X1-147 (2020/04/15)

انتشار ِ مُج، و چشمه یِ مستقل-از-زمان

محمد خرمی

mamwad@mailaps.org

معادله یِ مُج با یک چشمه یِ مستقل-از-زمان بررسی میشود. جواب ِ این معادله به شکل ِ برهمنهش ی از مُجها یِ تخت نوشته میشود.

0 درامد

شکل ِ ساده یِ معادله یِ مُج در یک محیط ِ همگن و همسانگرد و ناپاشنده چنین است.

$$(c^{-2}\,\nabla_0^2 - \boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{\nabla})\,\psi = \rho, \tag{1}$$

که ρ چشمه، ∇_0 مشتقگیری نسبت به زمان، $\boldsymbol{\nabla}$ مشتقگیری نسبت به مکان، و c سرعت ِ انتشار ِ مُج است.

اگر ρ مستقل از زمان باشد، ψ هم مستقل از زمان میشود و معادله یِ مُج به معادله یِ پُوَسُن [1] تبدیل میشود:

$$-\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{\nabla}\,\psi = \rho. \tag{2}$$

از جمله برا یِ چشمه یِ واحدِ نقطِئی (در مبدئ)، جوابِ معادله را با $G_{\rm s}$ نشان میدهم:

$$(-\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{\nabla}\,G_{\rm s})(\boldsymbol{r})=\delta(\boldsymbol{r}), \tag{3}$$

که نتیجه میدهد

$$G_{\rm s}(\boldsymbol{r})=\begin{cases}[(n-2)\,S_{n-1}]^{-1}\,r^{2-n}, & n\ne 2\\ -(S_1)^{-1}\,\ln(r/a), & n=2\end{cases}, \tag{4}$$

که n بُعدِ فضا و $S_{\mathfrak{m}}$ مساحتِ کره یِ واحدِ $\mathfrak{m}$ بُعدی ست.

اگر چشمه صفر باشد، (1) میشود

$$(c^{-2}\,\nabla_0^2-\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{\nabla})\,\psi=0. \tag{5}$$

هر جوابِ این معادله را میشود به شکلِ یک ترکیبِ خطی از مُجها یِ تخت نوشت: $\mathfrak{E}(\omega,\boldsymbol{k})$ را چنین تعریف میکنم.

$$[\mathfrak{E}(\omega,\boldsymbol{k})](t,\boldsymbol{r})=\exp(-\mathrm{i}\,\omega\,t+\mathrm{i}\,\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}). \tag{6}$$

$\mathfrak{E}(\omega,\boldsymbol{k})$ معادله یِ (5) را برمیئاورَد، اگر و تنها اگر بسامد-ِ-زاویِئی یِ ω و بردار-ِ-مُجِ $\boldsymbol{k}$ معادله یِ پاشندگی یِ متناظر را براورند:

$$-c^{-2}\,\omega^2+\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{k}=0, \tag{7}$$

یا

$$\omega=\pm\,c\,k. \tag{8}$$

1 تابعِ گرین برا یِ معادله یِ مُج

تابعِ گرین [2] متناظر با معادله یِ (1) را با G نشان میدهم. محاسبه یِ G در جاها یِ زیاد ی، از جمله در [3]، آمده. G این معادله را برمیئاورَد:

$$[(c^{-2}\,\nabla_0^2-\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{\nabla})\,G](t,\boldsymbol{r};t',\boldsymbol{r}')=\delta(t-t')\,\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'). \tag{9}$$

این معادله تحت ِ انتقال ِ زمان و انتقال ِ مکان متقارن است. پس میشود G را تابع ِ فقط تفاضل ِ زمانها و تفاضل ِ مکانها گرفت:

$$G(t, \boldsymbol{r}; t', \boldsymbol{r}') = \mathcal{G}(t - t', \boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'). \tag{10}$$

$\mathcal{G}$ این معادله را برمیئاورَد.

$$[(c^{-2}\,\nabla_0^2 - \boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{\nabla})\,\mathcal{G}](t, \boldsymbol{r}) = \delta(t)\,\delta(\boldsymbol{r}). \tag{11}$$

تبدیل ِ فوریه [4] یِ $\mathcal{G}$ را با $\tilde{\mathcal{G}}$ نشان میدهم:

$$\mathcal{G}(t, \boldsymbol{r}) = \int \frac{\mathrm{d}^n\,k}{(2\,\pi)^n}\,\frac{\mathrm{d}\,\omega}{2\,\pi}\,[\exp(\mathrm{i}\,\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r} - \mathrm{i}\,\omega\,t)]\,\tilde{\mathcal{G}}(\omega, \boldsymbol{k}). \tag{12}$$

دیده میشود

$$(-c^{-2}\,\omega^2 + \boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{k})\,\tilde{\mathcal{G}}(\omega, \boldsymbol{k}) = 1, \tag{13}$$

یا،

$$\tilde{\mathcal{G}}(\omega, \boldsymbol{k}) = \frac{1}{-c^{-2}\,\omega^2 + \boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{k}}. \tag{14}$$

این رابطه کاملَن درست نیست: طرف ِ راست مُضعَن-انتگرالپذیر نیست و نمیشود با آن یک تزیع ساخت. این هم که جواب ِ معادله یِ (13)، یا (11)، یکتا نیست به این نکته مربوط است. (11) را میشود با شرط- ِ-مرزیها یِ مختلف ی حل کرد.

$\mathcal{G}_+$ (جواب ِ تئخیری) جواب ِ (11) است با این شرط ِ مرزی که

$$\mathcal{G}(t, \boldsymbol{r}) = 0, \quad t < 0. \tag{15}$$

نشان میدهند

$$\tilde{\mathcal{G}}_+(\omega, \boldsymbol{k}) = \frac{1}{-c^{-2}\,(\omega + \mathrm{i}\,0^+)^2 + \boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{k}}, \tag{16}$$

که

$$\mathfrak{F}(0^+) = \lim_{\varepsilon\to 0^+}[\mathfrak{F}(\varepsilon)], \tag{17}$$

و البته در طرفِ راستِ (16)، منظور از حدگیری حدگیری به معنی یِ تُزیع است: حدگیری بعد از انتگرالگیری یی انجام میشود که طرفِ راستِ (16) در انتگرالده یِ آن است.

برا یِ اثباتِ این که $\mathcal{G}_+$ شرطِ (15) را برمیئاورَد، I را چنین تعریف میکنم.

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}\,\omega}{2\,\pi}\,\frac{\exp(\mathrm{i}\,\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r} - \mathrm{i}\,\omega\,t)}{-c^{-2}\,(\omega + \mathrm{i}\,0^+)^2 + \boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{k}}. \tag{18}$$

دیده میشود

$$I = \oint_{\mathbb{C}_-} \frac{\mathrm{d}\,\omega}{2\,\pi}\,\frac{\exp(\mathrm{i}\,\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r} - \mathrm{i}\,\omega\,t)}{-c^{-2}\,(\omega + \mathrm{i}\,0^+)^2 + \boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{k}}, \quad t < 0, \tag{19}$$

که $\mathbb{C}_-$ محورِ حقیقی از $(-R)$ تا R به اضافه یِ یک نیمدایره به مرکزِ مبدئ و شعاعِ R در نیمصفحه یِ بالا ست، پادساعتگرد و در حدِ R به بینهایت. این که در $(t < 0)$ میشود نیمدایره یِ بزرگِ نیمصفحه یِ بالا را به مسیرِ انتگرالگیری افزود، به این خاطر است که در $(t < 0)$ انتگرالده بر نیمدایره یِ بزرگ در نیمصفحه یِ بالا سریعتر از عکسِ شعاعِ دایره به صفر میگراید.

انتگرالده در طرفِ راستِ (18)، در نیمصفحه یِ بالا تمامریخت است. پس،

$$I = 0, \quad t < 0, \tag{20}$$

که این هم (15) را نتیجه میدهد.

همچنین،

$$I = \oint_{\mathbb{C}_+} \frac{\mathrm{d}\,\omega}{2\,\pi}\,\frac{\exp(\mathrm{i}\,\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r} - \mathrm{i}\,\omega\,t)}{-c^{-2}\,(\omega + \mathrm{i}\,0^+)^2 + \boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{k}}, \quad t > 0, \tag{21}$$

که $\mathbb{C}_+$ محورِ حقیقی از $(-R)$ تا R به اضافه یِ یک نیمدایره به مرکزِ مبدئ و شعاعِ R در نیمصفحه یِ پایین است، ساعتگرد و در حدِ R به بینهایت. انتگرالده دُ قطب دارد که هر-دُ در نیمصفحه یِ پایین َند. نتیجه میشود

$$I = \frac{\mathrm{i}\,c}{2\,k}\,[\exp(\mathrm{i}\,\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r} - \mathrm{i}\,c\,k\,t) - \exp(\mathrm{i}\,\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r} + \mathrm{i}\,c\,k\,t)], \quad t > 0. \tag{22}$$

این و (20) را میشود چنین خلاصه کرد.

$$I = \frac{\mathrm{i}\,c}{2\,k}\,[\exp(\mathrm{i}\,\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r} - \mathrm{i}\,c\,k\,t) - \exp(\mathrm{i}\,\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r} + \mathrm{i}\,c\,k\,t)]\,\Theta(t), \tag{23}$$

یا،

$$I=\frac{c}{k}\,\exp(\mathrm{i}\,\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r})\,\sin(c\,k\,t)\,\Theta(t), \tag{24}$$

که θ تابع ِ هِویساید [5]] (پله ی ِ واحد) است. به این ترتیب،

$$\mathcal{G}_+(t,\boldsymbol{r})=\int\frac{\mathrm{d}^n\,k}{(2\,\pi)^n}\,\frac{\mathrm{i}\,c}{2\,k}\,[\exp(\mathrm{i}\,\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}-\mathrm{i}\,c\,k\,t)-\exp(\mathrm{i}\,\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}+\mathrm{i}\,c\,k\,t)]\,\Theta(t). \tag{25}$$

یا،

$$\mathcal{G}_+(t,\boldsymbol{r})=\int\frac{\mathrm{d}^n\,k}{(2\,\pi)^n}\,\frac{c}{k}\,\exp(\mathrm{i}\,\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r})\,\sin(c\,k\,t)\,\Theta(t). \tag{26}$$

2 معادله ی ِ پُوَّسُن، و تابع ِ گرین برا ی ِ معادله ی ِ مُج

با استفاده از

$$\rho(\boldsymbol{r})=\int\mathrm{d}^n\,r'\,\mathrm{d}\,t'\,\delta(t-t')\,\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')\,\rho(\boldsymbol{r}'), \tag{27}$$

نتیجه میشود جواب ِ معادله ی ِ (2) برا ی ِ ψ چنین است.

$$\psi(\boldsymbol{r})=\int\mathrm{d}^n\,r'\,\mathrm{d}\,t'\,G(t,\boldsymbol{r};t',\boldsymbol{r}')\,\rho(\boldsymbol{r}'), \tag{28}$$

یا

$$\psi(\boldsymbol{r})=\int\mathrm{d}^n\,r'\,\mathrm{d}\,t'\,\mathcal{G}(t-t',\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')\,\rho(\boldsymbol{r}'). \tag{29}$$

از جمله برا ی ِ چشمه ی ِ نقطِئی در مبدئ، رابطه ی ِ (3)،

$$G_{\mathrm{s}}(\boldsymbol{r})=\int\mathrm{d}\,t'\,\mathcal{G}(t-t',\boldsymbol{r}). \tag{30}$$

با تابع- ِ-گرین [2] ِ تئخیری،

$$G_{\mathrm{s}}(\boldsymbol{r})=\int_{-\infty}^{t}\mathrm{d}\,t'\,\mathcal{G}_+(t-t',\boldsymbol{r}), \tag{31}$$

یا

$$
\begin{aligned}
G_{\mathrm{s}}(\boldsymbol{r}) = \int_{-\infty}^{t} \mathrm{d}\,t' \int \frac{\mathrm{d}^n\,k}{(2\,\pi)^n}\,\frac{\mathrm{i}\,c}{2\,k}\,\{&\exp[\mathrm{i}\,\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r} - \mathrm{i}\,c\,k\,(t-t')] \\
&- \exp[\mathrm{i}\,\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r} + \mathrm{i}\,c\,k\,(t-t')]\}.
\end{aligned}
\tag{32}
$$

این رابطه بسط ِ تابع- ِ-گرین [2] ِ معادله یِ پُوَسُن [1] بر حسب ِ مُجها یِ تخت است. طرف ِ راست ِ (32) را با $\mathfrak{G}(\boldsymbol{r})$ نشان میدهم. میشود مستقمَن تحقیق کرد $\mathfrak{G}$ هم ان G_{s} است. :

$$
\begin{aligned}
\mathfrak{G}(\boldsymbol{r}) &= \int \frac{\mathrm{d}^n\,k}{(2\,\pi)^n}\,\exp(\mathrm{i}\,\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}) \int_{-\infty}^{t} \mathrm{d}\,t'\,\frac{c}{k}\,\sin[c\,k\,(t-t')], \\
&= \int \frac{\mathrm{d}^n\,k}{(2\,\pi)^n}\,\frac{\exp(\mathrm{i}\,\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r})}{k^2},
\end{aligned}
\tag{33}
$$

که نشان میدهد

$$
(-\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{\nabla}\,\mathfrak{G})(\boldsymbol{r}) = \delta(\boldsymbol{r}). \tag{34}
$$

پس $\mathfrak{G}$ هم ان G_{s} است.

3 پانوشتها

[1] Poisson

[2] Green

[3] John David Jackson; “Classical electrodynamics” 3rd edition (John Wiley & Sons, 1998) chapter 6

[4] Fourier

[5] Heaviside