X1-140 (2019/05/23)

ذره یِ باردار در میدانها یِ مغناطیسی و الکتریکی یِ یک سیم ِ دراز، نسبیتی

محمد خرمی mamwad@mailaps.org

میدانها یِ مغناطیسی و الکتریکی یِ یک سیم ِ دراز، هم تقارن ِ سمتی دارند و هم تقارن ِ انتقالی. در نتیجه حرکت ِ یک ذره یِ باردار در این میدانها حل-پذیر است. این حرکت بررسی میشود. در حالت ِ نسبیتی، این مسئله با یک خیز به مسئله یِ حرکت در فقط میدان ِ مغناطیسی یا فقط میدان ِ الکتریکی تبدیل میشود، بسته به این که نسبت ِ جریان به چگالی-یِ-بار از حد ی بیشتر یا کمتر باشد.

1 میدانها یِ مغناطیسی و الکتریکی، پتانسیلها، و لَگرانژی

جریان ِ ثابت ِ I از یک سیم ِ دراز میگذرد. این سیم چگالی-یِ-بار ِ یکنواخت و ثابت ِ λ هم دارد. محور ِ z را رو یِ این سیم میگذارم، چنان که سمت ِ قراردادی یِ جریان به سو یِ z ها یِ مثبت باشد.

چنان که در [1] و [2] آمده، $\boldsymbol{B}$ (میدان ِ مغناطیسی) و $\boldsymbol{E}$ (میدان ِ الکتریکی) میشوند

$$\boldsymbol{B} = \frac{\mu_0\, I}{2\,\pi\,\rho}\,\hat{\boldsymbol{\phi}}, \tag{1}$$

$$\boldsymbol{E} = \frac{\mu_0\, c^2\,\lambda}{2\,\pi\,\rho}\,\hat{\boldsymbol{\rho}}, \tag{2}$$

که (ρ, ϕ, z) مختصات ِ استوانِیِ یَند. $\boldsymbol{A}$ (پتانسیل ِ برداری) و Φ (پتانسیل ِ اسکالر) هم میشوند

$$\boldsymbol{A} = -\frac{\mu_0\, I}{2\,\pi}\,\left(\ln\frac{\rho}{a}\right)\,\hat{\boldsymbol{z}}, \tag{3}$$

$$\Phi = -\frac{\mu_0\, c^2\,\lambda}{2\,\pi}\,\left(\ln\frac{\rho}{a}\right), \tag{4}$$

که a پارامتر ی ثابت است.

لَگرانژی یِ یک ذره به جرم ِ m و بار ِ q در پتانسیلها یِ $\boldsymbol{A}$ و Φ چنین است.

$$L = -\frac{m\,c^2}{\gamma} + q\,\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{A} - q\,\Phi. \tag{5}$$

L لَگرانژی، $\boldsymbol{v}$ سرعت، و γ ضریب ِ لُرِنتس [3] است:

$$\gamma = \left(1 - \frac{\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{v}}{c^2}\right)^{-1/2}. \tag{6}$$

تفاوت ِ این مسئله با مسئله یِ نانسبیتی [4]، در جمله یِ جنبشی یِ لَگرانژی (جمله یِ اول ِ طرف ِ راست) است. L را بر حسب ِ مختصات ِ استوانِیِ و با $\boldsymbol{A}$ و Φ متناظر با (3) و (4) مینویسم:

$$L = m\,\left[-c^2\,\left(1 - \frac{\dot\rho^2 + \rho^2\,\dot\phi^2 + \dot z^2}{c^2}\right)^{1/2} - b\,\dot z\,\ln\frac{\rho}{a} + k\,\ln\frac{\rho}{a}\right], \tag{7}$$

که $\dot{\mathfrak{x}}$ مشتق ِ $\mathfrak{x}$ نسبت به t (زمان) است و

$$b = \frac{\mu_0\, I\, q}{2\,\pi\, m}. \tag{8}$$

$$k = \frac{\mu_0\, c^2\,\lambda\, q}{2\,\pi\, m}. \tag{9}$$

با یک تغییر- ِ-متغیر میشود پارامترها یِ b و k را تغییر داد:

$$t = \Gamma\,\left(\bar t + \frac{V\,\bar z}{c^2}\right), \tag{10}$$

$$z = \Gamma\,(\bar z + V\,\bar t), \tag{11}$$

که Γ ضریب- ِ-لُرِنتس [3] ِ متناظر با V است:

$$\Gamma = \left(1 - \frac{V^2}{c^2}\right)^{-1/2}. \tag{12}$$

با این تغییر- ِ-متغیر L به $\bar{L}$ تبدیل میشود، که

$$\bar{L}\,\mathrm{d}\,\bar{t} = L\,\mathrm{d}\,t, \tag{13}$$

و

$$\bar{L} = m\left[-c^2\,\left(1 - \frac{\breve{\rho}^2 + \rho^2\,\breve{\phi}^2 + \breve{\bar{z}}^2}{c^2}\right)^{1/2} - \bar{b}\,\breve{\bar{z}}\,\ln\frac{\rho}{a} + \bar{k}\,\ln\frac{\rho}{a}\right], \tag{14}$$

که $\breve{\mathfrak{X}}$ مشتق ِ $\mathfrak{X}$ نسبت به $\bar{t}$ است و

$$\bar{b} = \Gamma\,\left(b - \frac{V\,k}{c^2}\right). \tag{15}$$

$$\bar{k} = \Gamma\,(k - V\,b). \tag{16}$$

اگر $|k/b|$ کوچکتر از c باشد، میشود $\bar{k}$ را صفر کرد. در این حالت مسئله به مسئله ای مشابه تبدیل میشود که در آن میدان ِ الکتریکی صفر است (حرکت ِ مغناطیسی). اگر $|k/b|$ بزرگتر از c باشد، میشود $\bar{b}$ را صفر کرد. در این حالت مسئله به مسئله ای مشابه تبدیل میشود که در آن میدان ِ مغناطیسی صفر است (حرکت ِ الکتریکی).

2 حرکت ِ مغناطیسی

در حالت ِ

$$\left|\frac{k}{b}\right| < c, \tag{17}$$

میگیرم

$$V = \frac{k}{b}. \tag{18}$$

نتیجه میشود

$$\bar{b} = \frac{b}{\Gamma}. \tag{19}$$

$$\bar{k} = 0. \tag{20}$$

مشابه با مسئله یِ نانسبیتی، $\bar{z}$ و ϕ و $\bar{t}$ در لَگرانژی نیستند. پس سه ثابت ِ حرکت هست:

$$p_{\bar{z}} = m\,\left(\bar{\gamma}\,\check{\bar{z}} - \bar{b}\,\ln\frac{\rho}{a}\right). \tag{21}$$

$$p_\phi = m\,\bar{\gamma}\,\rho^2\,\check{\phi}. \tag{22}$$

$$\bar{H} = m\,\bar{\gamma}\,c^2. \tag{23}$$

این که $\bar{H}$ ثابت است، نتیجه میدهد $\bar{\gamma}$ ثابت است. به این ترتیب مسئله کاملَن شبیه ِ مسئله یِ نانسبیتی میشود. فقط به جا یِ پارامتر ِ b پارامتر ِ $\underline{b}$ ظاهر میشود:

$$\underline{b} = \frac{\bar{b}}{\bar{\gamma}}, \tag{24}$$

که یعنی

$$\underline{b} = \frac{m\,c^2}{\bar{H}}\,\left(1 - \frac{k^2}{c^2\,b^2}\right)^{1/2}\,b. \tag{25}$$

البته حرکات ِ مختصات ِ قدیم خیزیده یِ حرکات ِ مختصات ِ جدید است.

3 حرکت ِ الکتریکی

در حالت ِ

$$\left|\frac{k}{b}\right| > c, \tag{26}$$

میگیرم

$$V = \frac{c^2\,b}{k}. \tag{27}$$

نتیجه میشود

$$\bar{b} = 0. \tag{28}$$

$$\bar{k} = \frac{k}{\Gamma}, \tag{29}$$

که یعنی

$$\bar{k} = \left(1 - \frac{c^2\, b^2}{k^2}\right)^{1/2}\, k. \tag{30}$$

مشابه با مسئله یِ نانسبیتی، $\bar{z}$ و ϕ و $\bar{t}$ در لگرانژی نیستند. پس سه ثابتِ حرکت هست:

$$p_{\bar{z}} = m\,\bar{\gamma}\,\check{\bar{z}}. \tag{31}$$

$$p_\phi = m\,\bar{\gamma}\,\rho^2\,\check{\phi}. \tag{32}$$

$$\bar{H} = m\,\left(\bar{\gamma}\,c^2 - \bar{k}\,\ln\frac{\rho}{a}\right). \tag{33}$$

اینها تقسیم بر m را با سه پارامترِ جدید (ثابتها یِ $\bar{w}$ و $\bar{\ell}$ و $\bar{\varpi}$) نشان میدهم:

$$\bar{w} = \bar{\gamma}\,\check{\bar{z}}. \tag{34}$$

$$\bar{\ell} = \bar{\gamma}\,\rho^2\,\check{\phi}. \tag{35}$$

$$\bar{\varpi} = \left(\bar{\gamma}\,c^2 - \bar{k}\,\ln\frac{\rho}{a}\right). \tag{36}$$

با استفاده از

$$\frac{c^2}{\bar{\gamma}^2} = c^2 - \check{\rho}^2 - \rho^2\,\check{\phi}^2 - \check{\bar{z}}^2, \tag{37}$$

و ثابتها، ϕ و $\bar{t}$ را حذف میکنم:

$$(c^2 - \check{\rho}^2)^{1/2} = \frac{c^2}{h(\rho)}, \tag{38}$$

که

$$h(\rho) = \left(c^2 + \bar{w}^2 + \frac{\ell^2}{\rho^2}\right)^{-1/2}\,\left(\bar{\varpi} + \bar{k}\,\ln\frac{\rho}{a}\right). \tag{39}$$

h باید ناکوچکتر از c باشد. این از جمله نشان میدهد که ρ به ناحیه ای ($\mathbb{I}$) محدود میشود، که در آن

$$\bar{\varpi} + \bar{k}\,\ln\frac{\rho}{a} > 0. \tag{40}$$

اگر $\bar{k}$ مثبت باشد، h بر $\mathbb{I}$ صعودی ست. پس فقط یک حد- ِ-پایین برا یِ ρ به دست میائید: ρ از ρ_1 کمتر نمیشود، و در $\rho\to\infty$ هم $\breve{\rho}$ به c میگراید.

اگر $\bar{k}$ منفی باشد، $h(\rho)$ در $\rho=\rho_0$ کمینه میشود، که

$$\frac{\ell^2}{\rho_0^2}\,\left(\bar{\varpi} + \bar{k}\,\ln\frac{\rho_0}{a}\right) = -k\,\left(c^2+\bar{w}^2+\frac{\ell^2}{\rho_0^2}\right). \tag{41}$$

در این حالت دُ نقطه یِ بازگشت (ρ_1 و ρ_2) هستند که ρ_0 بین ِ آنها ست و

$$c = h(\rho_j), \quad j = 1,2. \tag{42}$$

ρ_1 را نقطه-یِ-بازگشت ِ کوچکتر میگیرم. ρ_1 و ρ_2، به ترتیب، کمینه و بیشینه یِ ρ هستند.

در حالت ِ کلی، با استفاده از (38) میشود $\bar{t}$ را بر حسب ِ ρ به دست آورد:

$$t = \int^{\rho}\frac{\pm\mathrm{d}\,s\,h(s)}{\sqrt{c^2\,[h(s)]^2-c^4}}. \tag{43}$$

همچنین، میشود زمان را حذف کرد و معادله ای برا یِ مسیر به دست آورد:

$$\left(c^2-\frac{\ell^2}{\rho^4}\,\rho'^2\right)^{1/2} = \frac{c^2}{h(\rho)}, \tag{44}$$

که $\mathfrak{X}'$ مشتق ِ $\mathfrak{X}$ نسبت به ϕ است. سرانجام، با تعریف ِ u و η با

$$u = \frac{1}{\rho}, \tag{45}$$

$$\begin{aligned}\eta(u) &= h(\rho),\\ &= (c^2+\bar{w}^2+\ell^2\,u^2)^{-1/2}\,[\bar{\varpi}-\bar{k}\,\ln(a\,u)],\end{aligned} \tag{46}$$

نتیجه میشود

$$(c^2-\ell^2\,u'^2)^{1/2} = \frac{c^2}{\eta(u)}. \tag{47}$$

پس،

$$\phi = \int^{u} \frac{\pm\ell\,\mathrm{d}\,\sigma\,\eta(\sigma)}{\sqrt{c^2\,[\eta(\sigma)]^2 - c^4}}. \tag{48}$$

اگر $\bar{k}$ منفی باشد، یک حالت ِ خاص ِ حرکت این است که ρ ثابت بماند. در این حالت $\bar{\gamma}$ ثابت است و حرکت کاملَن شبیه ِ حرکت ِ نانسبیتی ست. فقط به جا یِ پارامتر ِ k پارامتر ِ $\underline{k}$ ظاهر میشود:

$$\underline{k} = \frac{\bar{k}}{\bar{\gamma}}, \tag{49}$$

که یعنی

$$\underline{k} = \frac{m\,c^2}{\bar{H}}\,\left(1 - \frac{c^2\,b^2}{k^2}\right)\,\bar{k}. \tag{50}$$

البته حرکات ِ مختصات ِ قدیم خیزیده یِ حرکات ِ مختصات ِ جدید است.

4 پانوشتها

[1] محمد خرمی؛ «ذره یِ باردار در میدان ِ مغناطیسی یِ یک سیم ِ دراز»؛ X1-137 (2019/01/22)

[2] محمد خرمی؛ «ذره یِ باردار در میدان ِ الکتریکی یِ یک سیم ِ دراز»؛ X1-138 (2019/02/21)

[3] Lorentz

[4] محمد خرمی؛ «ذره یِ باردار در میدانها یِ مغناطیسی و الکتریکی یِ یک سیم ِ دراز»؛ X1-139 (2019/04/12)