توابع از $\mathbb{R}$ به $\mathbb{R}$ (یا از یک زیرمجموعه‌ی $\mathbb{R}$ به $\mathbb{R}$)

توابع m متغیری با مقادیر n مؤلفه‌ای

$$\mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

یک حالت خاص: یک متغیری با مقادیر n مؤلفه‌ای

$$\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

مثل حرکت یک ذره: مکان (چند مؤلفه‌ای) برحسب زمان (تک متغیر)

توابع برداری (مقدار برداری است) ی یک متغیری.

مثلاً

$\vec{r}(t)$

بردار $\vec{r}$ (مکان) تابع t (زمان).

فضاهای حد پیوستگی و مشتق بسیار شبیه

موارد مشابه برای توابع با مقدار عددی است.

حد:

$$x = f(t)$$

$$\lim_{t \to a} f(t) = l$$

یعنی:

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists \delta > 0 \ni$$

$$0 < |t-a| < \delta \implies |f(t) - l| < \varepsilon$$

گسترش به تابع با مقادیر برداری:

$$x \to \vec{r}$$

$$f(t) \to \vec{f}(t)$$

$$f(t) = \begin{bmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \\ \vdots \end{bmatrix} \qquad f(t) = \begin{bmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \\ f_3(t) \end{bmatrix}$$ در فضای سه بعدی

$|t-a|$ و δ و ε که در تعریف عوض نمی‌شن.

$f(t)$ و l بردارن.

$$|f(t) - l| \longrightarrow \|f(t) - l\| \rightarrow |f(t) - l|$$

قدر مطلق عدد $\longrightarrow$ طول بردار — طول بردار (با نماد ساده‌تر)

اگر علامت بردار (→) به کار رود، معلوم است
آن کمیت بردار است. اگر نه باید گفته شود
کدام چیز بردار است، کدام چیز نه است.

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{\vec{u}\cdot\vec{u}} \xrightarrow{\text{بدون}} |u| = \sqrt{u\cdot u}$$

u بردار است.

برای ضرب درونی می‌شود یک پایه‌ی کلی متعامد یافت.

$$\to u\cdot u = \sum_j \bar{u}_j u_j \xrightarrow{\text{حقیقی}} \bar{u}_j = u_j \;\Big|\; u\cdot u = \sum_j (u_j)^2$$

پس:

بُعد فضا n است

$$|f(t)-l| = \sqrt{|f_1(t)-l_1|^2+\cdots+|f_n(t)-l_n|^2}$$

در تعریف حد، این نابرابری لازم است.

$$|f(t)-l|<\varepsilon$$

$f(t)$ و l بردارند

$|f(t)-l|$ را بین دو حد (بالا و پایین) گذاشته‌ایم.

r یک بردار است (حقیقی و n بعدی)

r_1 ، r_n عدد (مؤلفه)

$$|r| = \sqrt{(r_1)^2 + \cdots + (r_n)^2}$$

$$(r_1)^2 + \cdots + (r_n)^2 \geq |r_1|^2 \text{ و } |r_2|^2, \ldots, |r_n|^2$$

$$|r_i|^2 = (r_i)^2 \leq |r|^2$$

$$|r_i| \leq |r|$$

قدر مطلق هر مؤلفه کوچکتر از یا برابر با طول است.

$$\left(|r_1| + \cdots + |r_n|\right)^2 = |r_1|^2 + \cdots + |r_n|^2 \underbrace{+\, 2|r_1||r_2| + \cdots}_{\geq 0}$$

(همه‌ی جملات نامنفی‌اند)

$$\left(|r_1| + \cdots + |r_n|\right)^2 \geq |r_1|^2 + \cdots + |r_n|^2$$

$$\Big\downarrow \text{جذر}$$

$$|r_1| + \cdots + |r_n| \geq \sqrt{|r_1|^2 + \cdots + |r_n|^2} = |r|$$

$$|r| \leq |r_1| + \cdots + |r_n|$$

حالت کلی از n برابر با تعمیم قضیه نامساوی مثلثی است.

$$|r_i| \le |r| \le |r_1| + \cdots + |r_n|$$

با استفاده از این ← قضیه:

$$\lim_{t \to a} f(t) = l \iff \left[\forall i : \quad \lim_{t \to a} f_i(t) = l_i\right]$$

$f(t)$ در $t \to a$ حد دارد و حدش l است، اگر و تنها اگر همه‌ی مؤلفه‌های $f(t)$ در $t \to a$ حد داشته باشند، و حد مؤلفه‌ی i ام برابر l_i باشد.

اثبات :

۱ : فرض

$$\lim_{t \to a} f(t) = l$$

یعنی

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists \delta > 0 \Rightarrow$$

$$0 < |t-a| < \delta \Rightarrow |f(t) - l| < \varepsilon$$

$$|f_i(t) - l_i| \leq |f(t) - l|$$

قدر مطلق مؤلفه
نابزرگتر از طول

$$\Rightarrow |f_i(t) - l_i| < \varepsilon \xRightarrow{\text{یعنی}} \lim_{t \to a} f_i(t) = l_i$$

یک بخش از قضیه را ثابت کنیم:

$$\lim_{t\to a} f(t) = l \implies \forall i: \lim_{t\to a} f_i(t) = l_i$$

بخش بعدی: فرض:

$$\forall i: \lim_{t\to a} f_i(t) = l_i$$

یعنی:

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists \delta_i > 0 \quad \ni$$

$$0 < |t-a| < \delta_i \implies |f_i(t) - l_i| < \varepsilon$$

$$|r| \leq |r_1| + \cdots + |r_n|$$

$$|f(t) - l| \leq |f_1(t) - l_1| + \cdots + |f_n(t) - l_n|$$

اگر $|f_1(t) - l_1| < \frac{\varepsilon}{n}, \ldots, |f_n(t) - l_n| < \frac{\varepsilon}{n}$

$$|f_1(t) - l_1| + \cdots + |f_n(t) - l_n| < \varepsilon \implies$$

$$|f(t) - l| < \varepsilon$$

برای این که طول از ε کوچکتر شود، کافی است قدر مطلق هر مؤلفه کوچکتر از $\frac{\varepsilon}{n}$ شود.

$\varepsilon > 0 \quad , \quad \frac{\varepsilon}{n} > 0$

$\forall i : \exists \tilde{\delta}_i > 0 \ni$

$0 < |t-a| < \tilde{\delta}_i \Rightarrow |f_i(t) - l_i| < \frac{\varepsilon}{n}$

$\delta := \min(\tilde{\delta}_1, \dots, \tilde{\delta}_n)$

$\tilde{\delta}_1, \dots, \tilde{\delta}_n > 0 \Rightarrow \delta > 0$

محدود بودن n (تعداد $\tilde{\delta}_i$ ها) مهم است. اگر نامتناهی بود

کمینه‌ی اینها وجود نداشته باشد. مثال:

$S = \left\{ \frac{1}{j} \mid j \in \mathbb{N} \right\}$ → عددهای طبیعی (صحیح مثبت)

$S = \left\{ 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots \right\}$

همه‌ی اعضای S مثبت‌اند. اما S کوچکترین عضو ندارد:

$0 \notin S$

$\forall x > 0$:

$\exists k \ni \quad k > \frac{1}{x} \Rightarrow \frac{1}{k} < x$. x کمینه‌ی S نیست.

اما تعداد $\tilde{\delta}_i$ ها محدود است (n تا). پس این مشکل

(نبود در کمینه) پیش نمی‌آید:

$$\delta := \min(\tilde{\delta}_1, \dots, \tilde{\delta}_n)$$

$$\forall i: \quad \delta \leq \tilde{\delta}_i$$

زیرا:

$$0 < |t-a| < \delta \Rightarrow |f(t) - l| < \varepsilon$$

اثبات:

$$\forall i: \quad \tilde{\delta}_i \leq \delta$$

پس $\quad 0 < |t-a| < \delta \Rightarrow 0 < |t-a| < \tilde{\delta}_i$

$$\Rightarrow \quad |f_i(t) - l_i| < \frac{\varepsilon}{n} \quad \Rightarrow$$

$$|f_1(t) - l_1| + \cdots + |f_n(t) - l_n| < \varepsilon$$

$$|f(t) - l| \leq |f_1(t) - l_1| + \cdots + |f_n(t) - l_n|$$

$$\Rightarrow |f(t) - l| < \varepsilon$$

معلوم که:

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists \delta > 0 \ni$$

$$0 < |t - a| < \delta \Rightarrow |f(t) - l| < \varepsilon$$

یعنی

$$\lim_{t \to a} f(t) = l$$

بخش دوم قضیه هم ثابت شد:

$$\left[\forall i,\ \lim_{t\to a} f_i(t) = l_i\right] \Longrightarrow \lim_{t\to a} f(t) = l$$

ترکیب این با بخش اول قضیه (که قبلاً ثابت شد):

$$\left[\forall i,\ \lim_{t\to a} f_i(t) = l_i\right] \Longleftrightarrow \lim_{t\to a} f(t) = l$$

$$\lim_{t \to a} f(t) = l \qquad \lim_{t \to a} g(t) = m$$

f و g و l و m بردار

$$\overset{?}{\Longrightarrow} \lim_{t \to a} (f+g)(t) = l+m$$

اثبات:

$$\lim_{t \to a} f(t) = l \Longrightarrow \forall i : \lim_{t \to a} f_i(t) = l_i$$

$$\lim_{t \to a} g(t) = m \Longrightarrow \forall i : \lim_{t \to a} g_i(t) = m_i$$

f_i ها و g_i ها توابع با مقدار حقیقی‌اند: پس

$$\lim_{t\to a} f_i(t) = l_i \ , \ \lim_{t\to a} g_i(t) = m_i$$

$$\Rightarrow \lim_{t\to a} (f_i + g_i)(t) = (l_i + m_i)$$

$$f_i + g_i = (f+g)_i \ , \ l_i + m_i = (l+m)_i$$

$$\lim_{t\to a} (f+g)_i(t) = (l+m)_i$$

$$\forall i \quad \lim_{t \to a} (f+g)_i (t) = (l+m)_i$$

$$\Rightarrow \lim_{t \to a} (f+g)(t) = l+m$$

$$\lim_{t \to a} f(t) = l \ , \ \lim_{t \to a} g(t) = m$$ تمرین:

$$\Rightarrow \lim_{t \to a} (f-g)(t) = l-m$$

ب) ضرب و تقسیم: میتوان یک عدد را در یک بردار ضرب کرد
و یک بردار را بر یک عدد تقسیم کرد.

F یک تابع با مقدار بردار
f یک تابع با مقدار عدد:

$\frac{F}{f}$ و fF تابعهای با مقدار بردار

$$(fF)_i(t) = f(t)\,F_i(t)$$

סק׳ f, ℓ

וקט׳ F, L

$$\lim_{t \to a} F(t) = L \implies \forall i: \lim_{t \to a} F_i(t) = L_i$$

$$\lim_{t \to a} f(t) = \ell \implies \lim_{t \to a} (fF_i)(t) = \ell L_i$$

$$fF_i = (fF)_i, \quad \ell L_i = (\ell L)_i \implies$$

$$\lim_{t \to a} (fF)_i(t) = (\ell L)_i$$

$$\forall i: \lim_{t\to a} (fF)_i(t) = (\ell L)_i$$

$$\Rightarrow \lim_{t\to a} (fF)(t) = \ell L$$

$$L \longrightarrow \text{[illegible]} \longleftarrow F$$

$$\ell \longrightarrow \text{[illegible]} \longleftarrow f$$

[illegible]

$$\lim_{t\to a} F(t) = L \qquad \lim_{t\to a} f(t) = \ell \neq 0$$

$$\Rightarrow \lim_{t\to a} \left(\frac{F}{f}\right)(t) = \frac{L}{\ell}$$

کرانه

$$\lim_{t\to a} F(t) = 0 \quad , \quad \exists\, M ,\ \delta > 0 \Rightarrow 0<|t-a|<\delta$$

$$\Rightarrow |f(t)| < M$$

زیرا

کرد

$$\Rightarrow \lim_{t\to a} (fF)(t) = 0$$

اثبات: (هنگامیکه $t\to a$)

$$\lim F(t) = 0 \Rightarrow \forall i \ \lim F_i(t) = 0$$

قضیه برای تابعهای حقیقی

$$\Rightarrow \forall i : \lim (fF_i)(t) = 0$$

$$\Rightarrow \forall i \lim (fF)_i (t) = 0 \Rightarrow \lim (fF)(t) = 0$$

$$\lim_{t\to a} f(t) = l$$ f، l عدد،

F بردار،

طول بردار،

$$,\exists M, \delta>0 \ni 0<|t-a|<\delta \Rightarrow |F|<M$$

بردار، عدد

با اثبات مشابه،
حالت قبل

$$\Rightarrow \lim_{t\to a} (fF)(t) = 0$$

اگر: f (عدد) و F (بردار)،
یکی حد داشته باشد و دیگری (در یک همسایگی محذوف) کراندار باشد، (fF) حد دارد و حدش صفر است.

اگر بر فضای برداری ضرب درونی تعریف کرده باشیم، (یا به کلی معمولی، فضای حقیقی)

$$F \cdot G = \sum_i F_i G_i :$$

$$\lim_{t \to a} F(t) = L \qquad \lim_{t \to a} G(t) = M$$

F و G و L و M برداری،

$$\overset{?}{\Longrightarrow} \lim_{t \to a} (F \cdot G)(t) = L \cdot M$$

اثبات: مانند قبلی:

$$F \cdot G = F_1 G_1 + \cdots + F_n G_n$$

$$\lim_{t \to a} F(t) = L \ , \ \lim_{t \to a} G(t) = M \Rightarrow$$

$$\forall i \quad \lim_{t \to a} F_i(t) = L_i \ , \ \lim_{t \to a} G_i(t) = M_i$$

F_i و G_i و L_i و M_i ها،

$$\Rightarrow \lim_{t \to a} (F_i G_i)(t) = L_i M_i \Rightarrow$$

$$\lim_{t \to a} \sum_i (F_i G_i)(t) = \sum_i L_i M_i$$

$$\Longrightarrow \lim_{t\to a} (F\cdot G)(t) = L\cdot M$$

در فضای سه بعدی می‌شود ضرب برداری هم تعریف کرد:

برای بردارهای u و v : حاصل‌ضرب برداری u در v را با $u\times v$ نشان می‌دهیم، با این ویژگی‌ها: $u\times v$ بردار است

$u\times v$ نسبت به u خطی است:

$$(\alpha u+\alpha' u')\times v = \alpha\,(u\times v)+\alpha'\,(u\times v')$$

$u\times v$ نسبت به v خطی است.

$$u\times(\alpha v+\alpha' v') = \alpha(u\times v)+\alpha'(u\times v')$$

ضرب برداری هر بردار در خودش صفر:

$$\forall u: \quad u\times u=0$$

از اینجا نتیجه میشود ضرب برداری پاد متقارن است:

$$v\times u + u + v = 0$$

اثبات:

$$0=(u+v)\times(u+v) \overset{\text{خطی بودن}}{=} \underbrace{u\times u}^{\text{صفر}} + u\times v+v\times u+\overbrace{v\times v}^{\text{صفر}}$$

$$= u\times v + v + u \quad \checkmark$$

خطی بودن نسبت به u و v

$$(u \times v)_i = \sum_{j,k} \varepsilon_{ijk} u_j v_k$$

اسم ضریب‌های بسط

$$(u \times u)_i = 0 = \sum_{j,k} \varepsilon_{ijk} u_j u_k$$

از جمله اگر $u_j = \delta_{j1}$

$$(u \times u)_i = 0 = \varepsilon_{i11}$$

پس $\varepsilon_{i11} = 0$

مشابه $\varepsilon_{i33} = \varepsilon_{i22} = 0$

ε مستقل از u و v است.

$(u \times v)$ نسبت به u , v پادمتقارن است.

$$(v \times u)_i = -(u \times v)_i$$

$$\sum_{j,k} \varepsilon_{ijk} v_j u_k = -\underbrace{\sum_{j,k} \varepsilon_{ijk} u_j v_k}$$

جای ضرب‌ها، جمع‌بندی‌ها را عوض کردیم.

$$= \sum_{j,k} \varepsilon_{ijk} v_j u_k = -\sum_{j,k} \varepsilon_{ikj} u_k v_j$$

$$\sum_{j,k} (\varepsilon_{ijk} + \varepsilon_{ikj}) v_j u_k = 0$$ برای هر u, v

از جمله: $v_j=\delta_{j2}$ ، $u_k=\delta_{k1}$

$$0=\varepsilon_{i21}+\varepsilon_{i12}$$

مشابه:

$$0=\varepsilon_{i23}+\varepsilon_{i32}$$

$$0=\varepsilon_{i13}+\varepsilon_{i31}$$

$$\varepsilon_{ikj}=-\varepsilon_{ijk} \qquad \forall\ i,j,k$$

ε نسبت به شاخص‌های دوم و سوم پادمتقارن است.

$(u\times v)$ خطی نسبت به u و v و پادمتقارن باشه $\Leftarrow$

$$\varepsilon_{ikj} = -\varepsilon_{ijk}$$

یک شرط اضافی بر $u\times v$:

$$u\cdot(u\times v) = 0$$

ضرب درونی:

در یک پایه ی یکه متعامد:

$$u\cdot(u\times v) = \sum_i u_i\,(u\times v)_i$$

$$u\cdot(u\times v)=\sum_{i,j,k}\varepsilon_{ijk}\,u_i u_j v_k=0$$

مشابه با اثباتی که برای صفر شدن $(\varepsilon_{ijk}+\varepsilon_{ikj})$ به کار رفت:

$$\varepsilon_{ijk}+\varepsilon_{jik}=0$$

ε نسبت به دو شاخص اول هم پادمتقارن است.

اما: $u\cdot(v\times u)=-u\cdot(u\times v)=0$

پس: $u\cdot(v\times u)=0$

$$u \cdot (v \times u) = 0$$

که به قبل نتیجه میشود

$$\varepsilon_{ijk} + \varepsilon_{kji} = 0$$

ε نسبت به شاخص‌های اول و سوم هم پادمتقارن است.

$$(u \times v)_i = \sum_{j,k} \varepsilon_{ijk} u_j v_k$$

نتیجه‌ی کلی (با جابجایی‌ها یک به یک متقارن)

ε کاملاً پادمتقارن است: جای هر دو شاخص با هم عوض شود ε قرینه میشود.