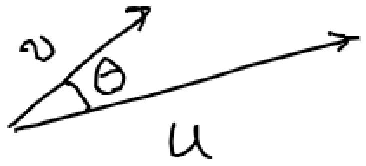
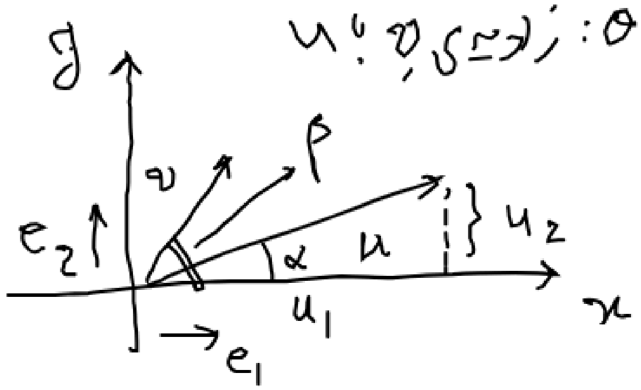
ضرب درونی، طول:



$$\vec{u}\cdot\vec{v} = |\vec{u}|\,|\vec{v}|\,\cos\theta$$

یک تعریف برای ضرب درونی.

در فضای n بعدی حقیقی (اسکالرها حقیقی)



θ: زاویه‌ی u و v

α: زاویه‌ی u و x

β: زاویه‌ی v و x

$$\theta = \beta - \alpha$$

$$|u|\,|v| \cos\theta = |u|\,|v| \cos(\beta - \alpha)$$

$$= |u|\,|v| \left(\cos\alpha \cos\beta + \sin\alpha \sin\beta\right)$$

$$= (|u| \cos\alpha)(|v| \cos\beta) + (|u| \sin\alpha)(|v| \sin\beta)$$

$$u = u_1 e_1 + u_2 e_2 \qquad u_1 = |u| \cos\alpha \qquad v_1 = |v| \cos\beta$$

$$v = v_1 e_1 + v_2 e_2 \qquad u_2 = |u| \sin\alpha \qquad v_2 = |v| \sin\beta$$

$$u \cdot v = u_1 v_1 + u_2 v_2$$

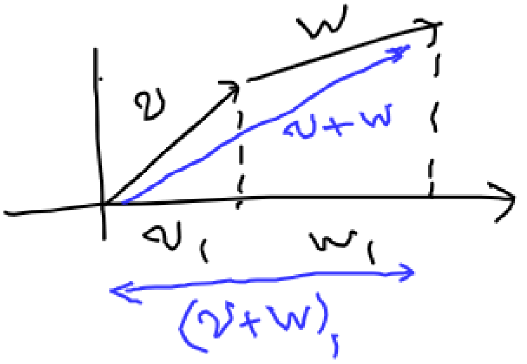
با این شکل دیده میشود

$(u.v)$ نسبت به v

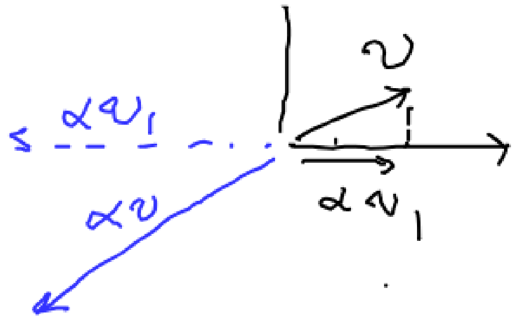
خطی است

α ها.

$$\left.\begin{aligned} u\cdot(v+w) &= u\cdot v + u\cdot w \\ u\cdot(\alpha v) &= \alpha(u\cdot v) \end{aligned}\right\}$$



$$(v+w)_1 = v_1 + w_1$$



$$(\alpha v)_1 = \alpha v_1$$

α عدد است.

و نیز:

$$(u+w)\cdot v = u\cdot v + w\cdot v$$

$$(\alpha u)\cdot v = \alpha\,(u\cdot v)$$

یعنی $(u\cdot v)$ نسبت به u خطی است.

یک ویژگی دیگر:

$$\forall v: \quad u\cdot v = 0$$

$$u_1 v_1 + u_2 v_2 = 0$$

$\forall v$

از جمله: $v_1 = 1,\ v_2 = 0 \Rightarrow u_1 = 0$

$v_2 = 1,\ v_1 = 0 \Rightarrow u_2 = 0$

$$\left.\begin{matrix} u_1 = 0 \\ u_2 = 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow u = 0$$

$(\forall v: \ u \cdot v = 0) \implies u = 0$

$(\forall u: \ u \cdot v = 0) \implies v = 0$

نتیجه:

ضرب درونی ناتکین است.

فضاهای حقیقی: حاصل ضرب درونی عدد: $(u \cdot v) \in \mathbb{R}$

$(\forall v: u \cdot v = 0) \Rightarrow v = 0$

$(\forall u: u \cdot v = 0) \Rightarrow u = 0$

ضرب درونی ناتکین است.

$v \cdot u = u \cdot v$ ضرب درونی متقارن است.

$u \neq 0 \quad u \cdot u > 0$ $\qquad u \cdot u = (u_1)^2 + (u_2)^2$

$u \cdot u \geq 0$

$\|u\| := \sqrt{u \cdot u}$

$\|u\|$ طول بردار u

برای سادگی، $\|u\|$ را با $|u|$ هم نشان می‌دهند.

مثل تمایز بین + (برای جمع بردارها) و + (برای جمع عددها) که برای سادگی برداشته شد.

عدد $\uparrow$ ، بردار $\nearrow$ — نماد بردار دیگر

$$\|\alpha u\| = |\vec{\alpha u}|$$

$$= \sqrt{(\alpha u)\cdot(\alpha u)} = \sqrt{\alpha^2\, u\cdot u} = |\alpha|\sqrt{u\cdot u}$$

$$\|\alpha u\| = |\alpha|\ \|u\|$$

$$|\alpha u| = |\alpha|\ |u|$$ با نماد دیگر:

برای فضای مختلط: (عددها مختلط هستند = $\mathbb{C}$ است)

$\mathbb{C}$: مجموعه‌ی عددهای مختلط.

گیریم همان ویژگیهای ضرب در فضای حقیقی برقرار باشند، از جمله خطی بودن نسبت به دو بردار:

$u \neq 0$

$u \cdot u$

$u \cdot u > 0$ $\qquad$ $i^2 = -1$

باید حقیقی و مثبت باشد.

$$(iu) \cdot (iu) = ii\,(u \cdot u) = -(u \cdot u)$$

$$(iu) \cdot (iu) < 0$$

اگر خطی بودن ضرب درونی نسبت به هر دو بردار حفظ شود، مثبت بودن حاصل ضرب درونی یک بردار (ناصفر) در خودش حفظ نمی‌شود.

برای حل این مشکل، یک تغییر در ویژگی‌های ضرب درونی وارد می‌کنیم:

$$u \cdot (\alpha v + \beta w) = \alpha (u \cdot v) + \beta (u \cdot w)$$

α و β عدد:

ضرب درونی $(u \cdot v)$ نسبت به v خطی است.

تغییر:

$$(\alpha u + \beta w) \cdot v = \bar{\alpha} (u \cdot v) + \bar{\beta} (w \cdot v)$$

$\bar{\alpha}$ مزدوج مختلط α و $\bar{\beta}$ مزدوج مختلط β

$$\alpha = Re(\alpha) + i \, Im(\alpha)$$

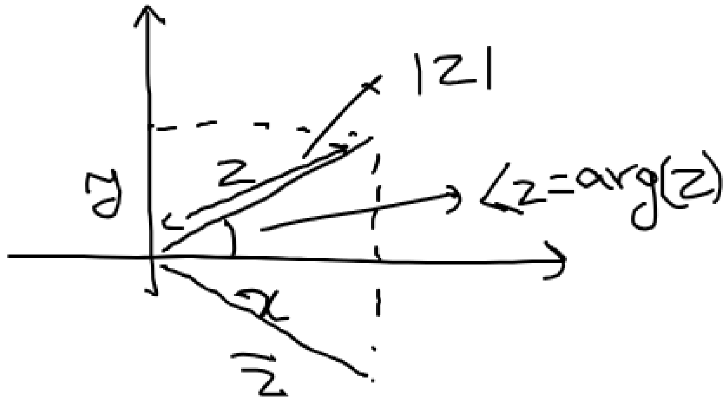
$$\bar{\alpha} = Re(\alpha) - i \, Im(\alpha)$$

$Z = x + iy$

$\bar{Z} = x - iy$

↓

مزدوج z $= \bar{Z}$



x, y حقیقی

$x = Re(z)$ بخش حقیقی z

$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$

$y = Im(z)$ بخش موهومی z

قدر مطلق z

$\angle z = \arg(z)$ زاویه z

$x = |z| \cos(\angle z)$

$y = |z| \sin(\angle z)$

(x, y) مختصات دکارتی z

$(|z|, \angle z)$ مختصات قطبی z

$$zz = (x+iy)(x+iy) = x^2 - y^2 + 2ixy$$

$$i^2 = -1$$

$z^2 = zz$ لزوما حقیقی نیست.

$$z\bar{z} = (x+iy)(x-iy) = x^2 - (iy)^2 = x^2 + y^2$$

$z\bar{z} > 0 \Leftarrow z \neq 0$ $\qquad$ $z\bar{z} = |z|^2$

تغییر در تعریف ضرب درونی:

$$(\alpha u+\beta w)\cdot v=\bar{\alpha}\,(u\cdot v)+\bar{\beta}\,(w\cdot v)$$

$u\cdot v$ نسبت به u پادخطی است:

$$(u+w)\cdot v = u\cdot v + w\cdot v$$

$$(\alpha u)\cdot v=\bar{\alpha}\,u\cdot v$$

ضرب درونی نسبت به دومی خطی است.

$$(\alpha u)\cdot(\alpha u)=\alpha\left[(\alpha u)\cdot u\right]$$

ضرب درونی نسبت به اولی پادخطی است.

$$=\alpha\left[\bar{\alpha}\cdot(u\cdot u)\right]=\alpha\bar{\alpha}\,(u\cdot u)$$

$$(\alpha u)\cdot(\alpha u) = \alpha\bar{\alpha}\,(u\cdot u) = |\alpha|^2\,(u\cdot u)$$

اگر $u\cdot u > 0 \longrightarrow$ حقیقی

$$\Rightarrow (\alpha u)\cdot(\alpha u) > 0 \qquad (\alpha \neq 0) \longrightarrow |\alpha|^2 > 0$$

تعریف کلی برای ضرب درونی (فضای مختلط)

ضرب درونی = ضرب داخلی

$u \cdot v \in \mathbb{C}$ (حقیقی: $u \cdot v \in \mathbb{R}$)

$u \cdot (\alpha v + \beta w) = \alpha (u \cdot v) + \beta (u \cdot w)$ (برای حقیقی هم همینطور)

ضرب درونی نسبت به دومی خطی است

$v \cdot u = \overline{u \cdot v}$ (برای حقیقی: $v \cdot u = u \cdot v$)

(اگر جای دو بردار عوض شود، حاصل ضرب درونی مزدوج مختلط میشود)

[illegible]:

$$\langle \alpha u+\beta w\rangle\cdot v$$

$$= \overline{[v\cdot\langle \alpha u+\beta w\rangle]} = \overline{[\alpha\langle v\cdot u\rangle+\beta\langle v\cdot w\rangle]}$$

$$= \bar{\alpha}\,\overline{\langle v,u\rangle} + \bar{\beta}\,\overline{\langle v,w\rangle} = \bar{\alpha}\langle u\cdot v\rangle+\bar{\beta}\langle w,v\rangle$$

$$\langle \alpha u+\beta w\rangle\cdot v = \bar{\alpha}\langle u\cdot v\rangle+\bar{\beta}\langle w,v\rangle$$

ضرب داخلی نسبت به اولی نیم‌خطی است.

$$u\neq 0 \Rightarrow u\cdot u>0$$

ضرب درونی در یک فضای مختلط:

$$\langle u \cdot v \rangle \in \mathbb{C}$$

$$u \cdot (\alpha v + \beta w) = \alpha (u \cdot v) + \beta (u \cdot w)$$

$$v \cdot u = \overline{u \cdot v}$$

$$u \neq 0 \Rightarrow (u \cdot u) > 0$$

هر چیزی با همه‌ی این ویژگیها: یک ضرب درونی در یک فضای (برداری) مختلط است.

یک ضرب درونی با چه مشخص میشود؟

تبدیل خطی با ماتریس اش مشخص میشود (بر حسب پایه)

$e_1, \dots, e_n$ یک پایه . $e_1, \dots, e_n$ بردار $u_1, \dots, u_n$ ، $v_1, \dots, v_n$ ده

$$u \cdot v = \Big(\sum_i u_i e_i\Big) \cdot \Big(\sum_j v_j e_j\Big)$$

خطی بودن نسبت به 2

$$= \sum_j v_j \Big[\Big(\sum_i u_i e_i\Big) \cdot e_j\Big] \quad \text{بخاطر خطی نسبت به اولی}$$

$$\sum_j v_j \Big[\sum_i \overline{u}_i \, (e_i \cdot e_j)\Big]$$

$$u \cdot v = \sum_{i,j} \bar{u}_i v_j (e_i \cdot e_j)$$

برای معلوم بودن $u \cdot v$، کافی است حاصل ضرب درونی بردارهای پایه در هم معلوم باشد.

$$e_i \cdot e_j =: g_{ij}$$

g_{ij}ها: مؤلفه‌های ماتریس متریک

$$g_{ij} =: g(e_i, e_j) \qquad u \cdot v =: g(u, v)$$

نمادهای هم‌ارز.

برای معلوم بودن ضرب درونی باید n^2 عدد (مختلط در فضای مختلط، حقیقی در فضای حقیقی) معلوم باشند، که n بعد فضاست.

بین این عددها روابطی هست:

$$g_{ji} = g(e_j , e_i) = e_j \cdot e_i = \overline{e_i \cdot e_j}$$
$$= \overline{g(e_i , e_j)} = \overline{g_{ij}}$$

$$g_{ji} = \overline{g_{ij}}$$

$g_{ii} = \overline{g_{ii}} \Rightarrow$ g_{ii} حقیقی است.

بعلاوه از این:

$$g_{ii} = e_i \cdot e_i > 0$$

$g_{ii} > 0$ اعضای قطری g مثبت اند.

اینکه g_{ii} ها مثبت باشند لازم است، اما کافی نیست
که g با یک ضرب درونی متناظر باشد، $g(u,u)$ باید برای همه u ها مثبت باشد.

گیریم $n=2$: $g_{11}, g_{12}, g_{21}, g_{22}$

مثال: $g_{11}=1 \quad g_{12}=1 \quad g_{21}=2 \quad g_{22}=1$

این g، ضرب درونی متناظر نیست:

$e_2\cdot e_1 \neq \overline{e_1\cdot e_2}$ چون $g_{21} \neq \overline{g_{12}}$

مثال: $g_{11}=1 \quad g_{12}=i \quad g_{21}=-i \quad g_{22}=0$

ضرب درونی نیست: $e_2\cdot e_2=0 \quad g_{22}=0$

$e_2\cdot e_2$ باید مثبت باشد

مثال:

$$g_{11}=2 \quad g_{12}=3 \quad g_{21}=3 \quad g_{22}=1$$

$$g_{ii}>0 \ \checkmark \qquad g_{ji}=\overline{g_{ij}} \ \checkmark$$

$$u\cdot u=\sum_{i,j} g_{ij}\,\overline{u}_i\,u_j = 2\,\overline{u}_1 u_1 + 3\,\overline{u}_1 u_2 + 3\,\overline{u}_2 u_1 + \overline{u}_2 u_2$$

$$u\cdot u \overset{?}{>} 0 \qquad u\neq 0$$

بررسی این شرط.

ضرب دو عدد مختلط :

$$z = x + iy \qquad x = Re(z) = |z| \cos \angle z$$

$$y = Im(z) = |z| \sin \angle z$$

عدد مختلط

عدد حقیقی

$$w = u + iv \qquad u = |w| \cos \angle w$$

$$v = |w| \sin \angle w$$

$$zw = xu - yv + i(xv + yu)$$

$$= |z|\,|w| \Big\{ (\cos\angle z)(\cos\angle w) - (\sin\angle z)(\sin\angle w)$$

$$+ i \left[(\cos\angle z)(\sin\angle w) + (\sin\angle z)(\cos\angle w) \right] \Big\}$$

$$zw = |z|\,|w|\left[\cos(\angle z + \angle w) + i\sin(\angle z + \angle w)\right]$$

$$z = |z|(\cos\angle z + i\sin\angle z)$$

$$|zw| = |z|\,|w| \qquad \angle(zw) = \angle z + \angle w$$

$$\bar{z} = |z|(\cos\angle z - i\sin\angle z) \qquad |\bar{z}| = |z|$$

$$\angle\bar{z} = -\angle z$$

u נתון: u_1, u_2 יש, (כלשהם)

$$u\cdot u = 2\,\bar{u}_1 u_1 + 3(\bar{u}_1 u_2 + \bar{u}_2 u_1) + \bar{u}_2 u_2$$

$$\bar{u}_1 u_1 = |u_1|^2$$

$$\bar{u}_1 u_2 = |\bar{u}_1 u_2|\left[\cos\angle(\bar{u}_1 u_2) + i\sin\angle(\bar{u}_1 u_2)\right]$$

$$= |u_1||u_2|\left[\cos(\angle u_2 - \angle u_1) + i\sin(\angle u_2 - \angle u_1)\right]$$

$$\bar{u}_2 u_1 = |u_1||u_2|\left[\cos(\angle u_1 - \angle u_2) + i\sin(\angle u_1 - \angle u_2)\right]$$

$$\bar{u}_2 u_2 = |u_2|^2 \qquad \alpha = \angle u_1 - \angle u_2$$

$$u\cdot u = 2|u_1|^2 + 6|u_1||u_2|\cos\alpha + |u_2|^2$$

$$u\cdot u = 2|u_1|^2 + 6(|u_2|\cos\alpha)|u_1| + |u_2|^2$$

یک چندجمله‌ای درجه 2 برحسب $|u_1|$

$$x = |u_1|\ \mathrm{sgn}(\cos\alpha) \qquad \mathrm{sgn}(s) = \begin{cases} 1, & s>0 \\ -1, & s<0 \end{cases}$$

sgn ← علامت

$$s = |s|\ \mathrm{sgn}(s)$$

$$u\cdot u = 2x^2 + 6|u_2||\cos\alpha|\,x + |u_2|^2$$

x حقیقی، مثبت یا منفی.

$$f(x) = 2x^2 + 6|u_2||\cos\alpha|\, x + |u_2|^2$$

شرط این که به ازای همه‌ی x ها $f(x)$ نامنفی باشد:

ضریب x^2 نامنفی (که هست) و مبین نامثبت.

$$(6|u_2||\cos\alpha|)^2 - 8|u_2|^2 \le 0$$

$$\underbrace{|u_2|^2}_{\ge 0}(36\cos^2\alpha - 8) \le 0$$

$$9\cos^2\alpha - 2 \le 0 \leftarrow : \forall\alpha$$

برقرار نمی‌شود.

این شرط برآورده نمیشود. مثلا $C\alpha = 1$

$9 - 2 > 0$ ×

با چه تغییری شرط برآورده میشه؟

2 6 1

$36\,C^2\alpha - 8 < 0$ ← قرار بود که نشه.

$(2g_{12})(2g_{21}) - 4g_{11}g_{22} < 0$ شرط این بود:

شرط (برای دو بعدی)

$$g_{21} = \overline{g_{12}}$$

$$g_{12}\, g_{21} - g_{11}\, g_{22} < 0$$

$$g_{11}\, g_{22} - |g_{12}|^2 > 0$$

یک انتخاب:
لطفاً امتحان کنید.

$$g_{11} = 2 \quad g_{22} = 1$$

$$g_{12} = g_{21} = 1$$

یک انتخاب دیگر
لطفاً امتحان کنید.

$$g_{11} = g_{22} = 1 \quad g_{12} = g_{21} = 0$$