فضای خطی U

W یک زیرفضای U

یعنی W زیرمجموعه‌ی U است و W یک فضای برداری است.

u یک بردار در U

v یک بردار در W

فاصله‌ی v از u کمینه میشود وقتی که

$(u-v)\cdot v = 0$

یعنی $(u-v)$ بر هر بردار W عمود باشد

$(u-v)\cdot W = 0$

$u = u_{\parallel} + u_{\perp}$ $\qquad u_{\parallel} \in \mathbb{V}$ $\qquad u_{\perp} \perp \mathbb{V}$

$u_{\parallel} = v$ $\qquad$ با $u_{\perp} = u - v$

$u_{\parallel}$ تصویر قائم $u$ بر $\mathbb{V}$

---

یک پایه برای $\mathbb{V}$: $\qquad f_1, f_2, \ldots$

---

$w \in \mathbb{V}$ $\qquad w \cdot u = w \cdot (u_{\parallel} + u_{\perp})$

$\Downarrow$ $\quad w \cdot u_{\perp} = 0$ $\qquad$ $u_{\perp}$ بر همه بردارهای $\mathbb{V}$ عمود است.

$\Longrightarrow \quad w \cdot u = w \cdot u_{\parallel}$

$f_j \in \mathbb{V} \Longrightarrow f_j \cdot u = f_j \cdot u_{\parallel}$

$$\underbrace{u_{\parallel}}_{\text{بردار}} \in V \Rightarrow u_{\parallel} = \sum_j \underbrace{(u_{\parallel})_j}_{\text{عدد}} \underbrace{f_j}_{\text{بردار}}$$

$$f_k \cdot u_{\parallel} = f_k \cdot \left( \sum_j (u_{\parallel})_j f_j \right) = \sum_j (u_{\parallel})_j \, f_k \cdot f_j$$

یک دستگاه معادلات برای $(u_{\parallel})_j$ ها

یک دستگاه $n$ معادله با $n$ مجهول :

$n = \dim(V)$

اگر $f$ ها پایه‌ی متعامد باشه، این استفاده ساده می‌شود.

گیریم $f$ متعامد است.

$$f_k \cdot f_j = 0 \quad , \quad j \neq k$$

$$f_k \cdot u_{11} = \sum_j (u_{11})_j \, f_k \cdot f_j$$

$$= (u_{11})_1 \, f_k \cdot f_1 + (u_{11})_2 \, f_k \cdot f_2 + \dots$$

فقط 1 جمله $(j=k)$ از $n$ جمله‌ی حاصل برابر ناصفر است.

فقط برای پایه‌ی متعامد: $f_k \cdot u_{11} = (u_{11})_k \, f_k \cdot f_k$ .

$f$ پایه است، پس خطی مستقل است، پس عضو صفر ندارد :

$$f_k \neq 0 \Rightarrow f_k \cdot f_k \neq 0$$

$$(u_{11})_k = \frac{f_k \cdot u_{11}}{f_k \cdot f_k} \qquad f_k \cdot u_{11} = f_k \cdot u$$

$$u_{11} = \sum_k f_k \frac{f_k \cdot u_{11}}{f_k \cdot f_k} = \sum_k f_k \frac{f_k \cdot u}{f_k \cdot f_k}$$

$f_k \cdot f_k = 1$ اگر $f$ کاملاً متعامد باشد،

$$u_{11} = \sum_k f_k \, (f_k \cdot u_{11}) = \sum_k f_k (f_k \cdot u)$$

یک نتیجه‌ی فرعی:

گیریم V کل U است.

در این صورت f یک پایه برای U است.

$$u_{\parallel} = u$$

برای f متعامد:

$$u = \sum_k f_k \frac{f_k \cdot u}{f_k \cdot f_k}$$

برای f یکه متعامد:

$$u = \sum_k f_k (f_k \cdot u)$$

ولی اگر $V$ کل $\mathbb{U}$ نباشد،

برای $f$ متعامد،

$$u_{11} = \sum_k f_k \frac{f_k \cdot u}{f_k \cdot f_k}$$

برای $f$ یکه متعامد،

$$u_{11} = \sum_k f_k (f_k \cdot u)$$

---

مثال: ستونهای ماتریس حقیقی

$$\mathbb{U} = \mathbb{R}^3$$

$$u = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$W = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, z = 0 \right\}$$ صفحه‌ی $x-y$

تصویر قائم $u$ بر $W$

یک پایه برای $W$:
$$f_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad f_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

ضرب درونی:
$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} = x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2$$
$$= \bar{x}_1 x_1 + \bar{y}_1 y_2 + \bar{z}_1 z_1$$

$\bar{x}_1 = x_1 \quad \bar{y}_1 = y_1 \quad \bar{z}_1 = z_1$ درایه‌ها حقیقی‌اند.

$f_1 \cdot f_2 = 1\times 0 + 0\times 1 + 0\times 0 = 0$ پس متعامدند.

$f_1 \cdot f_1 = 1\times 1 + 0\times 0 + 0\times 0 = 1$

$f_2 \cdot f_2 = 0\times 0 + 1\times 1 + 0\times 0 = 1$ پس یکه هستند.

$$u_{11} = (u_{11})_1 f_1 + (u_{11})_2 f_2$$

$$f_1 \cdot u_{11} = (u_{11})_1 \underbrace{f_1 \cdot f_1}_{1} + (u_{11})_2 \underbrace{f_1 \cdot f_2}_{0} = (u_{11})_1$$

$$f_2 \cdot u_{11} = (u_{11})_1 \underbrace{f_2 \cdot f_1}_{0} + (u_{11})_2 \underbrace{f_2 \cdot f_2}_{1} = (u_{11})_2$$

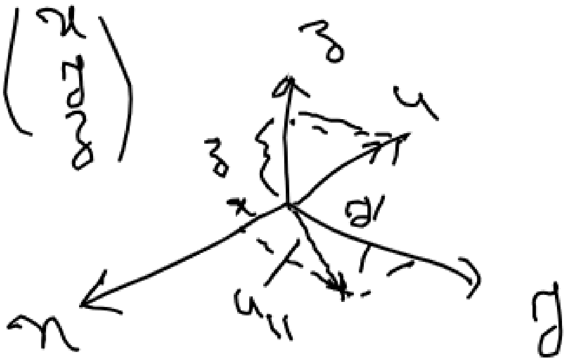
$$f_j \cdot u_{\parallel} = f_j \cdot u$$

$$(u_{\parallel})_1 = f_1 \cdot u = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = x$$

$$(u_{\parallel})_2 = f_2 \cdot u = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = y$$

$$u_{\parallel} = (u_{\parallel})_1 f_1 + (u_{\parallel})_2 f_2 = x \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + y \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$$

$$u_{\parallel} = \begin{pmatrix}x\\y\\0\end{pmatrix} \qquad u = \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$$



همان سوال ۱۷

پایه برای ۱۷ :

$$g_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad g_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

با همان ضرب درونی.

$g$ متعامد نیست.

$$g_1 \cdot g_2 = 1\times 1 = 1 \neq 0$$

$$g_1 \cdot g_1 = 1\times 1 + 1\times 1 = 2$$

$$g_2 \cdot g_2 = 1\times 1 = 1$$

$$u = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$u_{11} = (u_{11})_1 g_1 + (u_{11})_2 g_2$$

$$g_1 \cdot u_{11} = (u_{11})_1 \overbrace{g_1 \cdot g_1}^{2} + (u_{11})_2 \overbrace{g_1 \cdot g_2}^{1} = 2(u_{11})_1 + (u_{11})_2$$

$$g_2 \cdot u_{11} = (u_{11})_1 \overbrace{g_2 \cdot g_1}^{1} + (u_{11})_2 \overbrace{g_2 \cdot g_2}^{1} = (u_{11})_1 + (u_{11})_2$$

$$g_j \cdot u_{11} = g_j \cdot u$$

$$g_1 \cdot u_{11} = g_1 \cdot u = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = x + y$$

$$g_2 \cdot u_{11} = g_2 \cdot u = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = y$$

$$2(u_{11})_1 + (u_{11})_2 = x + y$$

$$(u_{11})_1 + (u_{11})_2 = y$$

$$2(u_{11})_1 + (u_{11})_2 = x + y$$

$$(u_{11})_1 + (u_{11})_2 = y$$

تفاضل: $(u_{11})_1 = x$

$$(u_{11})_2 = y - x$$

$$u_{11} = x\, g_1 + (y-x)\, g_2 = x\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} + (y-x)\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix}x\\y\\0\end{pmatrix}$$

همان $u_{11}$ ی قبلی ([illegible])

با همین بردارهای g :

$$g_1=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} \qquad g_2=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$$

این بردارها را متعامد میکنیم (گرام - اشمیت)

$$G_1=g_1 \qquad 0=G_1\cdot G_2=g_1\cdot(g_2-\alpha g_1)$$

$$G_2=g_2-\alpha g_1 \qquad =g_1\cdot g_2-\alpha g_1\cdot g_1$$

$$=1-2\alpha \qquad \alpha=\frac{1}{2}$$

$$G_1=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} \qquad G_2=\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\\ \frac{1}{2}\\ 0\end{pmatrix}$$

$$G_1\cdot G_1=2$$

$$G_1\cdot G_2=0$$

$$G_2\cdot G_2=\frac{1}{2}$$

$$u_{11} = (u_{11})_1 G_1 + (u_{11})_2 G_2 \qquad G_1 = \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} \qquad G_2 = \begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\\ \frac{1}{2}\\ 0\end{pmatrix} \qquad u = \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$$

$$G_1 \cdot u = G_1 \cdot u_{11} = (u_{11})_1 \underbrace{G_1 \cdot G_1}_{2} + (u_{11})_2 \underbrace{G_1 \cdot G_2}_{0}$$

$$x + y = 2(u_{11})_1 \longrightarrow (u_{11})_1 = \frac{x+y}{2}$$

$$G_2 \cdot u = G_2 \cdot u_{11} = (u_{11})_1 \overbrace{G_2 \cdot G_1}^{0} + (u_{11})_2 \overbrace{G_2 \cdot G_2}^{\frac{1}{2}}$$

$$-\frac{x}{2} + \frac{y}{2} = \frac{1}{2}(u_{11})_2 \qquad (u_{11})_2 = y - x$$

$$u_{11} = \frac{x+y}{2}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} + (y-x)\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\\ \frac{1}{2}\\ 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x\\y\\0\end{pmatrix} \checkmark$$

$$\tilde{G}_1 \cdot \tilde{G}_1 = \tilde{G}_2 \cdot \tilde{G}_2 = 1 \qquad \tilde{G}_1 \cdot \tilde{G}_2 = 0$$ كله كده : $G$

$$\tilde{G}_1 = \frac{G_1}{\|G_1\|} = \frac{G_1}{\sqrt{G_1 \cdot G_1}} = \frac{G_1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\tilde{G}_2 = \frac{G_2}{\|G_2\|} = \frac{G_2}{\sqrt{G_2 \cdot G_2}} = \frac{G_2}{\frac{1}{\sqrt{2}}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$u_{11} = (u_{11})_1 \tilde{G}_1 + (u_{11})_2 \tilde{G}_2$$ ضرايب بطريقة والتسانم.

و $(u_{11})$ هما ال $(u_{11})$ هي قيم مستنة.

$$\tilde{G}_1 \cdot u = \tilde{G}_1 \cdot u_{11} = (u_{11})_1 = \frac{x+y}{\sqrt{2}}$$

$$\tilde{G}_2 \cdot u = \tilde{G}_2 \cdot u_{11} = (u_{11})_2 = \frac{y-x}{\sqrt{2}}$$

$$u_{11} = \frac{x+y}{\sqrt{2}}\,\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} + \frac{y-x}{\sqrt{2}}\,\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x\\y\\0\end{pmatrix}$$

---

مثال از فضای تابعی

خاص‌تر: فضای چندجمله‌ای‌ها با دامنه‌ی $[-1, 1]$ $\quad W$

$u \in W$ یک تابع است. $\quad u(t) = a_0 + a_1 t + \dots + a_n t^n$

برای هر $u$ در $W$ یک $n$ هست که $a_0$ تا $a_n$ عددهای ثابت.

V : فضای چندجمله‌ای‌های درجه‌ی 2 :

$v \in V \qquad v(t) = b_0 + b_1 t + b_2 t^2$

ضرب درونی :

$$w_1 \cdot w_2 = \int_{-1}^{1} dt \; \overline{w_1(t)} \; w_2(t)$$

برای هیئت مختلط

یک پایه برای V :

$f_0(t) = 1$

$f_1(t) = t \qquad$ اگر $\alpha_0 f_0 + \alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2 = 0$

$f_2(t) = t^2 \qquad \forall t \in [-1,1]: (\alpha_0 f_0 + \alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2)(t) = 0$

$\alpha_0 = \alpha_1 = \alpha_2 = 0 \Leftarrow \alpha_0 + \alpha_1 t + \alpha_2 t^2 = 0 \quad : \forall t$

$(f_0, f_1, f_2)$ خطی مستقلند

تعدادشان کافی است (3 تا برابر با بعد $V$)

پس $f$ پایه است.

$$f_0 \cdot f_0 = \int_{-1}^{1} dt\ \overline{f_0(t)}\ f_0(t) = \int_{-1}^{1} dt = 2$$

$$f_0 \cdot f_1 = \int_{-1}^{1} dt\ \bar{1}\ t = \frac{t^2}{2}\Big|_{-1}^{1} = \frac{1-1}{2} = 0$$

$$f_0 \cdot f_2 = \int_{-1}^{1} dt\ \bar{1}\ t^2 = \frac{t^3}{3}\Big|_{-1}^{1} = \frac{2}{3} \neq 0$$

$$f_1 \cdot f_1 = \int_{-1}^{1} dt\, \bar{t}\, t = \frac{t^3}{3}\Big|_{-1}^{1} = \frac{2}{3}$$

$$f_1 \cdot f_2 = \int_{-1}^{1} dt\, \bar{t}\, t^2 = \int_{-1}^{1} dt\, t^3 = 0$$

انتگرال تابع فرد
فاصله متقارن

$$f_2 \cdot f_2 = \int_{-1}^{1} dt\, \overline{t^2}\, t^2 = \frac{t^5}{5}\Big|_{-1}^{1} = \frac{2}{5}$$

$f_0 \cdot f_0 = 2 \qquad f_0 \cdot f_1 = 0 \qquad f_0 \cdot f_2 = \frac{2}{3}$

$f_1 \cdot f_0 = 0 \qquad f_1 \cdot f_1 = \frac{2}{3} \qquad f_1 \cdot f_2 = 0$

$f_2 \cdot f_0 = \frac{2}{3} \qquad f_2 \cdot f_1 = 0 \qquad f_2 \cdot f_2 = \frac{2}{5}$

پایه‌ی $f$ را متعامد می‌کنیم :

$$F_0 = f_0$$

$$F_1 = f_1 - \alpha f_0 \qquad 0 = F_0 \cdot F_1 = f_0 \cdot \left( f_1 - \alpha f_0 \right)$$

$$0 = 0 - 2\alpha \implies \alpha = 0 \qquad F_1 = f_1$$

$$F_2 = f_2 - \beta F_0 - \gamma F_1$$

$$\gamma = 0$$

$$0 = F_0 \cdot F_2 = f_0 \cdot f_2 - \beta f_0 \cdot f_0 - \gamma f_0 \cdot f_1$$

$$= \frac{2}{3} - 2\beta - 0\gamma \implies \beta = 1/3 \Uparrow$$

$$0 = F_1 \cdot F_2 = f_1 \cdot f_2 - \beta f_1 \cdot f_0 - \gamma f_1 \cdot f_1 = 0 - 0\beta - \frac{2\gamma}{3}$$

$$F_0(t) = 1 \qquad F_0 \cdot F_0 = 2 \qquad F_0 \cdot F_1 = 0 \qquad F_0 \cdot F_2 = 0$$

$$F_1(t) = t \qquad F_1 \cdot F_0 = 0 \qquad F_1 \cdot F_1 = 2/3 \qquad F_1 \cdot F_2 = 0$$

$$F_2(t) = t^2 - 1/3 \qquad F_2 \cdot F_0 = 0 \qquad F_2 \cdot F_1 = 0 \qquad F_2 \cdot F_2 = \frac{8}{45}$$

$$F_0 \cdot F_2 = \int_{-1}^{1} dt \, \bar{1} \left(t^2 - 1/3\right) = \left(\frac{t^3}{3} - \frac{t}{3}\right)\Big|_{-1}^{1} = 0$$

انتگرال فرد در بازه متقارن صفر

$$F_1 \cdot F_2 = \int_{-1}^{1} dt \, \bar{t} \left(t^2 - 1/3\right) = \int_{-1}^{1} \left(t^3 - \frac{t}{3}\right) dt = 0$$

$$F_2 \cdot F_2 = \int_{-1}^{1} dt \, \overline{\left(t^2 - 1/3\right)} \left(t^2 - 1/3\right) = \int_{-1}^{1} \left(t^4 - \frac{2t^2}{3} + \frac{1}{9}\right) = \frac{2}{5} - \frac{4}{9} + \frac{2}{9}$$

$F_0 \cdot F_0 = 2 \qquad F_1 \cdot F_1 = \frac{2}{3} \qquad F_2 \cdot F_2 = \frac{8}{45} \qquad F_j \cdot F_k = 0$

$j \neq k$

u یک چندجمله‌ای درجه‌ی 3 : یک حالت خاص :

$$u(t) = t^3 \xrightarrow{?} u_{11}(t) = 0$$

نشان می‌دهیم این درست نیست. $u_{11}$ چی که در ۱۷ است و کمترین

فاصله از u را دارد صفر نیست.

$$u_{11} = (u_{11})_0 F_0 + (u_{11})_1 F_1 + (u_{11})_2 F_2$$

$$(F_k \cdot u_{11}) = (u_{11})_k \, F_k \cdot F_k$$ چون F ها متعامدند.

$$(u_{11})_k = \frac{F_k \cdot u_{11}}{F_k \cdot F_k} = \frac{F_k \cdot u}{F_k \cdot F_k}$$

$$F_0 \cdot u = \int_{-1}^{1} dt \, \bar{1} \, t^3 = 0$$ انتگرال تابع فرد در فاصله زوج

$$F_1 \cdot u = \int_{-1}^{1} dt \, \bar{t} \, t^3 = \frac{t^5}{5} \Big|_{-1}^{1} = \frac{2}{5}$$

$$F_2 \cdot u = \int_{-1}^{1} dt \, \overline{(t^2 - 1/3)} \, t^3 = 0$$ انتگرال تابع فرد در بازه متقارن

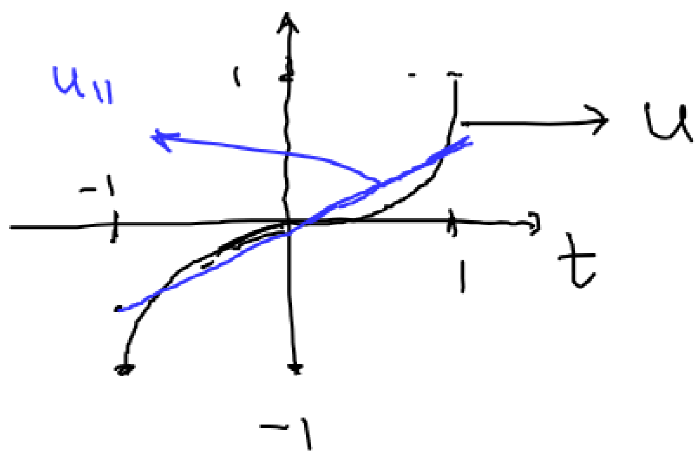
$$(u_{\parallel})_1 = \frac{F_1 \cdot u}{F_1 \cdot F_1} = \frac{\frac{2}{5}}{\frac{2}{3}} = \frac{3}{5}$$

$$(u_{\parallel})_0 = 0 \quad (u_{\parallel})_2 = 0$$

$$u_{\parallel} = (u_{\parallel})_1 F_1 = \frac{3}{5} F_1$$

$$u_{\parallel}(t) = \frac{3}{5} t$$

$$u(t) = t^3$$




$u(t) = t^3$

$u_{11}(t) = \frac{3}{5}t$

فاصله‌ی $u_{11}$ تا $u$

از فاصله‌ی $u$ تا $0$ کمتر است.

$$\int_{-1}^{1} dt \, |u(t) - u_{11}(t)|^2 \overset{?}{<} \int_{-1}^{1} dt \, |u(t)|^2 :$$ سؤال

$$\int_{-1}^{1} dt\, |u(t) - u_{11}(t)|^2 = \int_{-1}^{1} dt\, \left(t^3 - \frac{3t}{5}\right)^2$$

$$= \int_{-1}^{1} dt \left(t^6 - \frac{6t^4}{5} + \frac{9t^2}{25}\right) = 2\left(\frac{1}{7} - \frac{6}{25} + \frac{3}{25}\right)$$

$$= \frac{2(25-21)}{7 \times 25} = \frac{8}{7 \times 25} = \frac{8}{175} = \frac{2}{7} \times \frac{4}{25}$$

$$\int_{-1}^{1} dt\, |u(t)|^2 = \int_{-1}^{1} dt\, t^6 = \frac{2}{7}$$

$$\frac{2}{7} \times \frac{4}{25} < \frac{2}{7} \qquad \int_{-1}^{1} dt\, |u(t) - u_{11}(t)|^2 < \int_{-1}^{1} dt\, |u(t)|^2$$

یک مثال دیگر:

تابع u در $[-\pi, \pi]$ تعریف شده

تابع u را به طور متناوب با دوره $(2\pi)$

$$u(t+2\pi m) \underset{\text{ع ص}}{} = u(t)$$

m و j صحیح

$$\sin(t+2\pi m) = \sin t \quad ; \quad \sin[j(t+2\pi m)] = \sin(jt)$$

$$\cos(t+2\pi m) = \cos t \quad ; \quad \cos[j(t+2\pi m)] = \cos(jt)$$

U : فضای تابع‌های با دامنه‌ی $[-\pi, \pi]$

V : مجموعه‌ی ترکیب خطی‌ای از $C_j$ ها و $S_j$ ها

$C_j(t) = \cos(jt)$ j صحیح

$S_j(t) = \sin(jt)$ j صحیح مثبت

$$j \leq N$$

$C_j$ : $j = 0 \dots N$ تا $(N+1)$ جمعاً $(2N+1)$ تا

و $S_j$ : $j = 1 \dots N$ تا $N$

تقریب u با $u_{11}$ : فاصله‌ی $u_{11}$ تا u کمینه شود.

$$w_1 \cdot w_2 = \int_{-\pi}^{\pi} dt \; \overline{w_1(t)} \; w_2(t)$$

$j \neq k$ ‏ j و k صحیح و نامنفی

$$C_j \cdot C_k = \int_{-\pi}^{\pi} dt \; \overline{\cos(jt)} \cos(kt)$$

$$= \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} dt \left\{ \cos\big[\overbrace{(j+k)}^{>} t\big] + \cos\big[\overbrace{(j-k)}^{\neq 0} t\big] \right\}$$

$$= \frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{j+k} \sin\big[(j+k)t\big] + \frac{1}{j-k} \sin\big[(j-k)t\big] \right\}_{-\pi}^{\pi}$$

$$\sin(l\pi)=0$$

$$C_j \cdot C_k = 0 \qquad j \neq k$$

$$C_j \cdot C_j = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} dt\left[\cos(2jt) + \overbrace{\cos(0t)}^{1}\right]$$

$$= \begin{cases} \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2j}\sin(2jt) + t\right]_{-\pi}^{\pi} = \pi, & j \neq 0 \\ \left[t\right]_{-\pi}^{\pi} = 2\pi, & j = 0 \end{cases}$$

$$S_j \cdot S_k = \int_{-\pi}^{\pi} dt \ \overline{\sin(jt)} \ \sin(kt) \qquad 0 \neq j \neq k \neq 0$$

$$= \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} dt \ \left\{ \cos[\overbrace{(j-k)}^{\neq 0} t] - \cos[\overbrace{(j+k)}^{>0} t] \right\}$$

$$= \frac{1}{2}\left\{ \frac{\sin[(j-k)t]}{j-k} - \frac{\sin[(j+k)t]}{j+k} \right\}_{-\pi}^{\pi}$$

$$= 0$$

$$S_j \cdot S_j = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} dt \left[ \cos(0t) - \cos(\overbrace{2j}^{>0} t) \right]$$

$$= \pi$$

$$S_j \cdot C_k = \int_{-\pi}^{\pi} dt \, \sin(jt) \, \cos(kt) \qquad \begin{matrix} j > 0 \\ k \geq 0 \end{matrix}$$

$$= \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} dt \left\{ \sin[(\overbrace{j+k}^{>0})t] + \sin[(j-k)t] \right\}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} dt \, \sin[(j+k)t] = - \frac{\cos[(j+k)t]}{j+k} \Bigg|_{-\pi}^{\pi}$$

$$= - \frac{(-1)^{j+k} - (-1)^{j+k}}{j+k} = 0 \qquad \cos(\ell\pi) = (-1)^{\ell} = (-1)^{-\ell}$$

לכל $\ell$

$$\int_{-\pi}^{\pi} dt \ \sin[(j-k)t] = \begin{cases} 0, & j=k \\ & \end{cases}$$

$j \neq k$

$$\int_{-\pi}^{\pi} dt \ \sin[(j-k)t] = -\left.\frac{\cos[(j-k)t]}{j-k}\right|_{-\pi}^{\pi}$$

$$= -\frac{[(-1)^{j-k} - (-1)^{j-k}}{j-k} = 0$$

هر ۲ انتگرال صفر گردند

$$S_j \cdot C_k = 0$$

خلاصه:

$$C_j \cdot C_j = \begin{cases} 2\pi, & j = 0 \\ \pi, & j \neq 0 \end{cases}$$

$$S_j \cdot S_j = \pi, \quad j \neq 0$$

$$C_j \cdot C_k = 0 \qquad j \neq k$$

$$S_j \cdot C_k = 0 \longrightarrow$$ لازم نیست j و k متفاوت باشند

$$S_j \cdot S_k = 0 \qquad j \neq k$$

$j, k$ صحیح و نامنفی - برای $S$ مثبت

پایه‌ای که با $C_j$ ها و $S_j$ ها ساخته می‌شود متعامد است،

دیگر یکه نیست.

$u \longrightarrow u_{11}$ تصویر قائم $u$ بر ۱۷

$$u_{11} = \sum_{j=0}^{N} \alpha_j C_j + \sum_{j=1}^{N} \beta_j S_j$$

$$C_k \cdot u = C_k \cdot u_{11} = \alpha_k C_k \cdot C_k \qquad \alpha_k = \frac{C_k \cdot u}{C_k \cdot C_k}$$

$$S_k \cdot u = S_k \cdot u_{11} = \beta_k S_k \cdot S_k \qquad \beta_k = \frac{S_k \cdot u}{S_k \cdot S_k}$$

$$u_{11} = \frac{C_0}{2\pi}(C_0 \cdot u) + \frac{1}{\pi}\sum_{j=1}^{N}\left[C_j(C_j \cdot u) + S_j(S_j \cdot u)\right]$$

$$u_{11}(t) = \frac{C_0 \cdot u}{2\pi} + \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{N}\left[(C_j \cdot u)\cos(jt) + (S_j \cdot u)\sin(jt)\right]$$

یک بسط برحسب توابع سینوس و کسینوس : بسط فوریه

مثال:

$u(x)=1$

$u=C_0 \implies u\in V$

نشان: $u_{11}=u$

$C_0\cdot u=C_0\cdot C_0=2\pi$

$C_0\cdot C_j=0 \qquad j\neq 0$

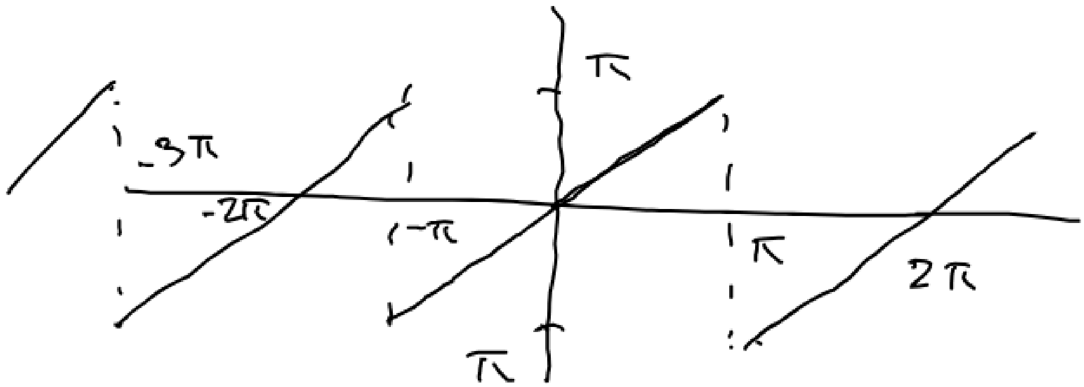
$C_0\cdot S_j=0$

$u_{11}=\frac{2\pi}{2\pi}C_0 \qquad u_{11}=C_0=u$ ✓

مثال:

$u(t) = t \quad , \quad -\pi < t < \pi$

$u$ را با دوره $2\pi$



این $u$ فرد است.

$C_k$ ها زوج اند.

$$C_k \cdot u = \int_{-\pi}^{\pi} dt \, \underbrace{\cos(kt) \; u(t)}_{\text{فرد}} = 0$$

انتگرال‌ده فرد

فاصله زوج

$$S_k \cdot u = \int_{-\pi}^{\pi} dt \, t \sin(kt) = \left\{ t \left[ -\frac{\cos(kt)}{k} \right] \right\}_{-\pi}^{\pi} + \int_{-\pi}^{\pi} dt \, \frac{\cos(kt)}{k}$$

$k \neq 0$

$$= -\frac{\pi(-1)^k - (-\pi)(-1)^k}{k} + \frac{\sin(kt)}{k^2}\Big]_{-\pi}^{\pi}$$

$$= -\frac{2\pi(-1)^k}{k} \qquad 0 = \sin(k\pi)$$

$$S_k \cdot u = -\frac{2\pi(-1)^k}{k}$$

$$u_{11} = -2\pi \sum_{k=1}^{N} \frac{(-1)^k S_k}{\pi k}$$

$$u_{11}(t) = -2 \sum_{k=1}^{N} \frac{(-1)^{k} \sin(kt)}{k}$$

هرچه N بزرگتر باشد، $u_{11}$ به $u$ نزدیکتر میشود ( ).

$\| u - u_{11} |$ کمتر میشود.

$$\| u - u_k \|^2 = \int_{-\pi}^{\pi} dt \, | u(t) - u_{11}(t) |^2$$

$$u_{11}(t) = 2\left[\sin t - \frac{1}{2}\sin(2t) + \frac{1}{3}\sin(3t) - \frac{1}{4}\sin(4t) + \cdots\right]$$