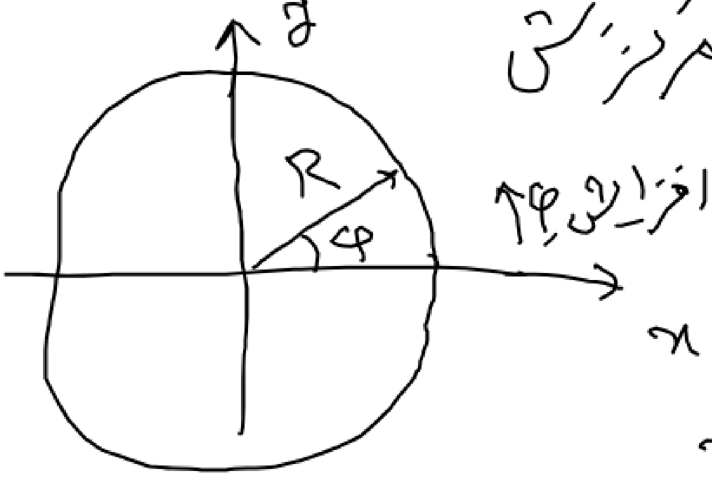
مشتق گیری از تابعهای یک متغیری با مقدار برداری

$$F(t) = \sum_i F_i(t)\, e_i(t)$$

$$F'(t) = \sum_i F_i'(t)\, e_i(t) + \sum_i F_i(t)\, e_i'(t)$$

مثال: حرکت بر یک دایره:



یک دایره به شعاع R که مرکزش مبدأ است.

مکان بر این دایره با یک زاویه‌ی φ مشخص می‌شود.

مختصات قطبی: r فاصله از مبدأ

φ زاویه‌ی بردار مکان با جهت مثبت محور x (مثلثاتی، یعنی پادساعتگرد)

رابطه‌ی مختصات دکارتی با مختصات قطبی :

$x = \rho \cos\varphi$

$y = \rho \sin\varphi$

بردار مکان : r

$r = x\hat{x} + y\hat{y}$

$= (\rho\cos\varphi)\hat{x} + (\rho\sin\varphi)\hat{y}$

برای حرکت بردارهای که مرکزشان مبدأ و شعاعشان R است ،

$\rho = R =$ ثابت

بردار $r(t)$ را برحسب $\hat{x}, \hat{y}$

پس در این حالت :

$$r(t) = \{R\cos[\varphi(t)]\}\,\hat{x} + \{R\sin[\varphi(t)]\}\,\hat{y}$$

t و φ و R کرد.

مشتق گیری نسبت به t

R و $\hat{x}$ و $\hat{y}$ ثابت‌اند.

$$v = \dot{r} = -(R\sin\varphi)\,\dot{\varphi}\,\hat{x} + (R\cos\varphi)\,\dot{\varphi}\,\hat{y}$$

بردار سرعت

بردار شتاب

$$a = \dot{v} = -(R\cos\varphi)(\dot{\varphi})^2\,\hat{x} - (R\sin\varphi)(\dot{\varphi})^2\,\hat{y}$$
$$- (R\sin\varphi)\,\ddot{\varphi}\,\hat{x} + (R\cos\varphi)\,\ddot{\varphi}\,\hat{y}$$

$$v = (R\dot{\varphi})(-\hat{x}\sin\varphi + \hat{y}\cos\varphi)$$

$$a = -(R\dot{\varphi}^2)(\hat{x}\cos\varphi + \hat{y}\sin\varphi) + (R\ddot{\varphi})(-\hat{x}\sin\varphi + \hat{y}\cos\varphi)$$

$$r = R(\hat{x}\cos\varphi + \hat{y}\sin\varphi)$$

$$\hat{e}_\rho = \hat{x}\cos\varphi + \hat{y}\sin\varphi \qquad \hat{x} = \hat{e}_x$$

$$\hat{e}_\varphi = -\hat{x}\sin\varphi + \hat{y}\cos\varphi \qquad \hat{y} = \hat{e}_y$$

$\hat{e}_x$ و $\hat{e}_y$ ثابتند، $\hat{e}_\rho$ و $\hat{e}_\varphi$ ثابت نیستند (تابع φ اند).

$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_y$: مشتقة f بالنسبة لـ x
و y ثابتة

هنعرف $e_x, e_y, e_\rho, e_\varphi$

$$r = \hat{x}\,x + \hat{y}\,y = f(x, y)$$

$$f(x+\Delta x, y) = \hat{x}(x+\Delta x) + \hat{y}\,y$$

$$f(x+\Delta x, y) - f(x, y) = \hat{x}\,\Delta x \quad = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_y$$

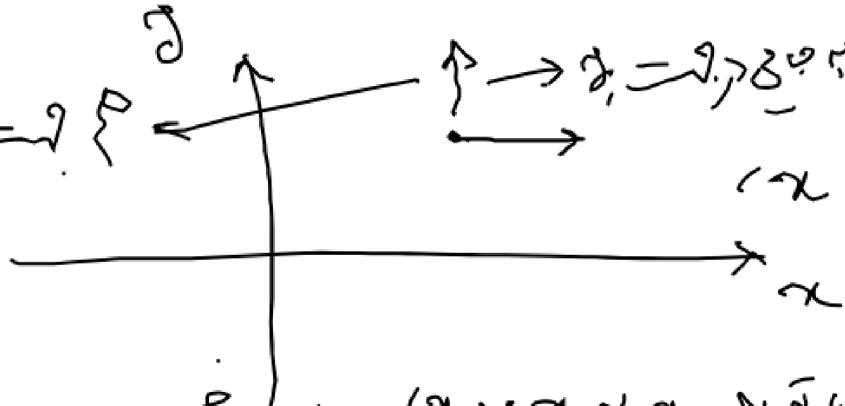
$$\hat{x} = \frac{f(x+\Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x} \quad = \frac{\partial f}{\partial x}$$

$$\hat{x} = \lim_{\Delta \to} \frac{f(x+\Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x} = \frac{\partial\, f(x, y)}{\partial x}$$

$$f(x,y) = \hat{x}\,x + \hat{y}\,y$$

$$f(x, y+\Delta y) - f(x,y) = \hat{y}\,\Delta y$$

$$\hat{y} = \frac{f(x, y+\Delta y) - f(x,y)}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x,y+\Delta y) - f(x,y)}{\Delta y}$$



جابجایی در راستای y

$\hat{y}$: مثبت

جابجایی در راستای x

$\hat{x}$: مثبت

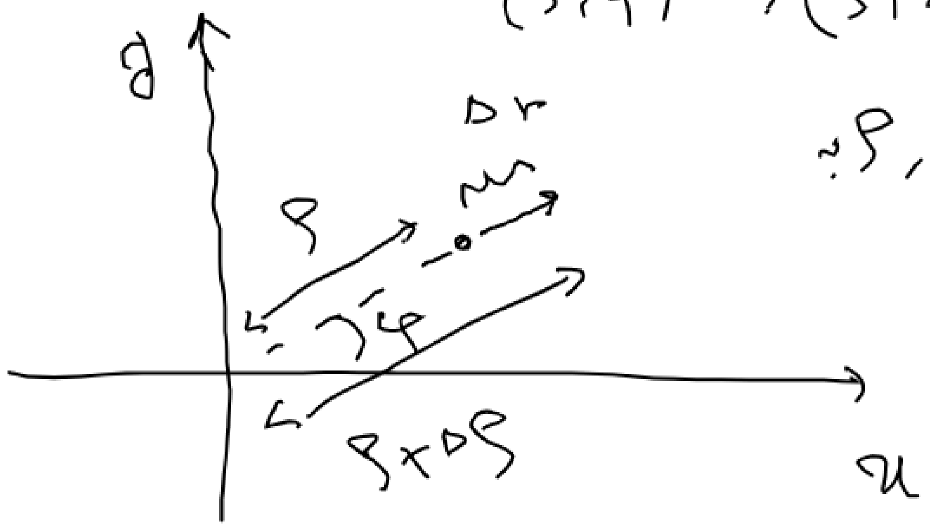
$$\frac{f(x+\Delta x, y) - f(x,y)}{\Delta x} = $$ ($x+\Delta x \approx x$، جابجایی بینهایت کوچک) است: $= \hat{x}$

$r = g(\rho,\varphi) = f(x,y)$

مثلاً: جابجایی به اندازه‌ی $\Delta\rho$ و جابجایی به اندازه‌ی $\Delta\varphi$

$(\rho,\varphi) \longrightarrow (\rho+\Delta\rho,\varphi)$

جابجایی یعنی تبدیل ρ به $(\rho+\Delta\rho)$



$$\Delta r = (\rho+\Delta\rho)(\cos\varphi)\,\hat{x} + (\rho+\Delta\rho)(\sin\varphi)\,\hat{y} - \left[(\rho\cos\varphi)\,\hat{x} + (\rho\sin\varphi)\,\hat{y}\right]$$

$$\left(\frac{\Delta r}{\Delta \rho}\right)_{\varphi} = (\cos\varphi)\,\hat{x} + (\sin\varphi)\,\hat{y}$$

در φ ی ثابت

بردار یکه ی شعاعی :

جهت این بردار، جهت بردار جابجایی به خاطر تغییر ρ

(φ ی ثابت) است.

$$\hat{\rho} = \hat{x}\cos\varphi + \hat{y}\sin\varphi$$

$$\hat{\rho}\cdot\hat{\rho} = \cos^2\varphi + \sin^2\varphi = 1$$

$$\hat{x}\cdot\hat{x} = 1$$
$$\hat{y}\cdot\hat{y} = 1$$
$$\hat{x}\cdot\hat{y} = 0$$

$$\hat{\rho} = \left(\frac{\Delta r}{\Delta \rho}\right)_\varphi = \lim_{\Delta\rho\to 0} \left(\frac{\Delta r}{\Delta\rho}\right)_\varphi = \left(\frac{\partial r}{\partial\rho}\right)_\varphi$$

$$= \frac{\partial[g(\rho,\varphi)]}{\partial\rho} = \left(\frac{\partial g}{\partial\rho}\right)_\varphi$$

با انواع نمادهای مختلف

$$r = g(\rho, \varphi)$$

اینجا هم Δr با $\Delta\rho$ متناسب است پس فرق نمی‌کنه

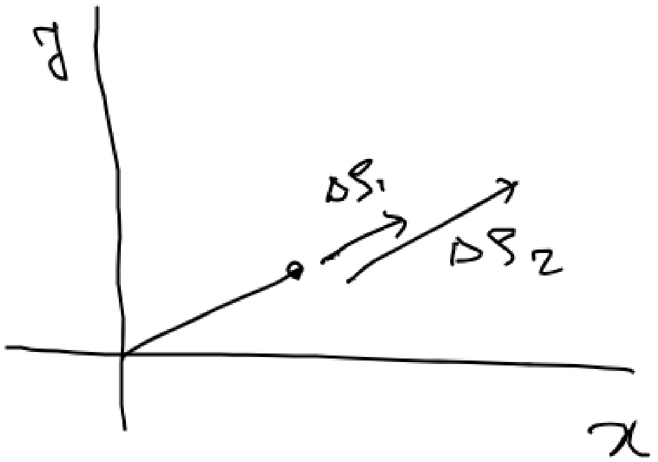
مگر $(\Delta\rho \to 0)$ گرفته بشود.

با φ ی ثابت

جابه‌جایی متناظر با

$\Delta\rho_1$ و $\Delta\rho_2$

هم جهت اند ($\Delta\rho_1$ و $\Delta\rho_2$ مثبت)

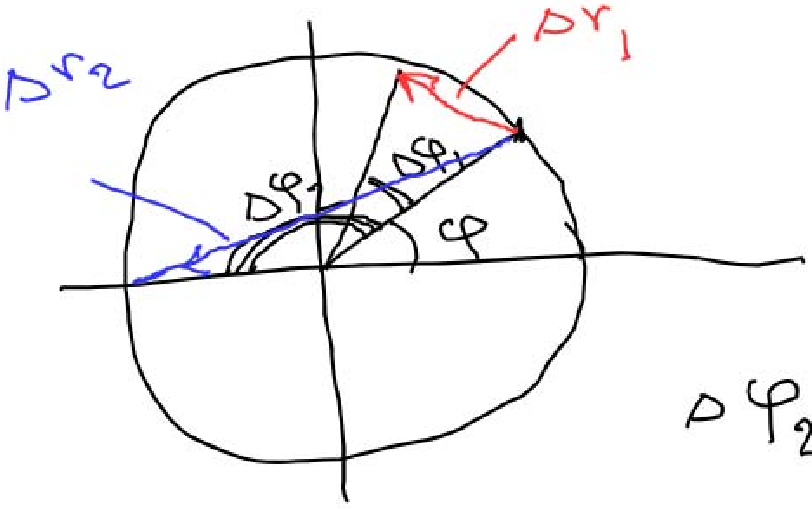


برای Δx و Δy هم مثل این بود :

فقط Δx یا Δy در تغییر دیگری ثابت. جهت جابجایی را عوض نمیکرد.

برای φ چنین نیست: جهت جابجایی به مقدار $\Delta\varphi$ بستگی دارد:

r ثابت



Δr_1 : جابجایی برای $\Delta\varphi_1$

Δr_2 : جابجایی برای $\Delta\varphi_2$

بردارهای سرعت دو آنی هم‌جهت نیستند، هم‌راستا هم نیستند.

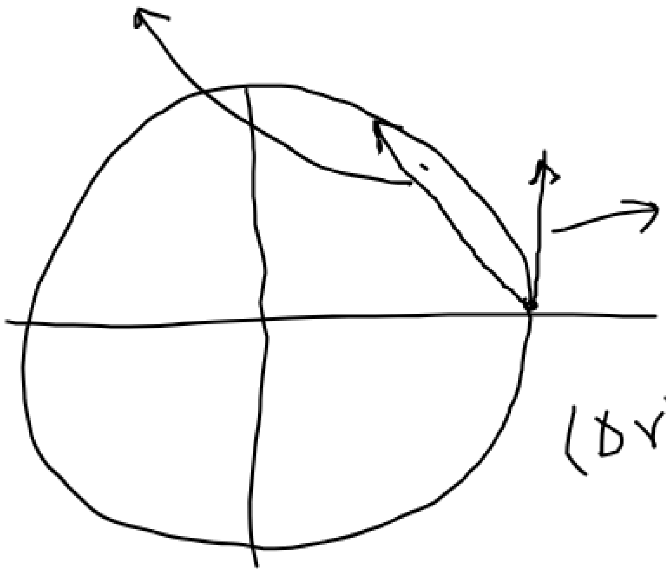
$$r = (\rho \cos\varphi)\,\hat{x} + (\rho \sin\varphi)\,\hat{y}$$

$$(\Delta r)_\rho = \rho\left[\cos(\varphi+\Delta\varphi) - \cos\varphi\right]\hat{x} + \rho\left[\sin(\varphi+\Delta\varphi) - \sin\varphi\right]\hat{y}$$

با تغییر $(\Delta\varphi)$، جهت $(\Delta r)_\rho$ عوض می‌شود.

برخلاف مثال‌های قبلی، اگر $(\Delta r)_\rho$ را بر $(\Delta\varphi)$ تقسیم کنیم،
$(\Delta\varphi)$ حذف نمی‌شود. به همین خاطر است که جهت $(\Delta r)_\rho$ به $\Delta\varphi$ وابسته است.

جابه‌جایی به ازای $\Delta\varphi$ ی کوچک:



$\Delta\varphi$ که کوچک شود، البته $(\Delta r)_p$ کوچک میشود، ولی جهت $(\Delta r)_p$ به جهت مماس نزدیک میشود.

پس $\Delta\varphi = 0$ ، جهت $(\Delta r)_\rho$ حساب شود.

اما این نمی‌شود: وقتی $\Delta\varphi = 0$ ، نتیجه $(\Delta r)_\rho = 0$

بردار صفر هم جهت معینی ندارد.

چاره: مشتق گیری. اول $(\Delta r)_\rho$ بر $(\Delta\varphi)$ تقسیم شود، بعد $\Delta\varphi \to 0$.

$$e_\varphi = \lim_{\Delta\varphi \to 0} \frac{(\Delta r)_\rho}{(\Delta\varphi)} = \left(\frac{\partial r}{\partial\varphi}\right)_\rho = \frac{\partial[g(\rho,\varphi)]}{\partial\varphi} = \left(\frac{\partial g}{\partial\varphi}\right)_\rho$$

محاسبه‌ی e_φ :

$$r = (\rho \cos\varphi)\,\hat{x} + (\rho \sin\varphi)\,\hat{y} =: g(\rho,\varphi)$$

مشتق از این نسبت به φ در ρ ی ثابت =

ρ ، $\hat{x}$ ، $\hat{y}$ ثابت .

$$\frac{\partial [g(\rho,\varphi)]}{\partial \varphi} = -(\rho \sin\varphi)\,\hat{x} + (\rho \cos\varphi)\,\hat{y}$$

$$e_\varphi = -(\rho \sin\varphi)\,\hat{x} + \rho \cos(\varphi)\,\hat{y}$$

طول e_φ:

$$e_\varphi \cdot e_\varphi = (\rho\cos\varphi)^2 + (\rho\sin\varphi)^2 = \rho^2$$

طول e_φ یک نیست.

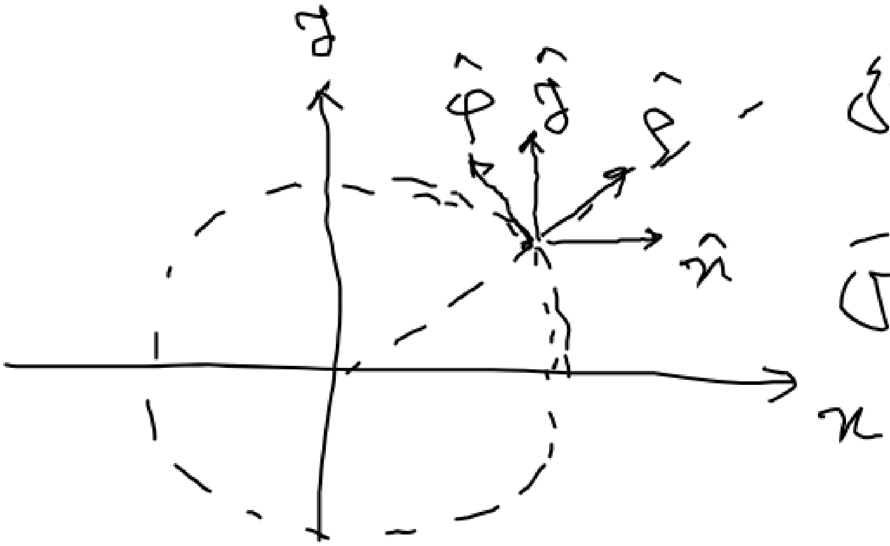
$$\|e_\varphi\| = \rho$$

$\hat{e}_\varphi$ بردار یکه‌ی هم‌جهت با e_φ

$$\hat{e}_\varphi = \frac{e_\varphi}{\|e_\varphi\|} = \frac{e_\varphi}{\rho} = -\hat{x}\cos\varphi + \hat{y}\sin\varphi$$

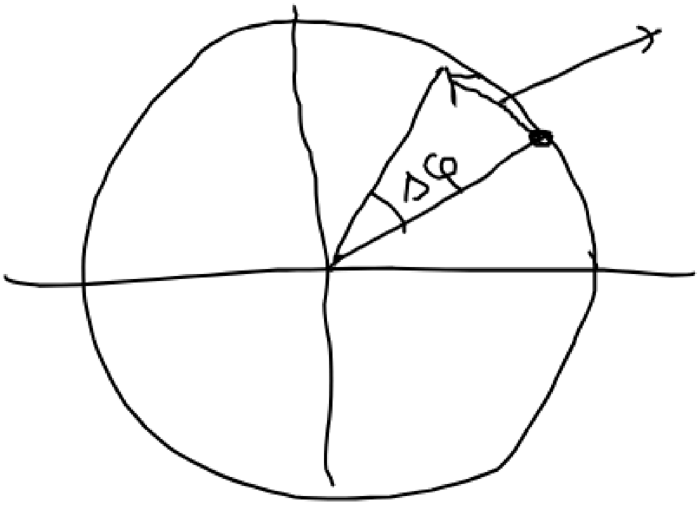
$$\hat{\rho} = \hat{e}_\rho = e_\rho = \hat{x}\cos\varphi + \hat{y}\sin\varphi$$

$$\hat{\varphi} = \hat{e}_\varphi = \frac{1}{\rho} e_\varphi = -\hat{x}\sin\varphi + \hat{y}\cos\varphi$$



$\hat{\rho}$: بردار یکه‌ی شعاعی

$\hat{\varphi}$: بردار یکه‌ی سمتی



$(\Delta r)_\varphi$

جابجایی با $\Delta\varphi$

(r ثابت)

این بردار جابجایی وتر دایره است.

$\Delta\varphi \to 0$: جهت وتر به جهت مماس میل میکند.

تغییر φ: حرکت مماسی | تغییر r : حرکت شعاعی

$$r = \hat{x}\, x + \hat{y}\, y = \hat{x}\, \rho \cos\varphi + \hat{y}\, \rho \sin\varphi$$

$$\rho = R \quad ($$ [illegible] $$)$$

$$r = \hat{x}\, R \cos\varphi + \hat{y}\, R \sin\varphi = R\, \hat{\rho}$$

$$v = (R\dot{\varphi}) \left(-\hat{x} \sin\varphi + \hat{y} \cos\varphi \right) = R\dot{\varphi}\, \hat{\varphi}$$

$$a = (R\dot{\varphi}^2) \left(-\hat{x} \cos\varphi - \hat{y} \sin\varphi \right) + R\ddot{\varphi} \left(-\hat{x} \sin\varphi + \hat{y} \cos\varphi \right)$$

$$= (R\dot{\varphi}^2)(-\hat{\rho}) + (R\ddot{\varphi})\, \hat{\varphi}$$

از همان ابتدا، می‌نویسیم برحسب $\hat{\rho}$ و $\hat{\varphi}$:

همچنان حرکت دایره‌ای: R ثابت است.

$$r = R\,\hat{\rho}$$

R ثابت $\overset{?}{\Longrightarrow}$ مشتق r صفر است؟

نه، چون $\hat{\rho}$ ثابت نیست.

فاصله تا مبدأ عوض نمی‌شود،

$$v = \frac{dr}{dt} = R\,\frac{d\hat{\rho}}{dt}$$

اما جهت مکان عوض می‌شود، پس سرعت صفر نیست.

$$\frac{d\hat{\rho}}{dt} = ? \qquad \hat{\rho} = \hat{x}\cos\varphi + \hat{y}\sin\varphi$$

$\hat{x}$ و $\hat{y}$ ثابتند، φ وابسته به زمان است:

$$\frac{d\hat{\rho}}{dt} = \frac{d\hat{\rho}}{d\varphi}\,\frac{d\varphi}{dt}$$

زنجیره‌ای مشتق‌گیری

$$\frac{d\varphi}{dt} =: \dot{\varphi} \qquad \frac{d\hat{\rho}}{d\varphi} = -\hat{x}\sin\varphi + \hat{y}\cos\varphi = \hat{\varphi}$$

$$\frac{d\hat{\rho}}{d\varphi} = \hat{\varphi} \qquad \frac{d\hat{\rho}}{dt} = \hat{\varphi}\,\dot{\varphi}$$

$$v = \frac{d}{dt}(R\hat{\rho}) = R\frac{d\hat{\rho}}{dt} = R(\hat{\varphi}\dot{\varphi})$$

$$v = (R\dot{\varphi})\hat{\varphi} \qquad \|v\|^2 = v \cdot v = (R\dot{\varphi})^2$$

$$\|v\| = |R\dot{\varphi}| = R|\dot{\varphi}|$$ R مثبت است.

ادامه:

$$a = \frac{dv}{dt} = \left[\frac{d}{dt}(R\dot{\varphi})\right]\hat{\varphi} + R\dot{\varphi}\,\frac{d\hat{\varphi}}{dt}$$

$$\frac{d}{dt}(R\dot{\varphi}) = R\ddot{\varphi}$$ R ثابت است.

$$\frac{d\hat{\varphi}}{dt} = \frac{d\hat{\varphi}}{d\varphi}\frac{d\varphi}{dt} \qquad \hat{\varphi} = -\hat{x}\sin\varphi + \hat{y}\cos\varphi$$

زنجیری

$\hat{\varphi}$ نسبت φ ، φ نسبت t

$$\frac{d\hat{\varphi}}{d\varphi} = -\hat{x}\cos\varphi - \hat{y}\sin\varphi = -\hat{\rho}$$

$$\frac{d\hat{\varphi}}{dt} = -\hat{\rho}\,\dot{\varphi} \qquad \frac{d\hat{\rho}}{dt} = \hat{\varphi}\,\dot{\varphi}$$

$$\frac{d\hat{\varphi}}{d\varphi} = -\hat{\rho} \qquad \frac{d\hat{\rho}}{d\varphi} = \hat{\varphi}$$

شتاب مماسی

شتاب شعاعی (یا مرکزگرا، به سوی مرکز)

$$a = R\ddot{\varphi}\,\hat{\varphi} - (R\dot{\varphi}^2)\,\hat{\rho}$$

$\hat{\rho}$: جهت شعاعی (دور شونده از مرکز)

$$v = (R\dot{\varphi})\,\hat{\varphi}$$

$\hat{\varphi}$: جهت مماسی

$$r = R\hat{\rho}$$

سرعت مماس بر دایره (مسیر) است.

شتاب را میتوان در جهت ۲ بخش نوشت.

برای حرکت بر دایره، شتاب مرکزگرا همیشه هست (مگر سرعت صفر باشد). اندازه‌ی این شتاب $R\dot{\varphi}^2$ است، که برابر است با $\frac{\|v\|^2}{R} = \frac{(R\dot{\varphi})^2}{R}$ سرعت مماسی است.

مقدار شتاب مماسی $R\ddot{\varphi}$ است. شتاب مماسی با سرعت هم‌جهت است، اگر مشتق $\|v\|$ مثبت باشد؛ و بر خلاف جهت سرعت است، اگر مشتق $\|v\|$ منفی باشد.

در حرکت بر خط راست، اگر اندازه‌ی سرعت بر حسب زمان صعودی باشه شتاب و سرعت هم‌جهت اند!

اگر اندازه‌ی سرعت بر حسب زمان نزولی باشه شتاب و سرعت برخلاف جهت هم اند.

اینجا رابطه ای مشابه بین شتاب مماسی و سرعت هست

حالت کلی: حرکت لزوماً بر دایره نیست، اما قرار است بر حسب مختصات قطبی بررسی شود.

دکارتی: $r = \hat{x} x + \hat{y} y$

قطبی: $r = \hat{\rho} \rho + \hat{\varphi} \varphi$

این رابطه درست نیست

یک راه سریع دیدن این که این رابطه درست نیست، تحلیل ابعادی است: $\hat{\varphi}$ و $\hat{\rho}$ یکه‌اند، یعنی بی‌بعدند. ρ بعد طول دارد، φ بی‌بعد است.

$$\underbrace{r}_{\text{تغییر طول}} = \underbrace{\hat{\rho}\,\rho}_{\text{تغییر طول}} + \underbrace{\hat{\varphi}\,\varphi}_{\text{تغییر جهت}}$$

در این رابطه‌ی نادرست

$$r = \hat{x}\,x + \hat{y}\,y = \hat{x}\,\rho\cos\varphi + \hat{y}\,\rho\sin\varphi$$

$$= \rho\,(\hat{x}\cos\varphi + \hat{y}\sin\varphi)$$

$$r = \hat{\rho}\,\rho$$

برخلاف حرکت دایره‌ای، ρ در اینجا ثابت نیست.

$$v = \dot{r} = \frac{dr}{dt} = \frac{d\hat{\rho}}{dt}\rho + \hat{\rho}\frac{d\rho}{dt}$$

$$\frac{d\rho}{dt} = \dot{\rho} \qquad \frac{d\hat{\rho}}{dt} = \frac{d\hat{\rho}}{d\varphi}\frac{d\varphi}{dt} = \hat{\varphi}\dot{\varphi}$$

$$v = \hat{\rho}\dot{\rho} + \hat{\varphi}\rho\dot{\varphi}$$

$\dot{\rho} = 0$ אם רדיוס קבוע

$$a = \dot{v} = \frac{dv}{dt} = \frac{d\hat{\rho}}{dt}\dot{\rho} + \hat{\rho}\frac{d\dot{\rho}}{dt} + \frac{d\hat{\varphi}}{dt}\rho\dot{\varphi} + \hat{\varphi}\frac{d\rho}{dt}\dot{\varphi} + \hat{\varphi}\rho\frac{d\dot{\varphi}}{dt}$$

$$\frac{d\hat{\varphi}}{dt} = \frac{d\hat{\varphi}}{d\varphi}\frac{d\varphi}{dt} = -\hat{\rho}\dot{\varphi}$$

$$a = \hat{\varphi}\dot{\varphi}\dot{\rho} + \hat{\rho}\ddot{\rho} - \hat{\rho}\dot{\varphi}\rho\dot{\varphi} + \hat{\varphi}\dot{\rho}\dot{\varphi} + \hat{\varphi}\rho\ddot{\varphi}$$

$$r = \hat{\rho}\,\rho$$

$$v = \hat{\rho}\,\dot{\rho} + \hat{\varphi}\,\rho\,\dot{\varphi}$$

$$a = \hat{\rho}\left(\ddot{\rho} - \rho\dot{\varphi}^2\right) + \hat{\varphi}\left(\rho\ddot{\varphi} + 2\dot{\rho}\dot{\varphi}\right)$$

برای مسیر دایره، $\dot{\rho}$ و $\ddot{\rho}$ صفرند، و $R=\rho$ (شعاع دایره)

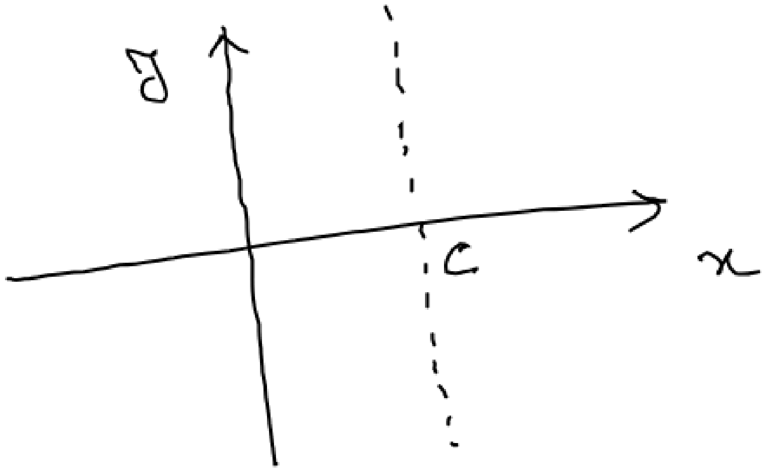
(رو به مرکز یعنی)

مثال: بررسی حرکت بر یک خط راست بر حسب مختصات قطبی

حالت با ۰:

$x(t) = c > 0$

y تابع t است.



$r = \hat{x} c + \hat{y} y$

تنها y است که به t بستگی دارد.

$$x = \rho \cos\varphi \qquad \rho = \sqrt{x^2+y^2} \qquad \cos\varphi = \frac{x}{\rho} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$y = \rho \sin\varphi \qquad \tan\varphi = \frac{y}{x} \qquad \sin\varphi = \frac{y}{\rho} = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

مثال: $x = c$

$$\tan\varphi = \frac{y}{c}$$

$$\rho = \sqrt{c^2+y^2} \qquad y = c\tan\varphi$$

$$\rho = \sqrt{c^2 + c^2\tan^2\varphi} = c\sqrt{1+\tan^2\varphi}$$

با فرض

$$\cos\varphi > 0 \quad , -\pi/2 < \varphi < \pi/2 \quad , c > 0$$

$$\rho = \frac{c}{\cos\varphi}$$

$$r = \hat{x}x + \hat{y}y = \hat{\rho}\rho$$

$\hat{\rho}$ تابع φ

در این مسئله:

$$\rho = \frac{c}{\cos\varphi}$$

$$r = \hat{\rho}\,\frac{c}{\cos\varphi} \qquad v = \frac{dr}{dt} = \frac{d\hat{\rho}}{dt}\,\frac{c}{\cos\varphi} + \hat{\rho}\frac{d}{dt}\left(\frac{c}{\cos\varphi}\right)$$

$$v = \hat{\varphi}\dot{\varphi}\frac{c}{\cos\varphi} + \hat{\rho}\,\frac{c\sin\varphi}{\cos^2\varphi}\dot{\varphi}$$

$$v = \frac{c\dot{\varphi}}{\cos^2\varphi}\left(\hat{\rho}\sin\varphi + \hat{\varphi}\cos\varphi\right)$$

$$\hat{\rho} = \hat{x}\cos\varphi + \hat{y}\sin\varphi$$

$$\hat{\varphi} = -\hat{x}\sin\varphi + \hat{y}\cos\varphi$$

$$\hat{\rho}\sin\varphi + \hat{\varphi}\cos\varphi = \hat{y}$$

$$v = \frac{c\,\dot{\varphi}}{\cos^2\varphi}\,\hat{y}$$

$$y = c\tan\varphi$$

$$\dot{y} = \frac{c}{\cos^2\varphi}\,\dot{\varphi}$$

$$v = \hat{y}\,\dot{y} \xleftarrow{\frac{d}{dt}} r = \hat{x}c + \hat{y}\,y$$

در این مثال مختصات دکارتی بهتر و راحت‌تر است.

این برای تمرین، لطفاً محاسبه را ادامه دهید و کتاب را بر حسب مختصات قطبی $\hat{r}$ و $\hat{\varphi}$ حساب کنید.

البته نتیجه با محاسبه‌ی حاصل از مختصات دکارتی باید برابر باشد:

$$a = \hat{z}\,\ddot{z}$$