1) = 0. \tag{31}$$

اینها یعنی عددها یِ صحیح ِ n_1 و n_2 یی باشند که $(n_2 - n_1)$ زُج است و

$$2\,\mu_j\,\alpha_j = n_j\,\pi. \tag{32}$$

ترکیب ِ این با (28) میشود

$$\frac{2\,I\,(V_1-V_2)}{\pi^2\,\hbar^2}=\left(\frac{n_2}{2\,\alpha_2}\right)^2-\left(\frac{n_1}{2\,\alpha_1}\right)^2. \tag{33}$$

در این حالت ِ خاص، جوابها یی وجود دارند که در یک ی از کمانها شامل ِ فقط یک جمله ی ِ نمایی یَند. مثلَن در (4) حالت ی هست که c_1^- صفر است، و حالت ی هست که c_1^+ صفر است. این جوابها جریان- ِ-احتمال ِ ناصفر میدهند. اینها متناظر َند با پراکنش ِ بی-بازتاب در خط: شرط ِ این که مُج ی که در کمان ِ 1 است، از کمان ِ 2 بازتابیده نشود این است که یک عدد ِ صحیح ِ n_1 باشد که

$$\mu_1\,(2\,\alpha_1)=n_1\,\pi. \tag{34}$$

در این صورت مُجها یی که از سر و ته ِ کمان ِ 2 به درون ِ کمان ِ 1 با میتابند با هم تداخل ِ ویرانگر دارند و در کمان ِ 1 یکدیگر را حذف میکنند. اما چون مُجها بر دایره حرکت میکنند، مُج ی که از کمان ِ 2 گذشته هم با مُج ی که به کمان ِ 2 میرسد (هر-دُ در کمان ِ 1 َند) تداخل میکند. شرط ِ وجود ِ جواب ِ ناصفر این است که این تداخل سازنده باشد، یعنی مُج پس از یک بار پیمودن ِ دایره فاز َش به اندازه ی ِ مضرب ِ صحیح ی از $(2\,\pi)$ تغییر کند. این یعنی یک عدد ِ صحیح ِ n باشد که

$$\mu_1\,(2\,\alpha_1)+\mu_2\,(2\,\alpha_2)=2\,n\,\pi. \tag{35}$$

رُشن است که (34) و (35) هم-ارز َند با (34) و

$$\mu_2\,(2\,\alpha_2)=n_2\,\pi, \tag{36}$$

که

$$n_1+n_2=2\,n. \tag{37}$$

ترکیب ِ (34) و (36) هم ان (32) است، و (37) هم یعنی (n_2-n_1) زُج است. ضمنَن دیده میشود (29) حالت ِ خاص ِ (37) است.

سرانجام، برا ی ِ انرژیها ی ِ بزرگ،

$$\mu_j^2\gg|\mu_1^2-\mu_2^2|, \tag{38}$$

دیده میشود

$$\left|\frac{\mu_1-\mu_2}{\mu_1+\mu_2}\right| \ll 1. \tag{39}$$

روابط ِ (11) و (12) چنین میشوند.

$$\tan(\mu_2\,\alpha_2)+\tan(\mu_1\,\alpha_1)=\frac{\mu_1-\mu_2}{\mu_1+\mu_2}\,[\tan(\mu_2\,\alpha_2)-\tan(\mu_1\,\alpha_1)], \quad \text{زُج .} \tag{40}$$

$$\cot(\mu_2\,\alpha_2)+\cot(\mu_1\,\alpha_1)=\frac{\mu_1-\mu_2}{\mu_1+\mu_2}\,[\cot(\mu_2\,\alpha_2)-\cot(\mu_1\,\alpha_1)], \quad \text{فرد .} \tag{41}$$

اگر انرژی بزرگ باشد، در هر-دُ-حالت ُ زُج و فرد بخش ِ غالب ِ معادله طرف ِ چپ است. و در هر-دُ-حالت نتیجه میشود

$$\mu_1\,\alpha_1+\mu_2\,\alpha_2=n\,\pi, \tag{42}$$

که هم ان نتیجه یِ تقریب ِ شبه- ِ-کلاسیک است. ضمنَن دیده میشود (42) هم ان (35) است: در انرژیها یِ زیاد ویژه-مقدارها یِ H دُ-به-دُ به هم نزدیک میشوند، نزدیک به این که ویژه-فضاها دُ-بُعدی شوند. یعنی اثر ِ ثابت-نبودن ِ انرژی-یِ-پتانسیل کم میشود.

4 پانوشتها

[1] Ramamurti Shankar; "Principles of quantum mechanics" 2nd edition (Plenum, 1994) chapter 5