X1-144 (2019/11/21)

پتانسیل درون ِ یک مستطیل

محمد خرمی

mamwad@mailaps.org

این مسئله یِ شرط- ِ-مرزی بررسی میشود که پتانسیل درون ِ یک مستطیل معادله یِ لَپلَس [1] را بر میئاورَد، بر یک ضلع ِ مستطیل مقدار ی ثابت و ناصفر است، و بر ضلعها یِ دیگر صفر است. رفتار ِ پتانسیل نزدیک ِ رئسها و در مرکز بررسی میشود.

0 طرح ِ مسئله

تابع ِ ψ درون ِ یک مستطیل، $(0,a)\times(0,b)$، معادله یِ لَپلَس [1] را بر میئاورَد، و بر مرز ِ مستطیل داده شده:

$$(\boldsymbol{\nabla}^2\,\psi)(x,y)=0,\qquad [x\in(0,a)]\wedge[y\in(0,b)]. \tag{1}$$

$$\psi(0,y)=0,\qquad y\in(0,b). \tag{2}$$

$$\psi(a,y)=0,\qquad y\in(0,b). \tag{3}$$

$$\psi(x,0)=0,\qquad x\in(0,a). \tag{4}$$

$$\psi(x,b)=V,\qquad x\in(0,a). \tag{5}$$

(x,y) مختصات ِ دِکَرتی یَند و ∇^2 لَپِلَسی ست. این مسئله در بسیار ی از کتابها یِ درسی یِ حل شده. شکل ِ سه-بُعدی یِ مسئله هم در مثلَن فصل ِ 2 از [2] حل شده. اینجا اول پتانسیل را به روش ِ جداسازی یِ متغیرها حساب میکنم (هم ان که در کتابها یِ درسی انجام میشود). بعد رفتار ِ جواب (که به شکل ِ یک سری ست) را نزدیک ِ رئسها و بر مرکز بررسی میکنم.

1 حل ِ مسئله با جداسازی یِ متغیرها

مشتق-گیری نسبت به متغیر ِ j را با D_j، و مشتق-گیری (وقت ی فقط یک متغیر هست) را با D نشان میدهم. $(\mathrm{D}_1)^2$ با ∇^2 جا-به-جا میشود. ψ را بر حسب ِ ویژه-بردارها یِ $(\mathrm{D}_1)^2$ بسط میدهم. ویژه-بردار ِ متناظر با ویژه-مقدار ِ λ را با ϕ_λ نشان میدهم:

$$(\mathrm{D}_1)^2\,\phi_\lambda = \lambda\,\phi_\lambda, \tag{6}$$

که نتیجه میدهد

$$\phi_\lambda(x,y) = C(y)\,\cos(k\,x) + S(y)\,\sin(k\,x). \tag{7}$$

$$k = \sqrt{-\lambda}. \tag{8}$$

این که $\phi_\lambda(0,y)$ صفر شود C را صفر میکند. این که $\phi_\lambda(b,y)$ صفر شود (و البته ϕ_λ همه-جا صفر نباشد)، نتیجه میدهد

$$\sin(k\,a) = 0. \tag{9}$$

به این ترتیب،

$$k = \frac{n\,\pi}{a}, \tag{10}$$

که n صحیح و نامنفی است. پس بسط ِ ψ بر حسب ِ ویژه-بردارها یِ $(\mathrm{D}_1)^2$ میشود

$$\psi(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} S_n(y)\,\sin\frac{n\,\pi\,x}{a}. \tag{11}$$

این را در (1) میگذارم:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\left[\mathrm{D}^2-\left(\frac{n\,\pi}{a}\right)^2\right]\,S_n\right\}(y)\,\sin\frac{n\,\pi\,x}{a}=0. \tag{12}$$

ویژه-بردارها یِ $(\mathrm{D}_1)^2$ متناظر با ویژه-مقدارها یِ متمایز خطی-مستقل َند. پس (12) نتیجه میدهد

$$\left[\mathrm{D}^2-\left(\frac{n\,\pi}{a}\right)^2\right]\,S_n=0. \tag{13}$$

به این ترتیب،

$$S_n(y)=D_n\,\cosh\frac{n\,\pi\,y}{a}+E_n\,\sinh\frac{n\,\pi\,y}{a}. \tag{14}$$

این که $\psi(x,0)$ صفر شود D_n را صفر میکند. پس،

$$S_n(y)=E_n\,\sinh\frac{n\,\pi\,y}{a}. \tag{15}$$

$$\psi(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty}E_n\,\sinh\frac{n\,\pi\,y}{a}\,\sin\frac{n\,\pi\,x}{a}. \tag{16}$$

E_n ها از رابطه یِ (5) به دست میئایند:

$$\sum_{n=1}^{\infty}E_n\,\sinh\frac{n\,\pi\,b}{a}\,\sin\frac{n\,\pi\,x}{a}=V. \tag{17}$$

از تعامد ِ ویژه-بردارها یِ $(\mathrm{D}_1)^2$ استفاده میکنم و ضرایب ِ بسط را به دست میئاورم:

$$\int_0^a\mathrm{d}\,x\,\sin\frac{m\,\pi\,x}{a}\,\sin\frac{n\,\pi\,x}{a}=\frac{a}{2}\,\delta_{m,n}. \tag{18}$$

نتیجه میشود

$$\begin{aligned}\frac{a}{2}\,E_m\,\sinh\frac{m\,\pi\,b}{a}&=V\,\int_0^a\mathrm{d}\,x\,\sin\frac{m\,\pi\,x}{a}.\\&=\frac{V\,a}{m\,\pi}\,[1-(-1)^m].\end{aligned} \tag{19}$$

به این ترتیب،

$$\psi(x,y)=V\,\sum_{n\in\mathbb{O}}\frac{4}{n\,\pi}\,\left(\sinh\frac{n\,\pi\,b}{a}\right)^{-1}\,\sinh\frac{n\,\pi\,y}{a}\,\sin\frac{n\,\pi\,x}{a}, \tag{20}$$

که $\mathbb{O}$ مجموعه یِ عددها یِ فرد ِ مثبت است.

2 نزدیک ِ رئس ی که پتانسیل در آن ناپیوسته است

پتانسیل در رئس ِ $(x = 0, y = b)$ ناپیوسته است. نزدیک ِ این رئس یعنی x و $(b - y)$ نامنفی، و از a و b خیل ی کوچکتر َند. جملات ی از سری ناکوچک َند که

$$\frac{n\,\pi\,x}{a} \gtrsim 1. \tag{21}$$

این یعنی

$$\frac{n\,\pi\,y}{a} \gg 1. \tag{22}$$

$$\frac{n\,\pi\,b}{a} \gg 1. \tag{23}$$

به این ترتیب،

$$\left(\sinh\frac{n\,\pi\,b}{a}\right)^{-1}\sinh\frac{n\,\pi\,y}{a} = \exp\frac{n\,\pi\,(y-b)}{a} + \cdots . \tag{24}$$

پس،

$$\psi(x,y) = V\sum_{n\in\mathbb{O}}\frac{4}{n\,\pi}\left[\exp\frac{n\,\pi\,(y-b)}{a}\right]\sin\frac{n\,\pi\,x}{a} + \cdots , \tag{25}$$

که نتیجه میدهد

$$\psi(x,y) = \frac{4\,V}{\pi}\,\mathrm{Im}\left(\sum_{n\in\mathbb{O}}\frac{Z^n}{n}\right) + \cdots , \tag{26}$$

که

$$Z = \exp\frac{\pi\,(y - b + \mathrm{i}\,x)}{a}. \tag{27}$$

به این ترتیب،

$$\psi(x,y) = \frac{2\,V}{\pi}\,\mathrm{Im}\left(\ln\frac{1+Z}{1-Z}\right) + \cdots . \tag{28}$$

این که x و $(b-y)$ کوچک ‌َند، نتیجه می‌دهد Z به یک نزدیک است. پس

$$\psi(x,y)=\frac{2\,V}{\pi}\,\mathrm{Im}\left(\ln\frac{2}{1-Z}\right)+\cdots\,, \tag{29}$$

که با توجه به

$$1-Z=\frac{\pi\,(b-y-\mathrm{i}\,x)}{a}, \tag{30}$$

نتیجه می‌دهد

$$\psi(x,y)=\frac{2\,V}{\pi}\,\tan^{-1}\frac{x}{b-y}+\cdots\,. \tag{31}$$

جمله یِ غالب هم ان پتانسیل درون ِ یک قطاع ِ بی-پایان با زاویه یِ $(\pi/2)$ است، با این شرط ِ مرزی که پتانسیل بر یک ضلع ِ قطاع صفر و بر ضلع ِ دیگر V باشد.

3 نزدیک ِ رئس ی که پتانسیل در آن پیوسته است

پتانسیل در رئس ِ $(x=0,y=0)$ پیوسته است. نزدیک ِ این رئس یعنی x و y نامنفی، و از a و b خیل ی کوچکتر ‌َند. در این حالت،

$$\psi(x,y)=c\,V\,\frac{x\,y}{b^2}+\cdots\,, \tag{32}$$

که

$$c=\sum_{n\in\mathbb{O}}\frac{4\,n\,\pi\,b^2}{a^2}\,\left(\sinh\frac{n\,\pi\,b}{a}\right)^{-1}. \tag{33}$$

رُشن است که c تابع ِ (b/a) است. در حالتها یی که (b/a) خیل ی بزرگ یا خیل ی کوچک باشد، طرف ِ راست ِ (33) ساده می‌شود.

اگر (b/a) خیل ی بزرگ باشد، طرف ِ راست ِ (33) عملَن با جمله یِ اول ِ سری برابر است:

$$c=\frac{8\,\pi\,b^2}{a^2}\,\exp\left(-\frac{\pi\,b}{a}\right)+\cdots\,,\qquad \frac{b}{a}\gg 1. \tag{34}$$

اگر (b/a) خیل ی کوچک باشد، طرف ِ راست ِ (33) را میشود به انتگرال تبدیل کرد:

$$c = \gamma + \cdots\,, \tag{35}$$

که

$$\gamma = \frac{2}{\pi}\,\int_0^\infty \mathrm{d}\,s\,\frac{s}{\sinh s}. \tag{36}$$

دیده میشود

$$\begin{aligned}\gamma &= \frac{4}{\pi}\,\sum_{j\in\mathbb{O}}\int_0^\infty \mathrm{d}\,s\,s\,\exp(-j\,s),\\ &= \frac{4}{\pi}\,\sum_{j\in\mathbb{O}}\frac{1}{j^2},\end{aligned} \tag{37}$$

که نتیجه میدهد

$$\gamma = \frac{\pi}{2}. \tag{38}$$

پس،

$$c = \frac{\pi}{2} + \cdots\,,, \qquad \frac{b}{a} \ll 1. \tag{39}$$

4 در مرکز

پتانسیل در مرکز ِ مستطیل را با ψ_0 نشان میدهم. دیده میشود $[x=(a/2), y=(b/2)]$ است:

$$\psi_0 = V\,\sum_{n\in\mathbb{O}}\frac{2}{n\,\pi}\,\left(\cosh\frac{n\,\pi\,b}{2\,a}\right)^{-1}\,\sin\frac{n\,\pi}{2}. \tag{40}$$

این عبارت وقت ی (b/a) خیل ی بزرگ یا خیل ی کوچک یا برابر با یک باشد ساده میشود.

اگر (b/a) خیل ی بزرگ باشد، طرف ِ راست ِ (40) عملَن با جمله یِ اول ِ سری برابر است:

$$\psi_0 = \frac{4\,V}{\pi}\,\exp\left(-\frac{\pi\,b}{2\,a}\right) + \cdots\,, \qquad \frac{b}{a} \gg 1. \tag{41}$$

اگر (b/a) خیل ی کوچک باشد،

$$\begin{aligned}\psi_0 &= V \sum_{n\in\mathbb{O}} \frac{2}{n\,\pi} \sin\frac{n\,\pi}{2} + \cdots\,,\\ &= \frac{2\,V}{\pi}\,\mathrm{Im}\left(\sum_{n\in\mathbb{O}} \frac{\mathrm{i}^n}{n}\right) + \cdots\,,\\ &= \frac{V}{\pi}\,\mathrm{Im}\left(\ln\frac{1+\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}}\right) + \cdots\,, \end{aligned} \qquad (42)$$

که نتیجه میدهد

$$\psi_0 = \frac{V}{2} + \cdots\,, \qquad \frac{b}{a} \ll 1. \qquad (43)$$

جمله یِ غالب هم ان پتانسیل ِ وسط ِ یک نوار ِ بی-پایان، با این شرط ِ مرزی که پتانسیل بر یک ضلع ِ نوار صفر و بر ضلع ِ دیگر V باشد.

سرانجام، اگر (b/a) یک باشد،

$$\psi_0 = V \sum_{n\in\mathbb{O}} \frac{2}{n\,\pi} \left(\cosh\frac{n\,\pi}{2}\right)^{-1} \sin\frac{n\,\pi}{2}. \qquad (44)$$

این سری مقدار ِ پتانسیل در مرکز ِ یک مربع است. پتانسیل در مرکز ِ یک مربع، با این شرط ِ مرزی که پتانسیل بر هر ضلع ِ مربع ثابت باشد میانگین ِ مقدار ِ پتانسیل بر اضلاع ِ مربع است. اینجا پتانسیل بر سه ضلع صفر و بر یک ضلع V است. پس پتانسیل در مرکز $(V/4)$ میشود:

$$\psi_0 = \frac{V}{4}, \qquad \frac{b}{a} = 1. \qquad (45)$$

5 پانوشتها

[1] Laplace

[2] John David Jackson; "Classical electrodynamics" 3rd edition (John Wiley & Sons, 1998)