$M : V \to W$

$M^{-1} : W \to V$

$M \circ M^{-1} = 1_W$ همانی

$M^{-1} \circ M = 1_V$

$1_W(w) = w$

$\in W$

$1_V(v) = v$

$\in V$

$\dim(V) = \dim(W) = n$

اگر M وارون پذیر باشد

$\in W$

$M^{-1}(w) = v \longrightarrow \in V$

$M(v) = w$

$mat(M) \quad n \times n$

$mat(M^{-1}) \quad n \times n$

$1\,v = v$

$\operatorname{mat}(1)$

$e_1, \dots, e_n$

[illegible]

$\operatorname{mat}(e_1) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$

$\vdots$

$\operatorname{mat}(e_n) = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

$1\,e_1 = e_1 \quad \cdots \quad 1\,e_n = e_n$

$\underbrace{1\,e_2}_{\operatorname{mat}(1 e_2)} = \underbrace{e_2}_{\downarrow\ \operatorname{mat}(e_2)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$

$$\underset{\substack{\downarrow \\ \operatorname{mat}(1)}}{1} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & \vdots \\ \vdots & 0 & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}}_{\operatorname{mat}(1)} \longrightarrow \text{ماتریس واحد}$$

ماتریس واحد یک ماتریس قطری است که
اعضای روی قطرش یک است.

$$I = \underbrace{\mathrm{diag}}_{}(1, 1, \dots, 1)$$

قطری

diagonal

صفر

$$\mathrm{diag}(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = \begin{bmatrix} \alpha_1 & & 0 \\ & \alpha_2 & \\ 0 & & \ddots \; \alpha_n \end{bmatrix}$$

صفر

$$\left[\operatorname{diag}(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)\right]_{ij} = \begin{cases} 0, & i \neq j \\ \alpha_i, & i = j \end{cases}$$

$$\left[1 = \operatorname{diag}(1, 1, \ldots, 1)\right]_{ij} = \begin{cases} 0, & i \neq j \\ 1, & i = j \end{cases}$$

δ_{ij} دلتای کرونکر

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 0, & i \neq j \\ 1, & i = j \end{cases}$$

ماتریس واحد

$$\delta_{ij} = (1)_{ij}$$

ماتریس

$$M^{-1}M = 1$$

$$M M^{-1} = 1$$

$$(M M^{-1})_{ij} = \delta_{ij}$$

$$\sum_k M_{ik} (M^{-1})_{kj} = \delta_{ij}$$

$$\sum_k (M^{-1})_{ik} M_{kj} = \delta_{ij}$$

حل:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \qquad M^{-1} = ?$$

$$M M^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} M^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad M^{-1} = \left(\underbrace{X_1}_{2\times 1} \middle| \underbrace{X_2}_{2\times 1} \right)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} X_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{2 \to 2 + (-3)1} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & -3 \end{array}\right) \quad X_1 = \begin{pmatrix} (M^{-1})_{11} \\ (M^{-1})_{21} \end{pmatrix}$$

$$-2\,(M^{-1})_{21} = -3 \qquad (M^{-1})_{21} = \frac{3}{2}$$

$$(M^{-1})_{11} + 2\,(M^{-1})_{21} = 1 \qquad (M^{-1})_{11} = 1 - 3 = -2$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ 3/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 + 3 \\ -6 + 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \checkmark$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & -3 \end{array}\right) \xrightarrow{1 \to 1 + (1)2} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & -2 \\ 0 & -2 & -3 \end{array}\right) \xrightarrow{2 \to (-1/2)2}$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 3/2 \end{array}\right) \Longrightarrow X_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 3/2 \end{pmatrix}$$

1 ستون دوم

$$X_2: \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 4 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{2 \to 2 + (-3)1} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{1 \to 1 + (1)2}$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{2 \to (-1/2)2} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1/2 \end{array}\right)$$

$$X_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1/2 \end{pmatrix} \qquad M^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3/2 & -1/2 \end{pmatrix}.$$

✓

$$M M^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3/2 & -1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2+3 & 1-1 \\ -6+6 & 3-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$M^{-1}M = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3/2 & -1/2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2+3 & -4+4 \\ 3/2-3/2 & 3-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \checkmark$$

$$MX_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad MX_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

با عملیات سطری: $1 \longleftarrow M$

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ماتریس افزوده:

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{\text{عمليات سطري}} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & \\ 0 & 1 & M^{-1} \end{array}\right)$$

$$\left(M \mid 1 \right) \xrightarrow{\text{عمليات سطري}} \left(1 \mid M^{-1} \right)$$

مثال :

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{2 \to 2 + (-3)1} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -3 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{1 \to 1 + (1)2}$$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & -2 & -3 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{2 \to (-1/2)2} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 3/2 & -1/2 \end{array}\right)$$

$$M^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3/2 & -1/2 \end{pmatrix}$$

اگر M وارون‌پذیر نباشد،

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{2 \to 2+(-2)1} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \end{array}\right)$$

$$0(M^{-1})_{11} + 0(M^{-1})_{21} = -2 \qquad 0 = -2$$

$$0(M^{-1})_{12} + 0(M^{-1})_{22} = 1 \qquad 0 = 1 \qquad \times$$

این دستگاه جواب ندارد.

$$MX=0 \qquad X=\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{2+(-2)1} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \qquad 0=0$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 0 \end{array}\right) \qquad x+2y=0 \qquad x=-2y$$

$$X=\begin{pmatrix} -2y \\ y \end{pmatrix}$$ y دلخواه

تنها جواب برای X صفر نیست. پس M یک به یک نیست.

نشان میدهیم M پوشا نیست.

$$MX = A \qquad X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \qquad A = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & a \\ 2 & 4 & b \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & a \\ 0 & 0 & b-2a \end{array}\right) \qquad 0 = b-2a$$

$b - 2a \neq 0$ دستگاه جواب ندارد

$b - 2a = 0 \Longrightarrow x + 2y = a$ دستگاه جواب دارد.

$x = a - 2y$

$X = \begin{pmatrix} a-2y \\ y \end{pmatrix}$ اگر و فقط اگر $b = 2a$

$$\{Mx \mid x \in V\} = \underbrace{\left\{\begin{pmatrix} a \\ 2a \end{pmatrix} \mid a \text{ دلخواه} \right\}}_{img(M)}$$

$$\begin{pmatrix} a \\ 2a \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \neq 0$ $\quad f = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ $\quad f$ مستقل خطی است.

هر عضو تصویر M یک مضرب f است (یک ترکیب خطی از f است). پس f یک پایه برای $img(M)$ است.

$$\dim[img(M)] = 1$$

$$\dim[\ker(M)] = ?$$

$$X \in \{\ker(M)\} \qquad X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$MX = 0 \qquad x = -2y$$

$$X = \begin{pmatrix} -2y \\ y \end{pmatrix} = y \underbrace{\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}} \longrightarrow e = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$e \neq 0$ ، پس e خطی مستقل است . هر عضو $\ker(M)$ یک ضریب e است . پس e یک پایه برای $\ker(M)$ است .

$$\dim[\ker(M)] = 1$$

$$\dim[\ker(M)] + \dim[\mathrm{img}(M)] = 1 + 1 = 2$$

$$= \dim[\mathrm{dom}(M)]$$

این یک مثال از آن قضیه بود.

مثال:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

آیا $\ker(M)$ برابر $\{0\}$ است؟ $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

$$MX = 0 \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & 3 & 4 & 0 \\ 3 & 4 & 5 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[3 \to 3 + (-3)1]{2 \to 2 + (-2)1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & -4 & 0 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{3 \to 3 + (-2)2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \quad 0 = 0 \quad \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 0 \end{array}\right)$$

$-y - 2z = 0 \quad y = -2z \quad x + 2y + 3z = 0 \quad x - z = 0$

$x = z \qquad X = \begin{pmatrix} z \\ -2z \\ z \end{pmatrix} \qquad$ دلخواه z

تنها جواب برای X در $(MX=0)$ صفر نیست: $\ker(M)$ بزرگه

نیست، یعنی $\ker(M) \neq \{0\}$، پس M وارون‌پذیر نیست

برای به دست آوردن M^{-1} (که می‌دانیم وجود ندارد)

باید این دستگاه‌ها حل بشوند.

$$MM^{-1} = 1 \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix} \underset{3\times 3}{M^{-1}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

3 دستگاه (3 معادله با 3 مجهول)

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 5 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[3 \to 3 + (-3)1]{2 \to 2 + (-2)1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -4 & -3 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{3 \to 3 + (-2)2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right)$$

دستگاه ناسازگار:

$$\underset{1\times 3}{(0 \quad 0 \quad 0)}\ \underset{3\times 3}{M^{-1}} = \underset{1\times 3}{(1 \quad -2 \quad 1)}$$

$$= (0 \quad 0 \quad 0)$$

M^{-1} وجود ندارد.

یک مثال دیگر:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 6 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 6 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[3\to 3+(-3)1]{2\to 2+(-2)1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -3 & -3 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{3\to 3+(-2)2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[2\to 2+(2)3]{1\to 1+(-3)3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & -2 & 6 & -3 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{1\to 1+(2)2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{2\to (-1)2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right)$$

$$M^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \qquad MM^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -2+3 & 6-6 & 1-4+3 \\ -4+4 & 9-8 & 2-6+4 \\ -6+6 & 12-12 & 3-8+6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \checkmark$$

$$M^{-1}M = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2+3 & -4+4 & -6+6 \\ 6-6 & 9-8 & 12-12 \\ 1-4+3 & 2-6+4 & 3-8+6 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & & 1 \end{pmatrix} \quad \checkmark$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ -1 & 4 & -2 \end{pmatrix} = M$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 4 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[3 \to 3 + (1)1]{2 \to 2 + (-2)1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{3 \to 3 + (-4)2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 9 & -4 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[2 \to 2 + (1/4)3]{1 \to 1 + (-1/2)3}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -7/2 & 2 & -1/2 \\ 0 & 1 & 0 & 1/4 & 0 & 1/4 \\ 0 & 0 & 4 & 9 & -4 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{3 \to (\frac{1}{4})3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{7}{2} & 2 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{9}{4} & -1 & 1/4 \end{array}\right)$$

$$M^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{7}{2} & 2 & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} \\ \frac{9}{4} & -1 & 1/4 \end{pmatrix} \qquad M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ -1 & 4 & -2 \end{pmatrix}$$

$$M M^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ -1 & 4 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{7}{2} & 2 & -1/2 \\ 1/4 & 0 & 1/4 \\ \frac{9}{4} & -1 & 1/4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{7}{2}+\frac{9}{2} & 2-2 & -1/2+1/2 \\ -7+\frac{1}{4}+\frac{27}{4} & 4-3 & -1+\frac{1}{4}+3/4 \\ \frac{7}{2}+1-9/2 & -2+2 & 1/2+1-1/2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \checkmark$$

$$M^{-1} M = \begin{pmatrix} -\frac{7}{2} & 2 & -1/2 \\ \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} \\ \frac{9}{4} & -1 & 1/4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ -1 & 4 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{7}{2}+4+1/2 & 2-2 & -7+6+1 \\ \frac{1}{4}-1/4 & 1 & \frac{2}{4}-\frac{2}{4} \\ \frac{9}{4}-2-1/4 & -1+1 & \frac{9}{2}-3-1/2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \checkmark$$