محاسبه‌ی دترمینان:

$$\varepsilon_{12\cdots n}=1$$

$$\det(T)=\varepsilon(\overbrace{Te_1}^{v_1},\cdots,\overbrace{Te_n}^{v_n})$$

$$T=\begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} \end{pmatrix} \qquad Te_1=\begin{pmatrix} T_{11} \\ T_{21} \\ T_{31} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} T_{11} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 0 \\ T_{21} \\ 0 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ T_{31} \end{pmatrix}$$

$$\det(T)=\varepsilon\left(\begin{pmatrix} T_{11} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, v_2, v_3\right)+\varepsilon\left(\begin{pmatrix} 0 \\ T_{21} \\ 0 \end{pmatrix}, v_2, v_3\right)+\varepsilon\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ T_{31} \end{pmatrix}, v_2, v_3\right)$$

$$\det(T) = \det\left(\begin{pmatrix} T_{11} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, v_2, v_3\right) + \det\left(\begin{pmatrix} 0 \\ T_{21} \\ 0 \end{pmatrix}, v_2, v_3\right) + \det\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ T_{31} \end{pmatrix}, v_2, v_3\right)$$

$$\begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} \\ 0 & T_{22} & T_{23} \\ 0 & T_{32} & T_{33} \end{pmatrix}$$

i) $T_{11} = 0$ $\quad \det\left(\begin{pmatrix} T_{11} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, v_2, v_3\right) = 0$

ii) $T_{11} \neq 0$ $\quad \det\left(\begin{pmatrix} T_{11} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, v_2, v_3\right) = \det\left(\begin{pmatrix} T_{11} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, v_2', v_3\right)$

$$v_2' = v_2 - \frac{T_{12}}{T_{11}} \begin{pmatrix} T_{11} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$ する。

$$\det\left(\begin{pmatrix} T_{11} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, v_2', v_3\right) = \det\left(\begin{pmatrix} T_{11} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, v_2, v_3\right) - \frac{T_{12}}{T_{11}} \underbrace{\det\left(\begin{pmatrix} T_{11} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} T_{11} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, v_3\right)}_{=0}$$

$$v_2' = \begin{pmatrix} 0 \\ T_{22} \\ T_{32} \end{pmatrix}$$

$$\det\begin{pmatrix} T_{11} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, v_2, v_3 = \det\begin{pmatrix} T_{11} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, v_2', v_3' \qquad v_3' = \begin{pmatrix} 0 \\ T_{23} \\ T_{33} \end{pmatrix}$$

$$v_3' = v_3 - \frac{T_{13}}{T_{11}}\begin{pmatrix} T_{11} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad , \quad T_{11} \neq 0$$

اگر $T_{11}=0$ ، هر دو دترمینان صفر نیز :

$$\det\left(\begin{pmatrix} T_{11} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, v_2, v_3\right) = \det\begin{pmatrix} T_{11} & 0 & 0 \\ 0 & T_{22} & T_{23} \\ 0 & T_{32} & T_{33} \end{pmatrix}$$

حتی:

$$\det\left(\begin{pmatrix} 0 \\ T_{21} \\ 0 \end{pmatrix}, v_2, v_3\right) = \det\begin{pmatrix} 0 & T_{12} & T_{13} \\ T_{21} & 0 & 0 \\ 0 & T_{32} & T_{33} \end{pmatrix}$$

$$\det\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ T_{31} \end{pmatrix}, v_2, v_3\right) = \det\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ T_{31} \end{pmatrix}, \begin{matrix} T_{12} \\ T_{22} \end{matrix} \; \begin{matrix} T_{13} \\ T_{23} \end{matrix}\right)$$

$$\det\begin{pmatrix} T_{11} & 0 & 0 \\ 0 & T_{22} & T_{23} \\ 0 & T_{32} & T_{33} \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} T_{11} & 0 & 0 \\ 0 & T_{22} & T_{23} \\ 0 & 0 & T_{33} \end{pmatrix} + \det\begin{pmatrix} T_{11} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & T_{23} \\ 0 & T_{32} & T_{33} \end{pmatrix}$$

$$= \det\begin{pmatrix} T_{11} & 0 & 0 \\ 0 & T_{22} & 0 \\ 0 & 0 & T_{33} \end{pmatrix} + \det\begin{pmatrix} T_{11} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & T_{23} \\ 0 & T_{32} & 0 \end{pmatrix} \qquad \boxed{1=\varepsilon(e_1, e_2, e_3)}$$

$$= \varepsilon(T_{11}e_1, T_{22}e_2, T_{33}e_3) + \varepsilon(T_{11}e_1, T_{32}e_3, T_{23}e_2)$$

$$= T_{11}T_{22}T_{33}\,\varepsilon_{123} + T_{11}T_{32}T_{23}\,\varepsilon_{132} \longrightarrow -\varepsilon_{123}$$

$$= T_{11}(T_{22}T_{33} - T_{32}T_{23})$$

$$\det\begin{pmatrix} 0 & T_{12} & T_{13} \\ T_{21} & 0 & 0 \\ 0 & T_{32} & T_{33} \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} 0 & T_{12} & T_{13} \\ T_{21} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & T_{33} \end{pmatrix} + \det\begin{pmatrix} 0 & 0 & T_{13} \\ T_{21} & 0 & 0 \\ 0 & T_{32} & T_{33} \end{pmatrix}$$

$$= \det\begin{pmatrix} 0 & T_{12} & 0 \\ T_{21} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & T_{33} \end{pmatrix} + \det\begin{pmatrix} 0 & 0 & T_{13} \\ T_{21} & 0 & 0 \\ 0 & T_{32} & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \varepsilon(T_{21} e_2, T_{12} e_1, T_{33} e_3) + \varepsilon(T_{21} e_2, T_{32} e_3, T_{13} e_1)$$

$$= -T_{21} T_{12} T_{33} + T_{21} T_{32} T_{13} = -T_{21}(T_{12} T_{33} - T_{32} T_{13})$$

$$\det\begin{pmatrix} 0 & T_{12} & T_{13} \\ 0 & T_{22} & T_{23} \\ T_{31} & 0 & 0 \end{pmatrix} = T_{31}(T_{12} T_{23} - T_{22} T_{13})$$

$$\det(T) = T_{11}(T_{22}T_{33} - T_{23}T_{32})$$
$$- T_{21}(T_{12}T_{33} - T_{32}T_{13})$$
$$+ T_{31}(T_{12}T_{23} - T_{22}T_{13})$$

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| سطر | 123 | 123 | 213 | 231 | 312 | 321 |
| ستون | 123 | 132 | 123 | 123 | 123 | 123 |
| | + | − | − | + | + | − |

چند بار تکرار ← $T_{11}T_{22}T_{33},\ T_{11}T_{33}T_{22},\ T_{22}T_{11}T_{33},\ T_{22}T_{33}T_{11},\ T_{33}T_{11}T_{22},\ T_{33}T_{22}T_{11}$

$$\det(T) = \frac{1}{3!}\sum_{\substack{i_1,i_2,i_3\\ j_1,j_2,j_3}} \pm\, T_{i_1 j_1} T_{i_2 j_2} T_{i_3 j_3}$$

$i_1 \neq i_2 \neq i_3 \neq i_1$

$j_1 \neq j_2 \neq j_3 \neq j_1$

جایگشت نیز

جایگشت زوج بین $(i_1\, i_2\, i_3) \updownarrow (j_1\, j_2\, j_3)$

$$T_{11}\underbrace{\left(T_{22}T_{33}-T_{32}T_{23}\right)}_{=\det} \qquad \begin{bmatrix} T_{11} & 0 & 0 \\ 0 & T_{22} & T_{23} \\ 0 & T_{32} & T_{33} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} T_{22} & T_{23} \\ T_{32} & T_{33} \end{bmatrix} \qquad \det\begin{pmatrix} T_{22} & T_{23} \\ T_{32} & T_{33} \end{pmatrix} =$$

$$\det\begin{pmatrix} T_{22} & T_{23} \\ 0 & T_{33} \end{pmatrix} + \det\begin{pmatrix} 0 & T_{23} \\ T_{32} & T_{33} \end{pmatrix} =$$

$$\det\begin{pmatrix} T_{22} & 0 \\ 0 & T_{33} \end{pmatrix} + \det\begin{pmatrix} 0 & T_{23} \\ T_{32} & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= T_{22}T_{33} - T_{32}T_{23}$$

$$\det(T) = T_{11}\det(D_{11}) - T_{21}\det(D_{21}) + T_{31}\det(D_{31})$$

ماتریس T با حذف سطر ۱ و ستون ۱

T با حذف سطر 2 و ستون ۱

T با حذف سطر ۳ و ستون ۱

بسط $\det(T)$ برحسب ستون اول

بسط بر حسب ستون دوم:

$$\det(T) = \varepsilon(v_1, v_2, v_3) \qquad \tilde{T} = (v_2, v_1, v_3)$$

$$\det(T) = -\det(\tilde{T})$$

$$\det(\tilde{T}) = \tilde{T}_{11} \det(\tilde{\Delta}_{11}) - \tilde{T}_{21} \det(\tilde{\Delta}_{21}) + \tilde{T}_{31} \det(\tilde{\Delta}_{31})$$

$$= T_{12} \det(\Delta_{12}) - T_{22} \det(\Delta_{22}) + T_{32} \det(\Delta_{32})$$

$$\det(T) = -T_{12} \det(\Delta_{12}) + T_{22} \det(\Delta_{22}) - T_{32} \det(\Delta_{32})$$

$$\det(T) = T_{11}\det(\Delta_{11}) - T_{21}\det(\Delta_{21}) + T_{31}\det(\Delta_{31})$$

$$\det(T) = -T_{12}\det(\Delta_{12}) + T_{22}\det(\Delta_{22}) - T_{32}\det(\Delta_{32})$$

$$\det(T) = T_{13}\det(\Delta_{13}) - T_{23}\det(\Delta_{23}) + T_{33}\det(\Delta_{33})$$

اثبات:

$$\tilde{\tilde{T}} = (v_3, v_1, v_2)$$

$$\det(\tilde{\tilde{T}}) = \det(T)$$

بسط برحسب ستون $j$

$$\det(T) = \sum_i (-1)^{i+j} T_{ij} \det(\Delta_{ij})$$

بعد = n

لیه های دیگر هم :

$$\det(T) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} T_{ij} \det(\Delta_{ij})$$

بسط بر حسب ستون j

$\Delta_{ij}$ : ماتریسی که با حذف سطر i و ستون j از T

به دست میآید.

$$(T^*)_{ij} = T_{ji}$$

$T^*$: عوض کردن نقش سطرها و ستون‌های $T$ بدست آمده.

$T: n\times n$

چند بار شمردن جملات

$$\det(T) = \frac{1}{n!} \sum_{\substack{i_1,\dots,i_n \\ j_1,\dots,j_n}} (\pm)\, T_{i_1 j_1} \cdots T_{i_n j_n}$$

$(i_1,\dots,i_n) \longleftrightarrow (j_1,\dots,j_n)$

جایگشت زوج $(+)$

جایگشت فرد $(-)$

$$\det(T_*) = \frac{1}{n!} \sum_{\substack{i_1,\dots,i_n \\ j_1,\dots,j_n}} (\pm)\, T^*_{i_1 j_1} \cdots T^*_{i_n j_n}$$

$$\det(T^*) = \frac{1}{n!} \sum_{\substack{i_1 \cdots i_n \\ j_1 \cdots j_n}} (\pm)\, T_{j_1 i_1} \cdots T_{j_n i_n}$$

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} A_{ij} = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} A_{ji} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} A_{ji}$$

$$\det(T^*) = \frac{1}{n!} \sum_{\substack{i_1 \cdots i_n \\ j_1 \cdots j_n}} (\pm)\, T_{i_1 j_1} \cdots T_{i_n j_n} = \det(T)$$

$$\det(T^*) = \det(T)$$

اگر نقش سطر و ستون‌های یک ماتریس عوض گردد دترمینان ماتریس عوض نمی‌شود.

مضربی از یک ستون به ستون دیگر اضافه شود :

دترمینان تغییر نمی‌کند

یک ستون صفر باشد ، دترمینان صفر است

دو ستون متناسب باشند ، دترمینان صفر است.

ستون‌ها خطی وابسته باشند $\Leftrightarrow$ دترمینان صفر است.

جای دو ستون عوض شود ، دترمینان در منفی ضرب می‌شود.

نقش سطرها و ستون‌ها عوض شود ، دترمینان تغییر نمی‌کند

پس در همه‌ی گزاره‌های قبلی ، می‌شود به جای ستون سطر گذاشت.

بسط دترمینان برحسب سطر $i$:

$$\det(T) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j}\, T_{ij} \det(\Delta_{ij})$$

---

مثال:

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

بسط برحسب سطر دوم

$$\det(T) = (-1)^{2+2} \times 1 \times \underbrace{\det\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}}_{-5} + (-1)^{2+3} \times 4 \det\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= -5 + 16 = 11$$

بسط برحسب ستون دوم

$$\det(T) = (-1)^{1+2} \times 2 \times \det\begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} + (-1)^{2+2} \times 1 \times \det\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= 16 - 5 = 11 \checkmark$$

بسط بحسب السطر الاول

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\det(T) = (-1)^{1+1} \times 1 \times \det\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + (-1)^{1+2} \times 2 \times \det\begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$+ (-1)^{1+3} \times 3 \times \det\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = 1 + 16 - 6 = 11 \checkmark$$