حجم جبری n - بعدی

$$\varepsilon : \overbrace{V\times\cdots\times V}^{n} \longrightarrow F$$

$$\varepsilon(\underbrace{v_1,\dots,v_n}_{\text{بردار}}) = \text{عدد}$$

ε کاملاً پادمتقارن است:

$$\varepsilon(\dots,v_i,\dots,v_j,\dots) = -\,\varepsilon(\dots,v_j,\dots,v_i,\dots)$$

جای v_i و v_j باهم عوض شده

ε n خطی است: $\varepsilon(v_1,\dots,v_n)$ نسبت به هر یک از v_iها خطی است.

ε با $\varepsilon_{12\dots n}$ به طور کامل مشخص می‌شود.

$$\varepsilon_{i_1,\dots,i_n} = \varepsilon(e_{i_1},\dots,e_{i_n})$$

$e_1,\dots,e_n$ یک پایه برای V

$$\varepsilon_{i_1,\dots,i_n} = \varepsilon_{1\dots n}\begin{cases} 0, & \text{دست‌کم دو شاخص یکسان باشند} \\ +1, & \text{اگر } (i_1,\dots,i_n) \text{ یک جایگشت زوج از } (1,\dots,n) \text{ باشد} \\ -1, & \text{اگر } (i_1,\dots,i_n) \text{ یک جایگشت فرد از } (1,\dots,n) \text{ باشد} \end{cases}$$

هر دو حجم ε و $\tilde{\varepsilon}$ باهم متناسب‌اند: یکی از آنها برابر است با یک عدد ثابت در دیگری

$\varepsilon(v_1, \dots, v_n)$ حجم متوازی‌السطوح n-بعدی که ضلع‌هایش v_1 تا v_n اند:

$$\varepsilon(\underbrace{v_1, \dots, v_n}_{\text{بردار}}) = \sum_{i_1,\dots,i_n} \varepsilon_{i_1 \cdots i_n} \underbrace{(v_1)_{i_1} \cdots (v_n)_{i_n}}_{\text{عدد}}$$

n^n جمله

$$\underbrace{v_i}_{\text{بردار}} = \sum_j \underbrace{(v_i)_j}_{\text{مؤلفهٔ } j \text{ ام بردار } v_i \text{ (عدد)}} \underbrace{e_j}_{\text{بردار}}$$

تعداد جملاتی که مخالف صفر باشند

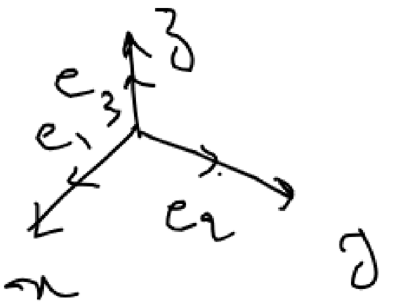
$$= \underbrace{n}_{\text{مقادیر } i_1} \times \underbrace{(n-1)}_{\text{مقادیر } i_2} \times (n-2) \times \cdots \times 1 = n!$$

$\mathbb{F}=\mathbb{R}$

کنج $(v_1,\dots,v_n)$ راستگرد $\qquad \varepsilon(v_1,\dots,v_n)>0$

کنج $(v_1,\dots,v_n)$ چپگرد $\qquad \varepsilon(v_1,\dots,v_n)<0$

شکل در سه بعد



(e_1,e_2,e_3) راستگرد تعریف کرد

e_1: شست راست

e_2: اشاره‌ی راست

e_3: میانی راست.

(این فقط تعریف، قرارداد است)

دترمینان:

$T : \mathbb{V} \to \mathbb{V}$ خطی

$\mathcal{E} : \mathbb{V} \times \cdots \times \mathbb{V} \to \mathbb{F}$ حجم ناصفر $\mathcal{E} \neq 0$

$$\frac{\mathcal{E}(Tv_1, \ldots, Tv_n)}{\mathcal{E}(v_1, \ldots, v_n)}$$

$\mathcal{E}(v_1, \ldots, v_n) \neq 0$

$\tilde{\mathcal{E}}$ یک حجم ناصفر

$$\frac{\tilde{\mathcal{E}}(Tv_1, \ldots, Tv_n)}{\tilde{\mathcal{E}}(v_1, \ldots, v_n)}$$

$\tilde{\mathcal{E}} = \alpha \mathcal{E}$

$$\tilde{\mathcal{E}}(Tv_1, \ldots, Tv_n) = \alpha \mathcal{E}(Tv_1, \ldots, Tv_n)$$

که در نسبت

$$\tilde{\mathcal{E}}(v_1, \ldots, v_n) = \alpha \mathcal{E}(v_1, \ldots, v_n)$$

$$\frac{\tilde{\varepsilon}(Tv_1,\dots,Tv_n)}{\tilde{\varepsilon}(v_1,\dots,v_n)} = \frac{\varepsilon(Tv_1,\dots,Tv_n)}{\varepsilon(v_1,\dots,v_n)}$$

کسر به انتخاب حجم (ناصفر) بستگی ندارد.

$$\varepsilon(Tv_1,\dots,Tv_n) = \varepsilon'(v_1,\dots,v_n)$$

$$\varepsilon' : \overbrace{V\times\cdots\times V}^{n} \to \mathbb{F}$$

$$\varepsilon'(\dots,v_i,\dots,v_j,\dots) = \varepsilon(\dots,Tv_i,\dots,Tv_j,\dots)$$

$$= -\varepsilon(\dots,Tv_j,\dots,Tv_i,\dots) = -\varepsilon'(\dots,v_j,\dots,v_i,\dots)$$

ε' کاملاً پادمتقارن است.

عدد

$$\varepsilon'(\alpha u_1+\beta v_1, v_2, \dots, v_n) = \varepsilon\big(T(\alpha u_1+\beta v_1), Tv_2, \dots, Tv_n\big)$$

بردار

$$\varepsilon(\alpha Tu_1+\beta Tv_1, Tv_2, \dots, Tv_n)$$

$$=\alpha\,\varepsilon(Tu_1, Tv_2, \dots, Tv_n)+\beta\,\varepsilon(Tv_1, Tv_2, \dots, Tv_n)$$

$$=\alpha\,\varepsilon'(u_1, v_2, \dots, v_n)+\beta\,\varepsilon'(v_1, v_2, \dots, v_n)$$

ε' نسبت به بردار اول خطی است.

مشابه: $\varepsilon'(v_1, \dots, v_n)$ نسبت به هر کدام از v_i ها خطی است.

ε' n-خطی است.

ε' پادمتقارن است، n-خطی است، و مقدارش عدد است

پس ε' حجم است.

$\varepsilon \neq 0$

$$\varepsilon' = (\text{عدد ثابت})\, \varepsilon$$

$$\varepsilon'(v_1, \dots, v_n) = \underbrace{(\text{عدد ثابت})}_{\text{مستقل از } (v_1,\dots,v_n)}\, \varepsilon(v_1, \dots, v_n)$$

$$\varepsilon(Tv_1, \dots, Tv_n) = \underbrace{(\text{عدد ثابت})}_{\text{مستقل از } (v_1,\dots,v_n)}\, \varepsilon(v_1, \dots, v_n)$$

$$\frac{\varepsilon(Tv_1,\dots,Tv_n)}{\underbrace{\varepsilon(v_1,\dots,v_n)}_{\neq 0}} =: \det(T)$$ مستقل از انتخاب ε و

مستقل از انتخاب $(v_1,\dots,v_n)$.

تعریف $\det(T)$ (دترمینان T)

$$\varepsilon(Tv_1,\dots,Tv_n) = \underbrace{(\text{عدد})}_{\text{ثابت}}\ \varepsilon(v_1,\dots,v_n)$$

حتی اگر $0=\varepsilon(v_1,\dots,v_n)$

همیشه درست است $\varepsilon(v_1,\dots,v_n)$ صفر باشه یا نباشه.

$$\boxed{\varepsilon(Tv_1,\dots,Tv_n) = [\det(T)]\ \varepsilon(v_1,\dots,v_n)}$$

$S : V \to V$ خطی

$T : V \to V$ خطی

ε یک حجم ناصفر : $\varepsilon \not\equiv 0$

لازم :

$\varepsilon(e_1, \dots, e_n)$

$$\varepsilon(v_1, \dots, v_n) = \sum_{i_1, \dots, i_n} \varepsilon_{i_1 \dots i_n} (v_1)_{i_1} \cdots (v_n)_{i_n}$$

$$\varepsilon_{i_1 \dots i_n} = \varepsilon_{1 \dots n} \begin{cases} 0 \\ +1 \\ -1 \end{cases} \quad \dots$$

اگر $\varepsilon_{1 \dots n} = 0 \Longrightarrow \varepsilon \equiv 0$ $\quad \boxed{\forall (v_1, \dots, v_n) \quad \varepsilon(v_1, \dots, v_n) = 0}$

$\varepsilon \neq 0 \Rightarrow \varepsilon_{1\dots n} \neq 0$

$\varepsilon_{1\dots n} \neq 0 \Rightarrow \varepsilon \neq 0 \qquad \varepsilon(e_1,\dots,e_n) \neq 0$

$\varepsilon \neq 0 \Leftrightarrow \varepsilon(e_1,\dots,e_n) \neq 0$

$(e_1,\dots,e_n)$ یک پایه برای V

اگر $(v_1,\dots,v_n)$ خطی مستقل باشد،

v_1 تا v_n یک پایه برای V هستند چون n بردار خطی مستقل اند.

$\varepsilon \neq 0$, مستقل خطی $(v_1, \ldots, v_n)$ $\Rightarrow \varepsilon(v_1, \ldots, v_n) \neq 0$

برعکس: گیریم v_1 تا v_n خطی وابسته است.

$\exists\, (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \neq (0, \ldots, 0)$

که $\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n = 0$

مثلاً $\alpha_n \neq 0$

$v_n = \beta_1 v_1 + \cdots + \beta_{n-1} v_{n-1}$

$\beta_i = -\dfrac{\alpha_i}{\alpha_n}$ $\quad \varepsilon(v_1, \ldots, v_{n-1}, v_n) =$

$\varepsilon(v_1, \ldots, v_{n-1}, \beta_1 v_1 + \cdots + \beta_{n-1} v_{n-1})$

$$\varepsilon(v_1,\dots,v_n) = \beta_1\, \cancelto{0}{\varepsilon(v_1,\dots,v_{n-1},v_1)} + \cancelto{0}{\cdots} +$$

$$\beta_{n-1}\, \cancelto{0}{\varepsilon(v_1,\dots,v_{n-1},v_{n-1})}$$ دو بردار یکسان

$$\varepsilon(v_1,\dots,v_n) = 0 \qquad \varepsilon \neq 0$$

$$\varepsilon(v_1,\dots,v_n) = 0 \iff (v_1,\dots,v_n) \text{ خطی وابسته}$$

در نتیجه (مثلاً) حجم متوازی السطوحی که اضلاعش u، v و w هستند صفر است، اگر و تنها اگر u و v و w در یک صفحه باشند.

$$\left.\begin{array}{l} T: V \to V \\ S: V \to V \end{array}\right\}$$ خطی

$$\varepsilon: \overbrace{V \times \cdots \times V}^{n} \longrightarrow \mathbb{F}$$

ε: چند خطی، ناصفر

$\varepsilon \neq 0$

$$T \circ S: V \to V$$

$$T \circ S = TS \qquad (T \circ S)(u) = T[S(u)] = TSu$$

$$\frac{\varepsilon(TSv_1, \ldots, TSv_n)}{\varepsilon(v_1, \ldots, v_n)} = \det(TS)$$

$$\varepsilon(v_1, \ldots, v_n) = 0$$

$(v_1, \ldots, v_n)$ خطی مستقل.

$$Sv_1 = w_1, \dots, Sv_n = w_n$$

$$\det(TS) = \frac{\varepsilon(Tw_1, \dots, Tw_n)}{\varepsilon(v_1, \dots, v_n)}$$

$$\varepsilon(Tw_1, \dots, Tw_n) = [\det(T)]\,\varepsilon(w_1, \dots, w_n)$$

$$= [\det(T)]\,\varepsilon(Sv_1, \dots, Sv_n)$$

$$= [\det(T)]\,[\det(S)]\,\varepsilon(v_1, \dots, v_n)$$

$$\varepsilon(v_1, \dots, v_n) \neq 0$$

$$\det(TS) = [\det(T)][\det(S)]$$

در حالت کلی ممکن است (TS) با (ST) برابر نباشد

اما

$$\det(TS) = \det(ST)$$

چون $\det(T)$ و $\det(S)$ عدد هستند، پس ضربشان

جابه‌جایی است.

تکلیف:

$$\begin{cases} T: V \to V \\ S: V \to V \end{cases}$$

$T: V \to V$ خطی

انتخاب برای ε :

$\varepsilon(e_1, \ldots, e_n) = 1$ یک پایه برای V $(e_1, \ldots, e_n)$

$$\det(T) = \frac{\varepsilon(Te_1, \ldots, Te_n)}{\varepsilon(e_1, \ldots, e_n)}$$

$$\det(T) = \varepsilon(Te_1, \ldots, Te_n)$$

$\det(T) = 0 \iff (Te_1, \ldots, Te_n)$ خطی وابسته باشد

$(Te_1,\dots,Te_n)$ خطی وابسته $\iff$

$$\dim[\mathrm{img}(T)] < n = \dim[\mathrm{dom}(T)]$$

$\iff$ T پوشا نیست $\iff$ T وارون‌پذیر نیست

$\det(T) = 0 \iff$ T وارون‌پذیر نیست

$\det(T) \neq 0 \iff$ T وارون‌پذیر است.