$$x + y + z = 3$$

$$x + y + 2z = 4$$

$$x + y \quad = 2$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \end{array}\right] \xrightarrow{3 \to 3 + (-1)\,1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{2 \to 2 + (-1)\,1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{array}\right]$$

$3: \quad -z = -1 \Rightarrow z = 1$

$2: \quad z = 1$

$1: \quad x + y + z = 3$

$z=1$
$x+y=2$

y متغیر آزاد

$z=1$
$y=$ آزاد

$x=2-y$

دستگاه جواب دارد.

جواب یکتا نیست.

$$\begin{aligned} x+y+z &= 3 \\ x+y+2z &= 4 \\ x+y \quad &= 1 \end{aligned}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{3 \to 3+(-1)1}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \end{array}\right) \xrightarrow{2 \to 2+(-1)1}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \end{array}\right)$$

$$x + y + z = 3$$

$$z = 1$$

$$-z = -2 \longrightarrow z = 2$$

ناسازگار

$$\xrightarrow{3 \to 3 + (+1) 1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right)$$

$$x + y + z = 3$$

$$z = 1$$

$$0 = -1 \quad \times$$

دستگاه جواب ندارد.

ماتریس ضرایب

ستون مجهولها

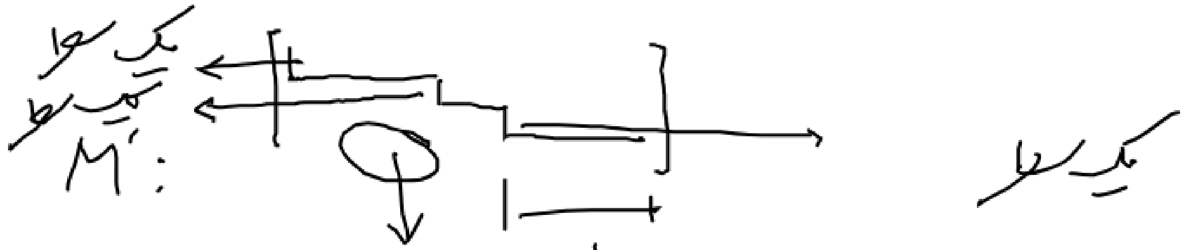
$$M x = A$$

ستون طرف راست

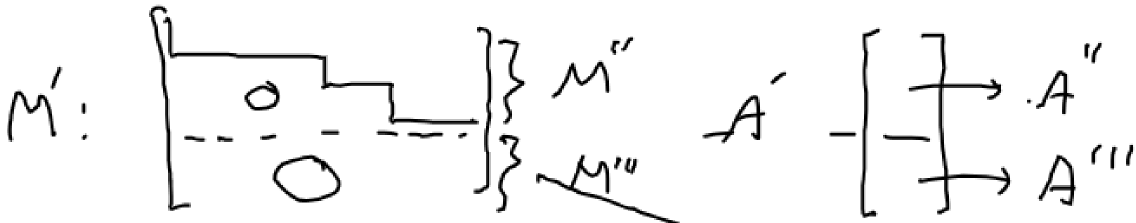
(معلومها)

$$(M \mid A) \xrightarrow{\text{عملیات سطری}} (M' \mid A')$$

عملیات سطری:
- سطر i و سطر j باهم جابه‌جا شوند
- مضرب α از سطر i به سطر j اضافه شود



M' به شکل پلکانی: هر پله با ارتفاع یک سطر



معادلات متناظر با این سطرها (ی) بی‌تأثیرند — اگر $A''=0$،

معادلات متناظر با این سطرها ناسازگارند — اگر $A'''=0$

$M''X = A''$ $\qquad$ $M''' = 0$

$M'''X = A''' \longrightarrow 0 = A'''$

اگر A''' صفر بود، معادله‌ی $M''X = A''$ ای می‌شود.

اگر A''' صفر نبود، دستگاه ناسازگار است.

دستگاه جواب ندارد

معادلات باقیمانده:

$M''X = A''$

حل دستگاه $MX = A$ به حل دستگاه $M''X = A''$ منجر شد

مثال: بعد از عملیات

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 2 & 3 & 5 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 7 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \qquad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = X$$

$$M'' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 7 \end{pmatrix} \qquad A'' = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$M''' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad A''' = \begin{pmatrix} 1 \end{pmatrix}$$

$$M''' X = A''' \qquad 0 = 1 \qquad \times$$

ناسازگار

مثال: بعد از عملیات

$$M' = \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 2 & 3 & 5 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 7 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$M''' = (0\ 0\ 0\ 0\ 0) \qquad A''' = (0)$$

$$M''' X = A''' \qquad 0 = 0 \ \checkmark$$ اتحاد

$$M'' X = A''$$ این معادله حذف میشود. باقی میماند

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 2 & 3 & 5 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 7 & -1 \end{array}\right)$$

3 ש׳: $x_4 + 7x_5 = -1$

$\boxed{x_4 = -1 - 7x_5}$ [illegible] x_5

2 ש׳: $x_2 - 2x_3 + 2x_4 + x_5 = 3$

$x_2 = 3 + 2x_3 - 2x_4 - x_5 = 5 + 2x_3 + 13x_5$

$\boxed{x_2 = 5 + 2x_3 + 13x_5}$

1 ש׳ $x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 + 5x_5 = 2$

$x_1 = 2 - x_2 - 2x_3 - 3x_4 - 5x_5 = -4x_3 + 3x_5$

$$\boxed{\begin{aligned} x_4 &= -1-7x_5 \\ x_2 &= 5+2x_3+13x_5 \\ x_1 &= -4x_3+3x_5 \end{aligned}}$$

$$x_1+x_2+2x_3+3x_4+5x_5 \overset{?}{=} 2$$

$$(-4x_3+3x_5)+(5+2x_3+13x_5)+2x_3$$
$$+3(-1-7x_5)+5x_5 \overset{?}{=} 2$$

$$2+(-4+2+2)x_3+(3+13-21+5)x_5 \overset{?}{=} 2 \checkmark$$

$$x_2 - x_3 + 2x_4 + x_5 \stackrel{?}{=} 3$$

$$(5 + 2x_3 + 13x_5) - x_3 + 2(-1 - 7x_5) + x_5 \stackrel{?}{=} 3$$

$$[5 + 2(-1)] + \underbrace{(2 - 1)}_{\neq 0} x_3 + (13 - 14 + 1) x_5 \stackrel{?}{=} 3. \quad \times$$

اشتباه شده.

تکرار حل مسئله :

معادله سوم : $x_4 + 7x_5 = -1 \Longrightarrow x_4 = -1 - 7x_5$

معادله دوم $x_2 - x_3 + 2x_4 + x_5 = 3$

$$\Longrightarrow x_2 = 5 + x_3 + 13x_5$$

معادله اول $x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 + x_5 = 2$

$$x_1 = -3x_3 + 3x_5$$

$x_1 = -3x_3 + 3x_5$

$x_2 = 5 + x_3 + 13x_5$

$x_4 = -1 - 7x_5$

[illegible] : $x_4 + 7x_5 = -1$ ✓

[illegible] : $x_2 - x_3 + 2x_4 + x_5 = 3$

$(5 + x_3 + 13x_5) - x_3 + 2(-1 - 7x_5) + x_5 \stackrel{?}{=} 3$

$(5-2) + (1-1)x_3 + (13 - 14 + 1)x_5 \stackrel{?}{=} 3$ ✓

$$x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 + 5x_5 \stackrel{?}{=} 2$$

$$-3x_3 + 3x_5 + (5 + x_3 + 13x_5) + 2x_3$$

$$+ 3(-1 - 7x_5) + 5x_5 \stackrel{?}{=} 2$$

$$(5-3) + (\underbrace{-3+1+2}_{0})x_3 + (\underbrace{3+13-21+5}_{0})x_5 \stackrel{?}{=} 2$$

✓

$$x_1 = -3x_3 + 3x_5$$

$$x_2 = 5 + x_3 + 13x_5$$

$$x_4 = -1 - 7x_5$$

$$
\begin{aligned}
x + y + z &= 4 \\
w + 2x + y + 2z &= 7 \\
-w + 2y + z &= 4 \\
2w + x &= 1.
\end{aligned}
$$

$$
\left(\begin{array}{cccc|c}
0 & 1 & 1 & 1 & 4 \\
1 & 2 & 1 & 2 & 7 \\
-1 & 0 & 2 & 1 & 4 \\
2 & 1 & 0 & 0 & 1
\end{array}\right)
\xrightarrow{1 \longleftrightarrow 2}
$$

$$
\left(\begin{array}{cccc|c}
1 & 2 & 1 & 2 & 7 \\
0 & 1 & 1 & 1 & 4 \\
-1 & 0 & 2 & 1 & 4 \\
2 & 1 & 0 & 0 & 1
\end{array}\right)
\xrightarrow[3 \to 3 + (1)1]{4 \to 4 + (-2)1}
\left(\begin{array}{cccc|c}
1 & 2 & 1 & 2 & 7 \\
0 & 1 & 1 & 1 & 4 \\
0 & 2 & 3 & 3 & 11 \\
0 & -3 & -2 & -4 & -13
\end{array}\right)
$$

$$
\xrightarrow[4 \to 4 + (3)2]{3 \to 3 + (-2)2}
\left(\begin{array}{cccc|c}
1 & 2 & 1 & 2 & 7 \\
0 & 1 & 1 & 1 & 4 \\
0 & 0 & 1 & 1 & 3 \\
0 & 0 & 1 & -1 & -1
\end{array}\right)
\xrightarrow{4 \to 4 + (-1)3}
\left(\begin{array}{cccc|c}
1 & 2 & 1 & 2 & 7 \\
0 & 1 & 1 & 1 & 4 \\
0 & 0 & 1 & 1 & 3 \\
0 & 0 & 0 & -2 & -4
\end{array}\right)
$$

$4: \quad -2z = -4 \implies z = 2$

$3: \quad y + z = 3 \implies y = 1$

$2: \quad x + y + z = 4 \implies x = 1$

$1: \quad w + 2x + y + 2z = 7 \implies w = 0$

$$x + y = 3$$

$$2x + y = 4$$

$$x + 3y = 5$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \\ 1 & 3 & 5 \end{array}\right) \xrightarrow[3 \to 3 + (-1)1]{2 \to 2 + (-2)1} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 2 & 2 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{3 \to 3 + (2)2} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & -2 \\ \hline 0 & 0 & -2 \end{array}\right) \updownarrow \quad 0 = -2$$

ناسازگار

دستگاه جواب ندارد.

$$\begin{aligned} x+y&=3\\ 2x+y&=4\\ x+2y&=5 \end{aligned} \qquad \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 3\\ 2 & 1 & 4\\ 1 & 2 & 5 \end{array}\right) \xrightarrow[3\to 3+(-1)1]{2\to 2+(-2)1} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 3\\ 0 & -1 & -2\\ 0 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{3\to 3+(1)2} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 3\\ 0 & -1 & -2\\ \boxed{0} & \boxed{0} & \boxed{0} \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 3\\ 0 & -1 & -2 \end{array}\right)$$

حذف میشود

$$-y=-2 \Longrightarrow y=2$$

$$x+y=3 \Longrightarrow x=1$$

$$\begin{aligned} 2x+y&=4\\ x+2y&=5\\ \hline 3x+3y&=9 \end{aligned}$$

$$x + y = 3$$
$$2x + y = 4$$
$$x + 2y = 4$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 4 \end{array}\right) \xrightarrow[3 \to 3 + (-1)1]{2 \to 2 + (-2)1} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{3 \to 3 + (1)2} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & -1 \end{array}\right) \qquad 0 = -1$$

ناسازگار

$$x + y = -3$$
$$-y = -2$$
$$0 = -1 \quad \times$$

$$x + y + z = 3$$

$$x + y + 2z = 4$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 2 & 4 \end{array}\right) \xrightarrow{2 \to 2 + (-1)1}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$$z = 1$$

$$x + y + z = 3$$

$$x + y = 2 \qquad x = 2 - y$$

$$x = 2 - y$$

y [illegible]

$$z = 1$$

$$x+y+z=1$$

$$2x+2y+2z=2$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow{2 \to 2+(-2)1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

زائد

$$x+y+z=1$$

$$x=1-y-z$$

y

z آزاد

$$x + y + z = 1$$
$$2x + 2y + 2z = 3$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow{2 \to 2 + (-2) 1}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$0 = 1$ ناسازگار ,

دستگاه جواب ندارد

$$MX = A$$

M یک تبدیل خطی

این که این دستگاه جواب یکتا دارد

یعنی می‌شود X را برحسب A به دست آورد

$$M(X) = A \qquad X = M^{-1}(A)$$

وارون تابع

$M : \mathbb{V} \to \mathbb{W}$ M خطی است

$\mathrm{dom}(M) = \mathbb{V}$ دامنه‌ی تابع

$\mathrm{img}(M)$ تصویر M

$$\mathrm{img}(M) = \{ Mx \mid x \in \mathrm{dom}(M) \}$$

$$= M[\mathrm{dom}(M)] = M(\mathbb{V})$$

$$\mathrm{img}(M) \subseteq \mathbb{W}$$

M وارون‌پذیر است، اگر و تنها اگر M یک‌به‌یک و پوشا باشد

پوشا بودن M : $img(M) = W$

یک‌به‌یک بودن M :

$$MX = MY \Rightarrow X = Y$$

$$MX - MY \overset{M \text{ خطی}}{=} M(X - Y)$$

$$MX = MY \Leftrightarrow M(X-Y) = 0$$

$$X = Y \Leftrightarrow X - Y = 0$$

برای توابع خطی :

یک به یک بودن M :

$$Mu = 0 \Rightarrow u = 0$$

$\ker(M)$ هسته ی M

$$\ker(M) = \{ x \in \mathrm{dom}(M) \mid Mx = 0 \}$$

$$\ker(M) \subseteq \mathrm{dom}(M) = V$$

$$\mathrm{img}(M) \subseteq W$$

یک به یک بودن M :

$$\ker(M) = \{0\}$$

$$\dim[\ker(M)] = 0$$

پوشا بودن M :

$$\mathrm{img}(M) = \mathbb{W}$$

$$\dim[\mathrm{img}(M)] = \dim(\mathbb{W})$$

قضیه:

$$\dim[\ker(M)] + \dim[\mathrm{img}(M)] = \dim[\mathrm{dom}(M)]$$

برای اثبات یک پایه‌ی کامل برای دامنه M می‌سازیم

---

f یک پایه برای تصویر M: (تصویر M در W است.)

$f_1, \ldots, f_j$ در $\mathrm{img}(M)$ اند

پس در W اند.

$\forall i:\quad f_i = M e_i \qquad e_i \in \mathrm{dom}(M)$

$\exists e_i \qquad e_i \in V$

فرض می‌کنیم e_1 تا e_j خطی مستقل ن.

داریم

$\alpha_1 e_1 + \cdots + \alpha_j e_j =$

α_1 تا α_j همه ن. بنابراین حداقل یکی از α_1 تا α_j صفر ن.

$M(\alpha_1 e_1 + \cdots + \alpha_j e_j) = 0$

$\alpha_1 M e_1 + \cdots + \alpha_j M e_j = 0 \qquad \alpha_1 f_1 + \cdots + \alpha_j f_j = 0$

f_1 تا f_j خطی مستقل‌اند (چون یک پایه برای $img(M)$ اند)

پس

$$\alpha_1 = \cdots = \alpha_j = 0$$

در ترکیب خطی از f_i ها همه‌ی ضرایب باید صفر باشند.

نتیجه اینکه اگر $\alpha_1 e_1 + \cdots + \alpha_j e_j = 0$ ،

α_1 تا α_j صفرند. یعنی e_1 تا e_j خطی مستقل‌اند.

$v \in V$ نشان میدهیم اگر

$v = v' + v''$ $\quad v'' \in \ker(M)$ و

بردار

$v' = (v'_1)e_1 + \cdots + (v'_j)e_j$

بردار

عدد

اثبات: $(Mv) \in \mathrm{img}(M)$

$Mv = \beta_1 f_1 + \cdots + \beta_j f_j = \beta_1 M e_1 + \cdots + \beta_j M e_j$
$= M(\beta e_1 + \cdots + \beta_j e_j)$

$$M[v-(\beta_1 e_1+\cdots+\beta_j e_j)]=0$$

$$[v-(\beta_1 e_1+\cdots+\beta_j e_j)] \in \ker(M)$$

$$v'':=v-(\beta_1 e_1+\cdots+\beta_j e_j)$$

$$v':=\beta_1 e_1+\cdots+\beta_j e_j$$

$$v=v'+v'' \longrightarrow \in \ker(M)$$

یک ترکیب خطی از e_1 تا e_j است.

نکته: برای هسته ی M میگیریم :

$$d_1, \ldots, d_a$$

$v \in M \quad : \quad v = v' + v''$

$$v' = \beta_1 e_1 + \cdots + \beta_j e_j$$

$v'' \in \ker(M) \qquad v'' = \alpha_1 d_1 + \cdots + \alpha_a d_a$

$e_1, \ldots, e_j$ و $d_1, \ldots, d_a$

هر v در V یک ترکیب خطی از e_1 تا e_j و d_1 تا d_a است.

ثابت کنیم e_1 تا e_j و d_1 تا d_a خطی مستقل‌اند.

ها

$$r_1 d_1 + \dots + r_a d_a + s_1 e_1 + \dots + s_j e_j = 0$$ صفر

ضر

M:
$$M d_1 = \dots = M d_a = 0$$

$$s_1 M e_1 + \dots + s_j M e_j = 0$$

$$s_1 f_1 + \dots + s_j f_j = 0$$

f_1 تا f_j پایه‌ای برای

$s_1 = \dots = s_j = 0$ $\Leftarrow$ ... است پس خطی مستقل‌اند، است $img(M)$

$$r_1 d_1 + \cdots + r_a d_a = 0$$

d_1 تا d_a یک پایه برای $\ker(m)$ اند. پس مستقل خطی اند

$$\Rightarrow r_1 = \cdots = r_a = 0$$

$$r_1 d_1 + \cdots + r_a d_a + s_1 e_1 + \cdots + s_j e_j = 0$$ نتیجه‌ی کلی

$$\Rightarrow r_1 = \cdots = r_a = e_1 = \cdots = e_j = 0$$

d_1 تا d_a و e_1 تا e_j مستقل خطی اند.

هر بردار در W یک ترکیب خطی از $\{d_1, \ldots, d_a, e_1, \ldots, e_j\}$

است و $\{d_1, \ldots, d_a, e_1, \ldots, e_j\}$ خطی مستقل است.

پس $\{d_1, \ldots, d_a, e_1, \ldots, e_j\}$ یک پایه برای W است.

$$\dim(W) = a + j$$

d_1 تا d_a یک پایه برای $\ker(M)$ است.

$$\dim[\ker(M)] = a$$

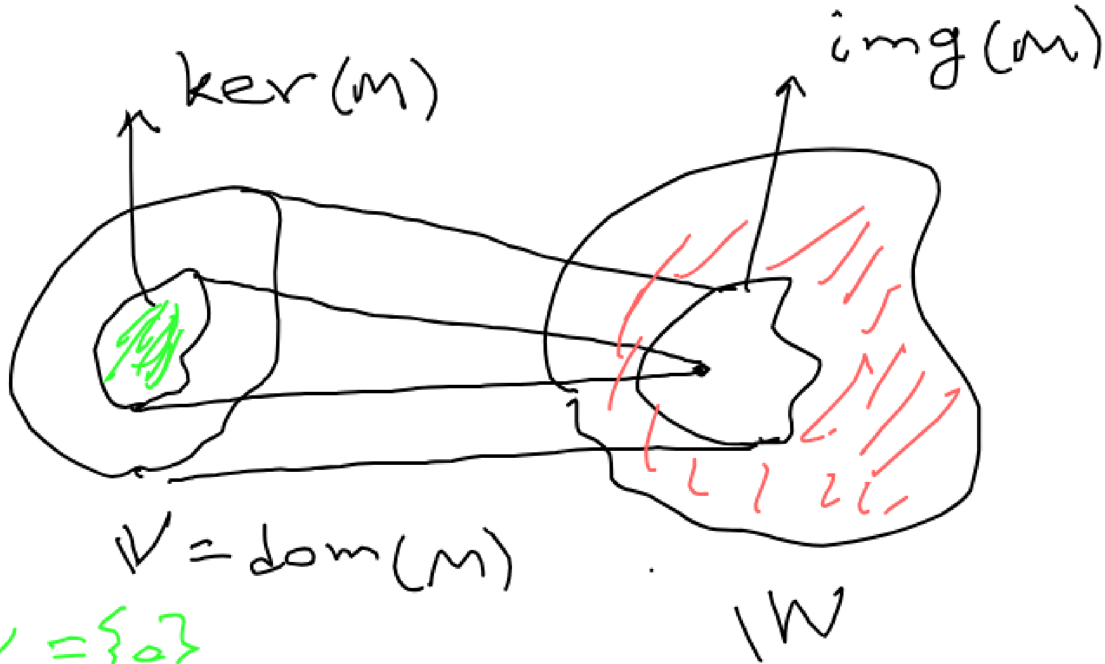
e_1 تا e_j پایه برای $\underbrace{\operatorname{img}(M)}_{\subseteq W}$ نیستند.   ($\underbrace{e_1 \ldots e_j}_{\in V}$)

f_1 تا f_j یک پایه برای $\operatorname{img}(M)$ هستند.

$$\boxed{\dim[\operatorname{img}(M)] = j}$$

$$\dim(V) = \dim[\ker(M)] + \dim[\operatorname{img}(M)]$$

$$\dim[\operatorname{dom}(M)] = \dim[\ker(M)] + \dim[\operatorname{img}(M)]$$



//// $= \{0\}$

M یک به یک است اگر و تنها اگر $\ker(M)=\{0\}$ (هسته M بدیهی باشه)

M پوشا است اگر و تنها اگر $W = \mathrm{img}(M)$

///// $= \Phi$

$$M : V \to W$$

سطر ستون

$$\dim V = m \qquad \mathrm{mat}(M) \quad n \times m$$

$$\dim W = n$$

$$\mathrm{img}(M) \subseteq W \qquad \dim[\mathrm{img}(M)] \le n$$

$$\ker(M) \subseteq V \qquad \dim[\mathrm{img}(M)] \le m$$

$$\underbrace{\dim[\ker(M)]}_{m'} + \underbrace{\dim[\mathrm{img}(M)]}_{n'} = m$$

$m' \leq m \qquad m' + n' = m \rightarrow n' < n$

$n' \leq n$

$m < n: \quad n' < m < n \Rightarrow n' < n$

$\dim[\operatorname{img}(M)] < \dim(W)$

پس M پوشا نیست :

$M \begin{bmatrix} \\ \\ \\ \end{bmatrix}$

تعداد سطرهای M بیشتر از تعداد ستونهای M :

M پوشا نیست، پس وارون پذیر نیست .

$m > n$: $n' < n < m \implies n' < m$

$m' + n' = m$ $m' > 0$

$\dim[\ker(M)] > 0$

M یک به یک نیست، پس معکوس پذیر نیست.

M: $\begin{bmatrix} & & \end{bmatrix}$ تعداد سطرهای M کمتر از تعداد ستون‌های M

$m = n$ $\quad\quad m = m' + n' = n$

$m' > 0$ و $n' < n$

$\dim[\ker(M)] > 0$ و $\dim[\mathrm{img}(M)] < n$

M تک به تک نیست و M پوشا نیست

$m' = 0$ و $n' = n$

$\dim[\ker(M)] = 0$ و $\dim[\mathrm{img}(M)] = n$

M تک به تک است و M پوشا است

$\dim(V) = \dim(W)$

یا M هم یک‌به‌یک است، و هم پوشا

(که یعنی M وارون‌پذیر است)

یا M نه یک‌به‌یک است، و نه پوشا

(پس M وارون‌پذیر نیست)

M ماتریس مربع است.

$M: \begin{bmatrix} \quad \end{bmatrix}$

در این حالت، یک‌به‌یک بودن و پوشا بودن M هم‌ارزند.