ضرب درونی - فضاهای مختلط

(برای فضاهای حقیقی: عددها حقیقی بودند)

مزدوج مختلط هر عدد هم خودش را نمی‌دهد! $\bar{z} = z$

$$e_j \cdot e_k = g_{jk} = g(e_j, e_k)$$

برای $\vec{u} \neq 0$

$$g_{kj} = \overline{g_{jk}} \qquad g_{jj} > 0 \qquad \sum_{j,k} g_{jk}\,\bar{u}_j\, u_k > 0$$

مختلط

یک مثال برای $g$ (متریک):

$$g_{jk} = \delta_{jk} = \begin{cases} 1, & j = k \\ 0, & j \neq k \end{cases}$$

چون $g_{jk}$ ها حقیقی‌اند

$$g_{kj} = \delta_{kj} = \delta_{jk} = \overline{g_{jk}} = g_{jk}$$

---

$$\boxed{g_{jj} = 1 > 0}$$

$$\sum_{j,k} g_{jk} \bar{u}_j u_k = \sum_j g_{jj} \bar{u}_j u_j$$

$$= \sum_j \bar{u}_j u_j = \sum_j |u_j|^2 \begin{cases} > 0, & u \neq 0 \\ = 0, & u = 0 \end{cases}$$

اگر $g_{jk}=\delta_{jk}$ ، $g$ متریک است (با آن ضرب درونی تعریف می‌شود).

تعامد: $u$ و $v$ برهم عمودند: $u \cdot v = 0$

$$\Updownarrow$$

$v \cdot u = 0$ چون $v \cdot u = \overline{u \cdot v}$

$u$ بر $v$ عمود است $\equiv$ $v$ بر $u$ عمود است $\equiv$ $u$ و $v$ برهم عمودند

نُرم بردار

طول بردار $u$: $\|u\| = \sqrt{u \cdot u} = |u|$

بردار $u$ یکه است: $|u| = 1 \Longleftrightarrow u \cdot u = 1$

اگر $g_{jk}=\delta_{jk}$

$e_j$ و $e_k$ بر هم عمودند $\qquad e_j\cdot e_k=0\,,\quad j\neq k$

(اگر $j\neq k$) $\Longleftrightarrow$ پایه‌ی $e$ متعامد است.

---

$e_j$ یکه است $\qquad |e_j|=1 \Longleftrightarrow e_j\cdot e_j=1$

پایه‌ی $e$ یکه است (طول همه‌ی بردارهای پایه یک است)

پایه‌ی $e$ متعامد و یکه است: پایه‌ی $e$ یکه‌-متعامد است.

یکه ⟷ بهنجار

متعامد ⟷ راست

راست - هنجار ⟷ یکه - متعامد

---

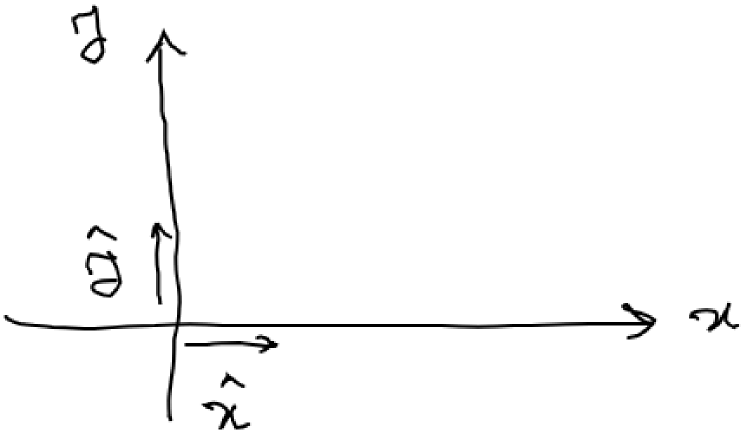
یک ضرب درونی هست که برای آن پایه‌ی یکه - متعامد است:

$$g_{jk}=\delta_{jk}$$

---

اما همه‌ی ضرب درونی‌ها چنین نیستند.

مثال:




یک ضرب درونی:

$$\hat{x}\cdot\hat{x} = 1 = \hat{y}\cdot\hat{y}$$

$$\hat{x}\cdot\hat{y} = 0$$

با این ضرب درونی، پایه‌ی $(\hat{x}, \hat{y})$ یک پایه‌ی متعامد است.

یک پایه‌ی جدید

$$e_1 = \hat{x} - \hat{y} \qquad e_2 = \frac{\hat{x} + i\,\hat{y}}{\sqrt{2}}$$

$(e_1, e_2)$ پایه است؟

تعداد (2) درست است (برابر با بعد فضا است).

باید نشان داده شود $(e_1, e_2)$ خطی مستقل‌اند:

$$\alpha e_1 + \beta e_2 = 0 \overset{?}{\Longrightarrow} \alpha = \beta = 0$$

$$0 = \alpha(\hat{x} - \hat{y}) + \beta\left(\frac{\hat{x} + i\hat{y}}{\sqrt{2}}\right) = \left(\alpha + \frac{\beta}{\sqrt{2}}\right)\hat{x} + \left(-\alpha + \frac{i\beta}{\sqrt{2}}\right)\hat{y}$$

$$\alpha + \frac{\beta}{\sqrt{2}} = 0 \qquad -\alpha + \frac{i\beta}{\sqrt{2}} = 0 \xrightarrow{+} \beta \underbrace{\frac{(1+i)}{\sqrt{2}}}_{\neq 0} = 0 \Rightarrow \beta = 0$$

$$\alpha = 0$$

$$\alpha e_1 + \beta e_2 = 0 \Longrightarrow \alpha = \beta = 0$$

پس $(e_1, e_2)$ خطی مستقل است.

تعداد هم بعد فضاست.

پس $(e_1, e_2)$ یک پایه است.

$g_{jk}$ ها در این پایه:

$$g_{11} = g(e_1, e_1) = e_1 \cdot e_1$$

$$g_{12} = e_1 \cdot e_2 \qquad g_{21} = e_2 \cdot e_1$$

$$g_{22} = e_2 \cdot e_2$$

$$e_1 \cdot e_1 = (\hat{x} - \hat{y}) \cdot (\hat{x} - \hat{y}) = \hat{x} \cdot \hat{x} - \hat{y} \cdot \hat{x} - \hat{x} \cdot \hat{y} + \hat{y} \cdot \hat{y}$$

$$= 1 - 0 - 0 - 1 = 2$$

$$e_1 \cdot e_2 = (\hat{x} - \hat{y}) \cdot \left( \frac{\hat{x}}{\sqrt{2}} + \frac{i\hat{y}}{\sqrt{2}} \right) \qquad \hat{y} \cdot \hat{x} = \hat{x} \cdot \hat{y} = 0$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \hat{x} \cdot \hat{x} + \overline{\frac{i}{\sqrt{2}}} \, \overline{(-1)} \, \hat{y} \cdot \hat{y} = \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{i}{\sqrt{2}} = \frac{1-i}{\sqrt{2}}$$

$$e_2 \cdot e_1 = \left( \frac{\hat{x}}{\sqrt{2}} + \frac{i\hat{y}}{\sqrt{2}} \right) \cdot (\hat{x} - \hat{y}) = \overline{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)} \hat{x} \cdot \hat{x}$$

$$+ \overline{\left(\frac{i}{\sqrt{2}}\right)} (-1) \hat{y} \cdot \hat{y}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{i}{\sqrt{2}} = \frac{1+i}{\sqrt{2}}$$

$$e_2 \cdot e_2 = \left( \frac{\hat{x}}{\sqrt{2}} + \frac{i\hat{y}}{\sqrt{2}} \right) \cdot \left( \frac{\hat{x}}{\sqrt{2}} + \frac{i\hat{y}}{\sqrt{2}} \right)$$

$$e_2 \cdot e_2 = \left(\frac{\hat{x}}{\sqrt{2}} + \frac{i\hat{y}}{\sqrt{2}}\right) \cdot \left(\frac{\hat{x}}{\sqrt{2}} + \frac{i\hat{y}}{\sqrt{2}}\right) = \overline{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)} \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \hat{x} \cdot \hat{x}$$

$$+ \overline{\left(\frac{i}{\sqrt{2}}\right)} \frac{i}{\sqrt{2}} \hat{y} \cdot \hat{y} = \frac{1}{2} + \frac{-i}{\sqrt{2}} \frac{i}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$$

اگر ضرایب بدون مزدوج مختلط کردن (برای ۰) از
اول) بدست آوردن سه‌نقطه.

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{i}{\sqrt{2}} \frac{i}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0$$

مهم است که $u \cdot v$ نسبت به $u$ پادخطی و نسبت به $v$ خطی است.

پرانتز: اینکه $u \cdot v$ نسبت به $u$ پادخطی و نسبت به $v$ خطی است یک حالت است.

یک گونه‌ی دیگر تعریف این است که $u \cdot v$ نسبت به $u$ خطی و نسبت به $v$ پادخطی است.

---

این تعریفها برتری بر هم ندارند. مهم است که رفتار سازگار باشد (فقط از یک تعریف استفاده شود).

رسم غالب: ریاضی‌ها بیشتر تعریف دوم را به کار می‌برند:

u.v نسبت به u خطی و نسبت به v پادخطی است.

فیزیکی‌ها بیشتر تعریف اول را به کار می‌برند:

u.v نسبت به u پادخطی و نسبت به v خطی است.

---

اینجا فقط تعریف اول به کار می‌رود.

پایه در هرانتز

$$g_{11}=2 \qquad g_{12}=\frac{1-i}{\sqrt{2}} \qquad g_{21}=\frac{1+i}{\sqrt{2}} \qquad g_{22}=1$$

$$u=u_1e_1+u_2e_2 \qquad v=v_1e_1+v_2e_2$$

$$u\cdot v=g_{11}\bar{u}_1v_1+g_{12}\bar{u}_1v_2+g_{21}\bar{u}_2v_1+g_{22}\bar{u}_2v_2$$

$$=2\bar{u}_1v_1+\frac{1-i}{\sqrt{2}}\bar{u}_1v_2+\frac{1+i}{\sqrt{2}}\bar{u}_2v_1+\bar{u}_2v_2$$

ازجمله: $u\cdot u=2\bar{u}_1u_1+\frac{1-i}{\sqrt{2}}\bar{u}_1u_2+\frac{1+i}{\sqrt{2}}\bar{u}_2u_1+\bar{u}_2u_2$

آیا $u.u$ حقیقی است، و اگر $u\neq 0$ مثبت است؟

$$z = x + iy \qquad \text{حقيقي} \qquad \bar{z} = x - iy$$

$$= \mathrm{Re}(z) + i\,\mathrm{Im}(z) = |z|\left[\cos(\angle z) + i \sin(\angle z)\right]$$

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2} \qquad \cos(\angle z) = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{\mathrm{Re}(z)}{|z|}$$

$$= \sqrt{\bar{z} z}$$

$$\sin(\angle z) = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{\mathrm{Im}(z)}{|z|}$$

$$\tan(\angle z) = \frac{y}{x} = \frac{\mathrm{Im}(z)}{\mathrm{Re}(z)}$$

$$\cos\theta + i \sin\theta = \exp(i\theta) = e^{i\theta}$$

$$f(\theta) := \cos\theta + i\sin\theta$$

نشان میدهیم $f$ ویژگی نمایی را دارد

$$[f(\theta)][f(\varphi)] = (\cos\theta + i\sin\theta)(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$

$$= [(\cos\theta)(\cos\varphi) - (\sin\theta)(\sin\varphi)]$$

$$+ i[(\cos\theta)(\sin\varphi) + (\sin\theta)(\cos\varphi)]$$

ثابت

$$= \cos(\theta+\varphi) + i\sin(\theta+\varphi) = f(\theta+\varphi)$$

$$[f(\theta)][f(\varphi)] = f(\theta+\varphi) \iff f(\theta) = \exp(a\theta)$$

$$f(\theta) := \cos\theta + i\sin\theta = \exp(a\theta)$$

$a = ?$

$$f'(\theta) = a\exp(a\theta) = a f(\theta)$$

$$= -\sin\theta + i\cos\theta = i(\cos\theta + i\sin\theta)$$

$$= i f(\theta)$$

$\Rightarrow\ a = i$

$$\cos\theta + i\sin\theta = \exp(i\theta)$$

گسترش تعریف تابع نمایی به متغیرهای مختلط:

حقیقی

$$\exp(z) = \exp(x+iy) = [\exp(x)][\exp(iy)]$$

$$= [\exp(x)](\cos y + i \sin y)$$

$x$ حقیقی است، پس $\exp(x)$ مثبت است.

$$|\exp(iy)| = \sqrt{(\cos y)^2 + (\sin y)^2} = 1$$

پس:

$$|\exp(z)| = \exp(x) = \exp(\operatorname{Re}(z))$$

$$\cos\{\angle[\exp(z)]\} = \frac{\mathrm{Re}[\exp(z)]}{|\exp(z)|} = \cos y$$

$$\sin\{\angle[\exp(z)]\} = \frac{\mathrm{Im}[\exp(z)]}{|\exp(z)|} = \sin y$$

$$\Rightarrow \quad \angle[\exp(z)] = y = \mathrm{Im}(z)$$

$$|[\exp(z)] = x = \mathrm{Re}(z)$$

$$z = |z| \exp(i \angle z) = |z| [\cos(\angle z) + i \sin(\angle z)]$$

$$w = |w| \exp(i \angle w)$$

$$zw = |z||w| [\exp(i \angle z)][\exp(i \angle w)]$$

$$= |z||w| \exp[i(\angle z + \angle w)]$$

$$= |zw| \exp[i \angle (zw)]$$

$$|zw| = |z||w| \qquad \angle(zw) = \angle z + \angle w$$

$$1/[\exp(s)] = \exp(-s)$$

$$\frac{z}{w} = \frac{|z| \exp(i\angle z)}{|w| \exp(i\angle w)} = \frac{|z|}{|w|}[\exp(i\angle z)][\exp(-i\angle w)]$$

$$= \frac{|z|}{|w|} \exp[i(\angle z - \angle w)] = \left|\frac{z}{w}\right| \exp\left[i\angle\left(\frac{z}{w}\right)\right]$$

$$\left|\frac{z}{w}\right| = \frac{|z|}{|w|} \qquad \angle\left(\frac{z}{w}\right) = \angle z - \angle w$$

---

$$z = |z| \exp(i\angle z) = |z|[\cos(\angle z) + i\sin(\angle z)]$$

$$\bar{z} = |z|[\cos(\angle z) - i\sin(\angle z)] = |z| \exp(-i\angle z)$$

$|\bar{z}| = |z| \qquad \angle \bar{z} = -\angle z$

---

$u \cdot u = 2\,|u_1|^2 + \frac{1-i}{\sqrt{2}}\bar{u}_1 u_2 + \frac{1+i}{\sqrt{2}}\bar{u}_2 u_1 + |u_2|^2$

$u_1 = |u_1| e^{i\varphi_1}, \quad u_2 = |u_2|\, e^{i\varphi_2}$

$\bar{u}_1 u_2 = |u_1| e^{-i\varphi_1} |u_2| e^{i\varphi_2} \qquad \exp(s) = e^s$

$= |u_1||u_2|\, e^{i(\varphi_2 - \varphi_1)} \qquad \varphi := \varphi_2 - \varphi_1$

$\bar{u}_2 u_1 = |u_2||u_1|\, e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)}$

$$u \cdot u = 2|u_1|^2 + |u_1||u_2| \left( \frac{1-i}{\sqrt{2}} e^{i\varphi} + \frac{1+i}{\sqrt{2}} e^{-i\varphi} \right) + |u_2|^2$$

$$\frac{1-i}{\sqrt{2}} = \cos\frac{\pi}{4} - i\sin\frac{\pi}{4} = e^{-i\frac{\pi}{4}}$$

$$\frac{1+i}{\sqrt{2}} = \cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4} = e^{i\frac{\pi}{4}}$$

$$\frac{1-i}{\sqrt{2}} e^{i\varphi} = e^{i\left(\varphi - \frac{\pi}{4}\right)} \qquad \frac{1+i}{\sqrt{2}} e^{-i\varphi} = e^{i\left(\frac{\pi}{4} - \varphi\right)}$$

$$\theta := \varphi - \frac{\pi}{4}$$

$$u \cdot u = 2|u_1|^2 + |u_1||u_2| \left( \overbrace{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}^{2\cos\theta} \right) + |u_2|^2$$

$$u \cdot u = 2|u_1|^2 + 2|u_1||u_2|\cos\theta + |u_2|^2$$

$u.u$ حقیقی است . مثبت است ($u \neq 0$ اگر)

$$h(x) = 2x^2 + 2(|u_2|\cos\theta)x + |u_2|^2$$

$|u_1| \to x$ ضریب $x^2$ مثبت است .

$$\Delta = (2|u_2|\cos\theta)^2 - 8|u_2|^2 \qquad \cos^2\theta \leq 1$$

$$= 4|u_2|^2 \underbrace{(\cos^2\theta - 2)}_{<0}$$

اگر $u_2 \neq 0$

$\Delta < 0 \Rightarrow f(x) > 0$

اگر $u_2=0$ ،

$$u\cdot u = 2|u_1|^2$$

$$u_1\neq 0 \Rightarrow u\cdot u>0$$

---

پس اگر $u_2\neq 0$ یا $u_1\neq 0$ ، $u\cdot u>0$

اگر ($u_1=u_2=0$ ، آنگاه $u=0$)

---

اگر $u\neq 0$ : $u\cdot u>0$

این نتیجه معلوم [illegible] $(\hat{u},\hat{v})$ ، $g_{jk}=\delta_{jk}$

$e_1\cdot e_1=2 \qquad e_1\cdot e_2=\frac{1-i}{\sqrt{2}} \qquad e_2\cdot e_1=\frac{1+i}{\sqrt{2}}$

$e_2\cdot e_2=1$

$(e_1, e_2)$ یکه متعامد نیست.

$e_2$ یکه است، $e_1$ یکه نیست. $e_1$ و $e_2$ بر هم عمود نیستند

---

یک ضرب درونی با متریک $g$ تعریف شده.

آیا یک پایه هست که یکه - متعامد باشد؟

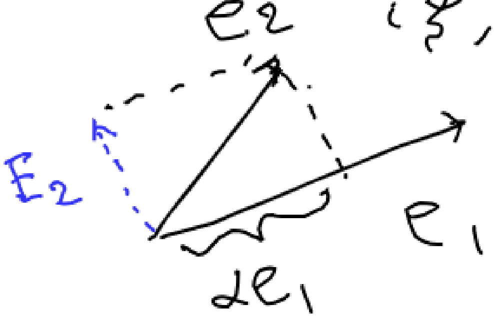
برای مثال قبلی، بله: $(\hat{x}, \hat{y})$ یکه متعامد است.

اما سئوال کلی است: آیا همواره چنین پایه‌ای هست؟

جواب مثبت است.

اثبات با ساختن پایه‌ی یکه متعامد.

به این شکل که اول یک پایه‌ی متعامد ساخته می‌شود
بعد اعضای پایه یکه می‌شوند.




در این شکل، با ضرب درونی معمول، متعارف،

$e_1$ و $e_2$ بر هم عمود نیستند

$$e_2 = E_2 + \alpha e_1$$

$\alpha$ چنان پیدا کرد که

$$e_1 \cdot E_2 = 0$$

$$E_2 = e_2 - \alpha e_1 \qquad e_1 \cdot E_2 = e_1 \cdot e_2 - \alpha e_1 \cdot e_1$$

$$0 = e_1 \cdot E_2 = e_1 \cdot e_2 - \alpha e_1 \cdot e_1 \Rightarrow \alpha = \frac{e_1 \cdot e_2}{e_1 \cdot e_1}$$

$$E_1 = e_1$$

$$E_2 = e_2 - e_1 \frac{e_1 \cdot e_2}{e_1 \cdot e_1} = e_2 - E_1 \frac{E_1 \cdot e_2}{E_1 \cdot E_1}$$

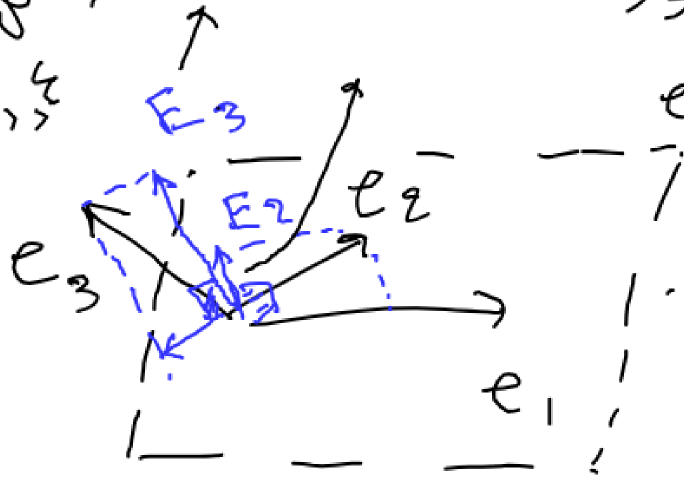
$$E_1 \cdot E_2 = E_1 \cdot e_2 - \cancel{E_1 \cdot E_1} \frac{E_1 \cdot e_2}{\cancel{E_1 \cdot E_1}} = 0$$

✓

اگر بعد فضا 3 بود.

$E_2$ در صفحه‌ی شامل $e_1, e_2$ است و بر $e_1$ عمود است.

بر صفحه‌ی شامل $e_1, e_2$ عمود است.




$$E_1 = e_1 \qquad E_2 = e_2 - E_1 \frac{E_1 \cdot e_2}{E_1 \cdot E_1}$$

$E_1, E_2$ مثل قبل.

برای $E_3$ مشابه زیر می‌شود.

$$E_3 = e_3 - \alpha e_1 - \beta e_2$$

$\alpha$ و $\beta$ چنان که $e_1 \cdot E_3 = e_2 \cdot E_3 = 0$

$$0 = e_1 \cdot E_3 = e_1 \cdot e_3 - \alpha e_1 \cdot e_1 - \beta e_1 \cdot e_2$$

$$0 = e_2 \cdot E_3 = e_2 \cdot e_3 - \alpha e_2 \cdot e_1 - \beta e_2 \cdot e_2$$

دستگاه برای محاسبه $\alpha$ و $\beta$ :

$$(e_1 \cdot e_1)\alpha + (e_1 \cdot e_2)\beta = e_1 \cdot e_3$$

$$(e_2 \cdot e_1)\alpha + (e_2 \cdot e_2)\beta = e_2 \cdot e_3$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} e_1 \cdot e_1 & e_1 \cdot e_2 \\ e_2 \cdot e_1 & e_2 \cdot e_2 \end{pmatrix}}_{M} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e_1 \cdot e_3 \\ e_2 \cdot e_3 \end{pmatrix}$$

ماتریسی.

$$\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = M^{-1} \begin{pmatrix} e_1 \cdot e_3 \\ e_2 \cdot e_3 \end{pmatrix}$$

یک دستگاه معادلات
برای α و β مستقیم
حل کنید.

برای فضاهای با بعد بیشتر :

عدد

$$E_{n+1} = e_{n+1} - \alpha_1 e_1 - \cdots - \alpha_n e_n$$

بردار

$$e_1 \cdot E_{n+1} = \cdots = e_n \cdot E_{n+1} = 0$$

$$M \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e_1 \cdot e_{n+1} \\ \vdots \\ e_n \cdot e_{n+1} \end{pmatrix}$$

یک دستگاه n معادله

با n مجهول ($\alpha_1$ تا $\alpha_n$)

با افزایش n تعداد معادلات بیشتر میشود (دستگاه بزرگتر میشود)

یک راه دیگر، که در هر معادله فقط یک مجهول
ظاهر شود: مجهول‌ها به هم جفت شوند.

برای $E_3$: هدف این است که $E_3$ بر $E_1$ و $E_2$
عمود باشد. صفحه‌ی شامل $E_1$ و $E_2$ همان صفحه‌ی شامل
$e_1$ و $e_2$ است. پس عمود بودن $E_3$ بر $E_1$ و $E_2$،
همان عمود بودن $E_3$ بر $e_1$ و $e_2$ است.

به جای $0 = e_1 \cdot E_3 = e_2 \cdot E_3$ ،

این شرطها را گذاشته‌ایم $0 = E_1 \cdot E_3 = E_2 \cdot E_3$

(که با شرطهای سطر اول هم‌ارزند.)

$E_3$ را هم برحسب $(E_1, E_2, e_3)$ بسط می‌دهیم، و آن برحسب $(e_1, e_2, e_3)$

$$E_3 = e_3 - \gamma E_1 - \gamma E_2$$

$$E_1 \cdot E_3 = E_1 \cdot e_3 - \gamma E_1 \cdot E_1 - \delta E_1 \cdot E_2$$

$$E_2 \cdot E_3 = E_2 \cdot e_3 - \gamma E_2 \cdot E_1 - \delta E_2 \cdot E_2$$

خاصة: $0 = E_1 \cdot E_3 = E_2 \cdot E_3$

$$(E_1 \cdot E_1)\gamma + (E_1 \cdot E_2)\delta = E_1 \cdot e_3$$

$$(E_2 \cdot E_1)\gamma + (E_2 \cdot E_2)\delta = E_2 \cdot e_3$$

$e_1 \cdot e_2 \neq 0$ لكن / $E_1 \cdot E_2 = 0$

$E_2 \cdot E_1 = 0$

پس معادلات می‌شوند:

$$(E_1 \cdot E_1)\gamma = E_1 \cdot e_3$$

$$(E_2 \cdot E_2)\delta = E_2 \cdot e_3$$

$$\begin{cases} E_3 = e_3 - E_1 \dfrac{E_1 \cdot e_3}{E_1 \cdot E_1} - E_2 \dfrac{E_2 \cdot e_3}{E_2 \cdot E_2} \\ E_2 = e_2 - E_1 \dfrac{E_1 \cdot e_2}{E_1 \cdot E_1} \\ E_1 = e_1 \end{cases}$$

ادامه:

$$E_{n+1} = e_{n+1} - E_1 \frac{E_1 \cdot e_{n+1}}{E_1 \cdot E_1} - \cdots - E_n \frac{E_n \cdot e_{n+1}}{E_n \cdot E_n}$$

$n > 0$

$$E_1 = e_1$$

به این ترتیب، از بردارهای $e_1, e_2, \ldots$

بردارهای $E_1, E_2, \ldots$ ساخته می‌شوند

که $E_j \cdot E_k = 0, \quad j \neq k$

چون $E_1, E_2, \dots$ متعامد است.

$$\tilde{u} := \frac{u}{|u|} \qquad |u| \neq 0 \Leftarrow u \neq 0$$

$$\tilde{u} \cdot \tilde{u} = \frac{u}{|u|} \cdot \frac{u}{|u|} = \overline{\left(\frac{1}{|u|}\right)} \frac{1}{|u|} u \cdot u$$

$$\overline{|u|} = |u| :$$ چون $|u|$ حقیقی است.

$$\tilde{u} \cdot \tilde{u} = \frac{u \cdot u}{|u|^2} = \frac{|u|^2}{|u|^2} = 1$$

کافیست:

$$v = \frac{u}{\alpha} \qquad u \neq 0 \qquad \overset{\text{عدد}}{|\alpha|} = \overset{\text{بردار}}{|u|}$$

$$v \cdot v = \frac{1}{\alpha}\,\frac{1}{\alpha}\; u \cdot u = \frac{u \cdot u}{|\alpha|^2} = \frac{|u|^2}{|\alpha|^2} = 1$$

---

برای یکه کردن پایه ی $E$ ، کافی است هر $E_j$ را بر $|E_j|$ تقسیم کنیم:

$$\tilde{E}_j = \frac{E_j}{|E_j|}$$

این کار راستاها را نگه میدارد.

این کار تعامد را نگه می‌دارد:

$$\tilde{E}_j \cdot \tilde{E}_k = \frac{E_j \cdot E_k}{|E_j|\,|E_k|} = \frac{E_j \cdot E_k}{|E_j|\,|E_k|}$$

$$j \neq k \Rightarrow E_j \cdot E_k = 0 \Rightarrow \tilde{E}_j \cdot \tilde{E}_k = 0$$

$$j = k : \quad \tilde{E}_j \cdot \tilde{E}_j = \frac{E_j \cdot E_j}{|E_j|^2} = 1$$

پس پایه‌ی $\tilde{E}_1, \tilde{E}_2, \dots$ یکه متعامد است.

به این فرایند ساختن یک پایه‌ی یکه-متعامد از یک پایه‌ی دلخواه، فرایند گرام-شمیت می‌گویند.

متناظر با هر ضرب داخلی یک پایه‌ی یکه-متعامد هست.

مثال:

$$e_1 \cdot e_1 = 2$$

$$e_1 \cdot e_2 = \frac{1-i}{\sqrt{2}} \qquad e_2 \cdot e_1 = \frac{1+i}{\sqrt{2}}$$

$$e_2 \cdot e_2 = 1$$

$$E_1 = e_1$$

$$E_2 = e_2 - \alpha E_1 \quad : \quad E_1 \cdot E_2 = 0$$

$$0 = E_1 \cdot e_2 - \alpha E_1 \cdot E_1 \qquad \alpha = \frac{E_1 \cdot e_2}{E_1 \cdot E_1}$$

$$\alpha = \frac{e_1 \cdot e_2}{e_1 \cdot e_1} = \frac{\frac{1-i}{\sqrt{2}}}{2} = \frac{1-i}{2\sqrt{2}}$$

$$E_2 = e_2 - \frac{1-i}{2\sqrt{2}} E_1 \qquad E_1 \cdot e_2 = \frac{1-i}{\sqrt{2}}$$

$$E_1 = e_1 \qquad E_1 \cdot E_2 = 0$$

$$E_1 \cdot E_1 = e_1 \cdot e_1 = 2$$

$$E_2 \cdot E_2 = \left(e_2 - \frac{1-i}{2\sqrt{2}} E_1\right) \cdot \overbrace{\left(e_2 - \frac{1-i}{2\sqrt{2}} E_1\right)}^{E_2}$$

$$= e_2 \cdot \left(e_2 - \frac{1-i}{2\sqrt{2}} E_1\right) = e_2 \cdot e_2 - \frac{1-i}{2\sqrt{2}} e_2 \cdot e_1$$

$$= 1 - \frac{1-i}{2\sqrt{2}} \frac{1+i}{\sqrt{2}} = 1 - \frac{2}{2 \times 2} = \frac{1}{2}$$

$$\tilde{E}_1 = \frac{E_1}{\sqrt{2}} \qquad \tilde{E}_2 = \sqrt{2}\, E_2$$

$$\tilde{E}_1 = \frac{e_1}{\sqrt{2}} \qquad \tilde{E}_2 = \sqrt{2}\, e_2 - \frac{1-i}{2} e_1$$

---

لطفاً $\tilde{E}_1$ و $\tilde{E}_2$ را برحسب $\hat{x}$ و $\hat{y}$ بنویسید:

$$e_1 = \hat{x} - \hat{y} \qquad e_2 = \frac{\hat{x} + i\,\hat{y}}{\sqrt{2}}$$

و نشان دهید (برحسب $\hat{x}$ و $\hat{y}$) که $\tilde{E}$ یکه‌متعامد است.