ثابت

دایره‌ای به شعاع $R$ و مرکز $C$:

$$C = c_1 \hat{x} + c_2 \hat{y} \qquad r = x\hat{x} + y\hat{y}$$

$$x = c_1 + R\cos\varphi$$

$$y = c_2 + R\sin\varphi$$

$$v = \frac{dr}{dt} = R\dot{\varphi}\left(-\hat{x}\sin\varphi + \hat{y}\cos\varphi\right)$$

$$\left(\frac{dv}{dt}\right) = R\ddot{\varphi}\left(-\hat{x}\sin\varphi + \hat{y}\cos\varphi\right) - R\dot{\varphi}^2\left(\hat{x}\cos\varphi + \hat{y}\sin\varphi\right)$$

$$\left(\frac{dv}{dt}\right)_\perp = \frac{dv}{dt} - v\frac{v\cdot\frac{dv}{dt}}{v\cdot v}$$

$$v\cdot\frac{dv}{dt} = \left[R\dot{\varphi}\left(-\hat{x}\sin\varphi + \hat{y}\cos\varphi\right)\right]$$

$$\cdot\left[R\ddot{\varphi}\left(-\hat{x}\sin\varphi + \hat{y}\cos\varphi\right) - R\dot{\varphi}^2\left(\hat{x}\cos\varphi + \hat{y}\sin\varphi\right)\right]$$

$$\left(-\hat{x}\sin\varphi + \hat{y}\cos\varphi\right) = e_2 \,;\, e_1 = \left(\hat{x}\cos\varphi + \hat{y}\sin\varphi\right)$$

$$e_1\cdot e_1 = 1 \,,\quad e_2\cdot e_2 = 1 \quad e_1\cdot e_2 = 0$$

$$v\cdot\frac{dv}{dt} = R^2\dot{\varphi}\ddot{\varphi}$$

$$v \cdot v = (R\dot{\varphi})^2 \, e_2 \cdot e_2 = (R\dot{\varphi})^2$$

$$\left(\frac{dv}{dt}\right)_\perp = \frac{dv}{dt} - v \times \frac{R^2 \dot{\varphi}\ddot{\varphi}}{R^2 \dot{\varphi}^2} = \frac{dv}{dt} - \frac{\ddot{\varphi}}{\dot{\varphi}} v$$

$$\frac{\ddot{\varphi}}{\dot{\varphi}} v = R\ddot{\varphi}\left(-\hat{x}\sin\varphi + \hat{y}\cos\varphi\right)$$

$$\left(\frac{dv}{dt}\right)_\perp = -R\dot{\varphi}^2\left(\hat{x}\sin\varphi + \hat{y}\cos\varphi\right) = -R\dot{\varphi}^2 e_1$$

$$\left\|\left(\frac{dv}{dt}\right)_\perp\right\|^2 = (R\dot{\varphi}^2)^2 \, \overbrace{e_1 \cdot e_1}^{1} = (R\dot{\varphi}^2)^2$$

$$\left\| \left(\frac{dv}{dt}\right)_\perp \right\| = R\dot{\varphi}^2$$

$$\text{شعاع} \overset{?}{=} \frac{v \cdot v}{\left\| \left(\frac{dv}{dt}\right)_\perp \right\|}$$

$$v = R\dot{\varphi}\left(-\hat{i}\sin\varphi + \hat{j}\cos\varphi\right) = (R\dot{\varphi})\, e_2$$

$$v \cdot v = (R\dot{\varphi})^2 \qquad e_2 \cdot e_2 = 1$$

$$\text{شعاع} \overset{?}{=} \frac{(R\dot{\varphi})^2}{R\dot{\varphi}^2} = R \quad \checkmark$$

$$\hat{n} = \frac{\left(\frac{dv}{dt}\right)_\perp}{\left\|\left(\frac{dv}{dt}\right)_\perp\right\|} = \frac{-R\dot{\varphi}^2 e_1}{R\dot{\varphi}^2} = -e_1$$

$$e_1 = \hat{x}\cos\varphi + \hat{y}\sin\varphi$$

$$\hat{n} = -(\hat{x}\cos\varphi + \hat{y}\sin\varphi)$$

$$r + \hat{n}R \stackrel{?}{=} C$$

$$r + \hat{n}R = (\hat{x}C_1 + \hat{y}C_2) + R(\hat{x}\cos\varphi + \hat{y}\sin\varphi)$$

$$-R(\hat{x}\cos\varphi + \hat{y}\sin\varphi) = \hat{x}C_1 + \hat{y}C_2 \quad \checkmark$$

بردار یکه‌ی عمود بر خم، و شکل خم به چگونگی

پیموده شدن خم بستگی ندارند.

با عوض کردن پارامتر هم، اینها عوض نمی‌شوند.

$r(t)$ $\qquad$ $t = f(\tilde{t})$ $\qquad$ یک تابع تک

متغیره با مقدار عددی

$r[f(\tilde{t})]$

$$\frac{d}{dt} = \frac{d\tilde{t}}{dt}\,\frac{d}{d\tilde{t}}$$

از جمله، برای مثال دایره میشه متغیر را خود $\varphi$ گرفت.

$$\frac{dr}{dt}=v \qquad \tilde{v}=\frac{dr}{d\tilde{t}}=\frac{dt}{d\tilde{t}}\frac{dr}{dt}=\frac{dt}{d\tilde{t}}v$$

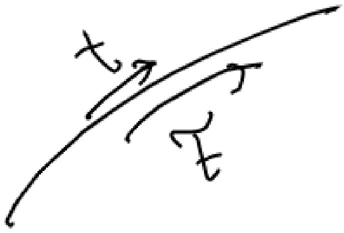
$\hat{v}$ بردار یکه‌ی مماس بر خم است.

$$t \to \tilde{t}$$

$$v \to \tilde{v}=\overbrace{\left(\frac{dt}{d\tilde{t}}\right)}^{\text{ضریب عددی}} v$$

$$\frac{dt}{d\tilde{t}}>0 \Rightarrow \hat{\tilde{v}}=\hat{v} \qquad \frac{dt}{d\tilde{t}}<0 \Rightarrow \hat{\tilde{v}}=-\hat{v}$$

اگر $\frac{dt}{dT} > 0$ ، با تغییر پارامتر سمت یکه‌ی مماس هم عوض نمی‌شود . جهت بردار سرعت هم عوض نمی‌شود .



اگر $\frac{dt}{dT} < 0$ ، با تغییر پارامتر سمت یکه‌ی مماس برعکس می‌شود ، جهت بردار سرعت برعکس می‌شود ، یا قرینه می‌شود .

از جمله برای آن داریم: پارامتر خم $\varphi$:

$$r = C + R(\hat{x}\cos\varphi + \hat{y}\sin\varphi) \qquad \dot{\varphi} \to \frac{d\varphi}{d\varphi} = 1$$

$$\frac{dr}{d\varphi} = R(-\hat{x}\sin\varphi + \hat{y}\cos\varphi) \qquad \ddot{\varphi} \to \frac{d^2\varphi}{(d\varphi)^2} = 0$$

$$= R e_2$$

$$\frac{d^2 r}{d\varphi^2} = -R(\hat{x}\cos\varphi + \hat{y}\sin\varphi) = -R e_1$$

$$\left(\frac{d^2 r}{d\varphi^2}\right)_\perp = \frac{d^2 r}{d\varphi^2} \qquad e_2 \cdot e_1 = 0$$

$$\hat{n} = \frac{\left(\frac{d^2 r}{d\varphi^2}\right)_\perp}{\left\| \left(\frac{d^2 r}{d\varphi^2}\right)_\perp \right\|}$$

$$\left\| \left(\frac{d^2 r}{d\varphi^2}\right)_\perp \right\| = |-R| = R$$

$$\hat{n} = -e_1$$

$$\rho = \frac{\frac{dr}{d\varphi} \cdot \frac{dr}{d\varphi}}{\left\| \left(\frac{d^2 r}{d\varphi^2}\right)_\perp \right\|}$$

$$\frac{dr}{d\varphi} \cdot \frac{dr}{d\varphi} = (R e_2) \cdot (R e_2) = R^2$$

$$\rho = \frac{R^2}{R} = R \quad \checkmark$$

پارامتری که محاسبات را ساده‌تر کند.

یک پارامتر: پارامتر طول خم:

$$\left\|\frac{dr}{dt}\right\| = \frac{ds}{dt} = \|v\|$$

طول (چیزی).

$$v = \frac{dr}{dt} = \frac{dr}{ds}\,\frac{ds}{dt}$$

که ر $\qquad \frac{ds}{dt} = \|v\|$

بردار. $\qquad$ بردار.

$$\frac{dr}{ds} = \frac{v}{\|v\|} = \hat{v}$$

$$\hat{v} = \frac{v}{\|v\|} = \frac{\frac{dr}{dt}}{\left\|\frac{dr}{dt}\right\|} \qquad v = \frac{ds}{dt}\,\hat{v}$$

$$\frac{dv}{dt} = \frac{d^2 s}{dt^2}\hat{v} + \frac{ds}{dt}\frac{d\hat{v}}{dt}$$

$$\hat{v}\cdot\hat{v} = 1 \longrightarrow \frac{d}{dt}(\hat{v}\cdot\hat{v}) = 0$$

$$\frac{d}{dt}(\hat{v}\cdot\hat{v}) = \frac{d\hat{v}}{dt}\cdot\hat{v} + \hat{v}\cdot\frac{d\hat{v}}{dt} = 2\hat{v}\cdot\frac{d\hat{v}}{dt}$$

برداری که طولش ثابت است، بر مشتقش عمود است: $\hat{v}\cdot\frac{d\hat{v}}{dt} = 0$

$$\frac{d\hat{v}}{dt} = \frac{d\hat{v}}{ds}\frac{ds}{dt}$$

$$\frac{d^2 r}{dt^2} = \frac{d^2 s}{dt^2}\hat{v} + \left(\frac{ds}{dt}\right)^2 \frac{d\hat{v}}{ds} = \frac{dv}{dt}$$

$$\frac{d\hat{v}}{ds} \perp \hat{v} \Rightarrow \frac{d\hat{v}}{ds} \perp v$$

$$\hat{v} \parallel v \quad \left(\frac{d^2 s}{dt^2}\hat{v}\right) \parallel v \quad \left[\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 \frac{d\hat{v}}{ds}\right] \perp v$$

$$\left(\frac{dv}{dt}\right)_\perp = \left(\frac{ds}{dt}\right)^2 \frac{d\hat{v}}{ds}$$

$$\left\|\left(\frac{dv}{dt}\right)_\perp\right\|^2 = \left(\frac{ds}{dt}\right)^4 \frac{d\hat{v}}{ds} \cdot \frac{d\hat{v}}{ds}$$

$$= \left(\frac{ds}{dt}\right)^4 \left\|\frac{d\hat{v}}{ds}\right\|^2$$

$\hat{v}$ یکه است (طولش ۱ است)

یعنی طول ۱ است.

$$\left\|\left(\frac{dv}{dt}\right)_\perp\right\| = \left(\frac{ds}{dt}\right)^2 \left\|\frac{d\hat{v}}{ds}\right\|$$

یعنی $\frac{d\hat{v}}{ds}$، $\left\|\frac{d\hat{v}}{ds}\right\|$ یعنی طول ۱ است.

$\left\| \frac{d\hat{v}}{ds} \right\| =: \kappa$ کاپّا (خمش یا انحنا)

$$\frac{d^2 r}{dt^2} = \frac{d^2 s}{dt^2}\hat{v} + \kappa \left(\frac{ds}{dt}\right)^2 \frac{\left(\frac{d\hat{v}}{ds}\right)}{\left\| \frac{d\hat{v}}{ds} \right\|}$$

$$\frac{\frac{d\hat{v}}{ds}}{\left\| \frac{d\hat{v}}{ds} \right\|} = \hat{n} \qquad \hat{n} = \frac{\left(\frac{dv}{dt}\right)_\perp}{\left\| \left(\frac{dv}{dt}\right)_\perp \right\|} = \frac{\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 \frac{d\hat{v}}{ds}}{\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 \left\| \frac{d\hat{v}}{ds} \right\|}$$

$$\frac{d^2 r}{dt^2} = \frac{d^2 s}{dt^2}\hat{v} + \kappa \left(\frac{ds}{dt}\right)^2 \hat{n}$$

$$\underset{\text{شتاب}}{a} = \frac{d^2 r}{dt^2} = \frac{d^2 s}{dt^2}\hat{v} + \kappa\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 \hat{n}$$

بر حسب $t$ :

$$\underset{\text{سرعت}}{v} = \frac{dr}{dt} = \frac{ds}{dt}\hat{v} = \|v\| \frac{ds}{dt}$$

$$a = \frac{d\|v\|}{dt}\hat{v} + \kappa \|v\|^2 \hat{n}$$

$$= a_{\parallel} + a_{\perp}$$

$a_{\parallel}$: شتاب مماسی (موازی با سرعت، مماس بر مسیر)

$a_{\perp}$: شتاب عمودی (عمود بر سرعت، مسیر)

$$a = a_{\parallel} + a_{\perp}$$

$$a_{\parallel} = \frac{d\|v\|}{dt}\hat{v}$$

$$a_{\perp} = k\|v\|^2 \hat{n}$$

$$0 \neq a_{\parallel} \Updownarrow \frac{d\|v\|}{dt} \neq 0$$

اگر اندازه‌ی بردار سرعت ثابت باشد، شتاب مماسی صفر است.

شتاب عمودی صفر است. $0 \neq \|v\|$ , $0 \neq \frac{d\hat{v}}{dt} \iff 0 \neq a_{\perp}$

اگر جهت بردار سرعت ثابت باشد، یا طول بردار سرعت ثابت باشد

$\kappa$ از جنس عکس طول است: $\kappa$ عکس شعاع دایره‌ای است.

در محاسبات دقیق ابتدا مثال حرکت دایره‌ای (دایره‌ای)

فرض کنید حرکت بر دایره‌ای است. اما همچنان که

شعاع دایره به دست آمد:

$$R = \frac{1}{\kappa}$$

که جهت عمود بر آن هم به دست آمد: $\hat{n}$

برای حرکت بر دایره، این شعاع همان شعاع دایره،

و این $\hat{n}$ همان قرینه‌ی جهت شعاع است، یعنی

$$(r + R\hat{n}) = C \longrightarrow$$ مرکز دایره

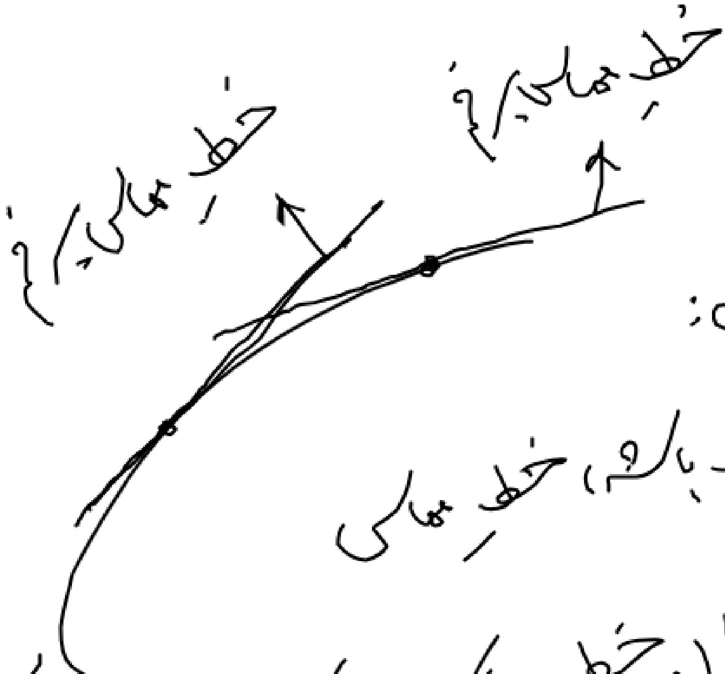
برای یک حرکت یعنی، یک دایره تعریف میشود: ← شعاع دایره

$$R = \frac{1}{\kappa} \qquad C = r + R\hat{n} \longrightarrow$$ مرکز دایره

فرق: حرکت بر دایره این است که برای حرکت بر دایره، شعاع همیشه ثابت است، مرکز هم همیشه ثابت است. اما برای یک حرکت دلخواه، متناظر با هر نقطه از خم یک شعاع و یک مرکز به دست میآید. اینها (شعاع و مرکز) در حالت کلی متغیرند.

یک مثال ساده:

یک خم و خط مماس بر آن:




اگر حرکت بر خط راست باشد، خط مماس
بر آن خط راست همان خط راست است: همه جا ثابت

اما اگر حرکت بر خط راست نباشد، در حالت کلی
خط مماس بر خم در جاهای مختلف یکسان نیست.

حرکت بر یک خم را میتوان در نزدیکی هر نقطه با حرکت
بر یک خط راست تقریب کرد؛ در آن نقطه ی خاص،
مکان خم و خط یکسان است.

مشتق اول مکان یعنی سرعت، متناظر با خم و خط یکسان است اما

حرکت بر یک خم در نزدیکی یک نقطه از خم را میشود با
حرکت بر یک دایره تقریب کرد:

مکان، مشتق اول مکان (سرعت)، و مشتق دوم مکان (شتاب)
در آن نقطه‌ی خم، با کمیت‌های متناظر با حرکت بر آن
دایره یکسان شه.

در هر نقطه از خم هموار یک دایره مماس است که خم

بر آن و آن دایره، در آن نقطه تا حد مشتق دوم یکسان است.

نزدیکترین دایره به آن خم (در نزدیکی آن نقطه).

مشخصات هندسی ی خم (بردار یکه ی مماس، بردار یکه ی عمود، شعاع خمش): تغییر پارامتر عوض نمی‌شوند (ممکن است بردار یکه ی مماس قرینه شود)

مشتق پارامتر جدید نسبت به پارامتر قدیم منفی باشد، بردار یکه ی مماس قرینه میشود.

پس با انتخاب مناسب پارامتر میتوان محاسبات را ساده کرد:

$$\frac{dr}{dt} = \left\|\frac{dr}{dt}\right\| \hat{v} = \|v\| \hat{v} \qquad \|v\| = \left\|\frac{dr}{dt}\right\| = \frac{ds}{dt}$$

$$\frac{d^2r}{dt^2} = \left(\frac{d}{dt}\left\|\frac{dr}{dt}\right\|\right)\hat{v} + \|v\| \frac{d\hat{v}}{dt}$$

قاعده زنجیره‌ای

$$= \frac{d\|v\|}{dt}\hat{v} + \underbrace{\|v\|^2 \frac{d\hat{v}}{ds}}$$

$$= \frac{d^2s}{dt^2}\hat{v} + \frac{\|v\|^2}{R}\hat{n} \qquad \frac{d\hat{v}}{ds} = \kappa\hat{n} = \frac{\hat{n}}{R}$$

اگر پارامتر را خمِ $s$ بگیریم:

$$\frac{ds}{ds}=1 \qquad \frac{d^2s}{ds^2}=0$$

$$\frac{dr}{dt}=v \qquad \|v\|=\frac{ds}{dt} \qquad \frac{v}{\|v\|}=\hat{v}$$

$$\frac{dr}{dt}=\frac{dr}{ds}\frac{ds}{dt} \qquad v=\frac{dr}{ds}\|v\|$$

$$\frac{dr}{ds}=\hat{v} \qquad \frac{d^2r}{ds^2}=\frac{d\hat{v}}{ds}=\kappa\hat{n}=\frac{\hat{n}}{R}$$

بازگشت به مثال دایره:

$$\begin{cases} x = C_1 + R\cos\varphi \\ y = C_2 + R\sin\varphi \end{cases} \qquad \hat{v} = \frac{dr}{ds}$$

معادله ی پارامتری با پارامتر $\varphi$:

برای این که از این نسبت به $s$ مشتق گرفت در

خم، $s$ لازم است. $\qquad s(\varphi)$

$$\frac{ds}{dt} = \left\| \frac{dr}{dt} \right\|$$

$t$ : هر پارامتری

$$t \to \varphi \qquad \frac{ds}{d\varphi} = \left\| \frac{dr}{d\varphi} \right\|$$

$$\frac{dr}{d\varphi} = R\left(-\hat{i}\sin\varphi + \hat{j}\cos\varphi\right)$$

$$\frac{dr}{d\varphi} \cdot \frac{dr}{d\varphi} = R^2 = \left\| \frac{dr}{d\varphi} \right\|^2 \qquad \left\| \frac{dr}{d\varphi} \right\| = R$$

$$\Rightarrow \frac{ds}{d\varphi} = R \qquad s = R\varphi + \text{ثابت}$$

بستگی خم به $\varphi$ لازم نیست: داشتن $\frac{ds}{d\varphi}$ کافی است.

$$\frac{ds}{d\varphi} = R$$

$$\frac{dr}{ds} = \frac{dr}{d\varphi}\frac{d\varphi}{ds} = R\left(-\hat{x}\sin\varphi + \hat{y}\cos\varphi\right)\frac{1}{R}$$

$$\frac{dr}{ds} = -\hat{x}\sin\varphi + \hat{y}\cos\varphi = \hat{v} = e_2$$

بردار یکه‌ی مماس بر خم

$$\frac{d^2r}{ds^2} = \frac{d\hat{v}}{ds} = \kappa\hat{n} = \frac{d\hat{v}}{d\varphi}\left(\frac{d\varphi}{ds}\right) \longrightarrow \frac{1}{R}$$

$$= \frac{1}{R}\left(-\hat{x}\cos\varphi - \hat{y}\sin\varphi\right)$$

$$\left\| \frac{d\hat{v}}{ds} \right\|^2 = \frac{1}{R^2} (-\hat{x} \cos\varphi - \hat{y} \sin\varphi) \cdot (-\hat{x} \cos\varphi - \hat{y} \sin\varphi)$$

$$= \frac{1}{R^2}$$

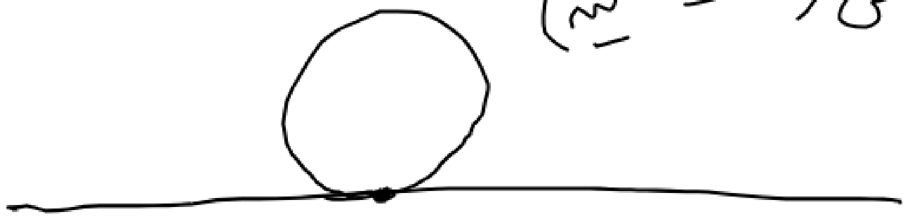
$$\left\| \frac{d\hat{v}}{ds} \right\| = \frac{1}{R} = \kappa$$

$$\hat{n} = \frac{\frac{d\hat{v}}{ds}}{\left\| \frac{d\hat{v}}{ds} \right\|} = \frac{\frac{1}{R} (-\hat{x} \cos\varphi - \hat{y} \sin\varphi)}{\frac{1}{R}}$$

$$\hat{n} = -(\hat{x} \cos\varphi + \hat{y} \sin\varphi) = -e_1$$

یک مثال از یک خم که دایره نیست:

چرخزاد: یک دایره روی یک خط راست میغلته (بدون لغزش حرکت میکنه)



یک نقطه‌ی ثابت نسبت به دایره روی یک خم حرکت میکنه.

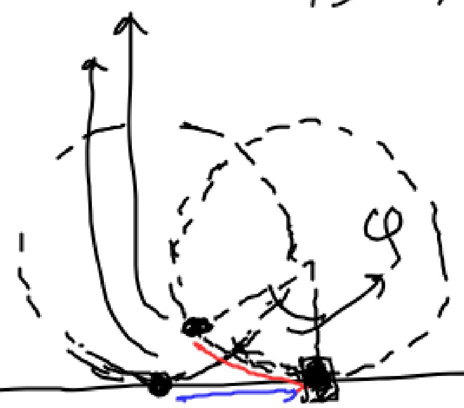
به این خم چرخزاد میگیم.

a : شعاع دایره

نقطه‌ی ثابت نسبت به دایره

معادله‌ی خم

سرخ مسیری که نقطه‌ی ثابت پیموده



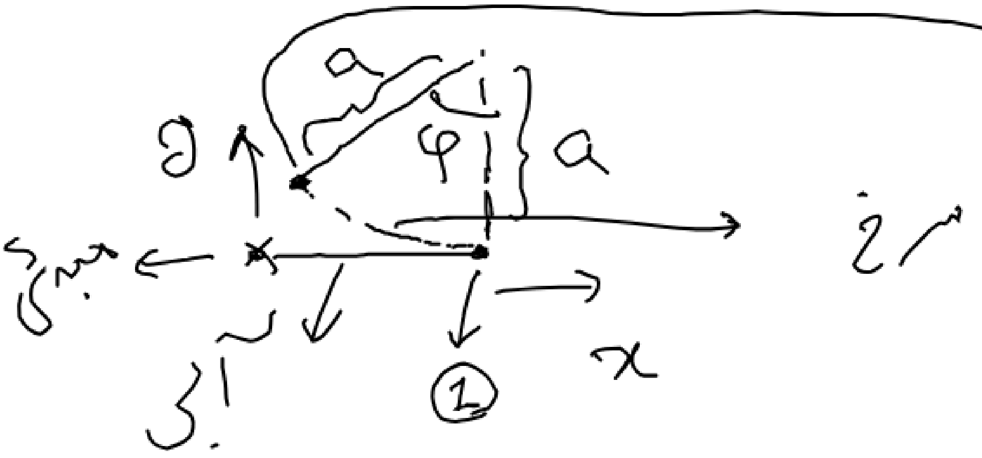

آبی: مسیری که نقطه‌ی تماس بر خط پیموده

وضع اولیه

شرط بی‌لغزش

a شعاع مسیر نیست. a ثابت است. طول آبی = طول سرخ

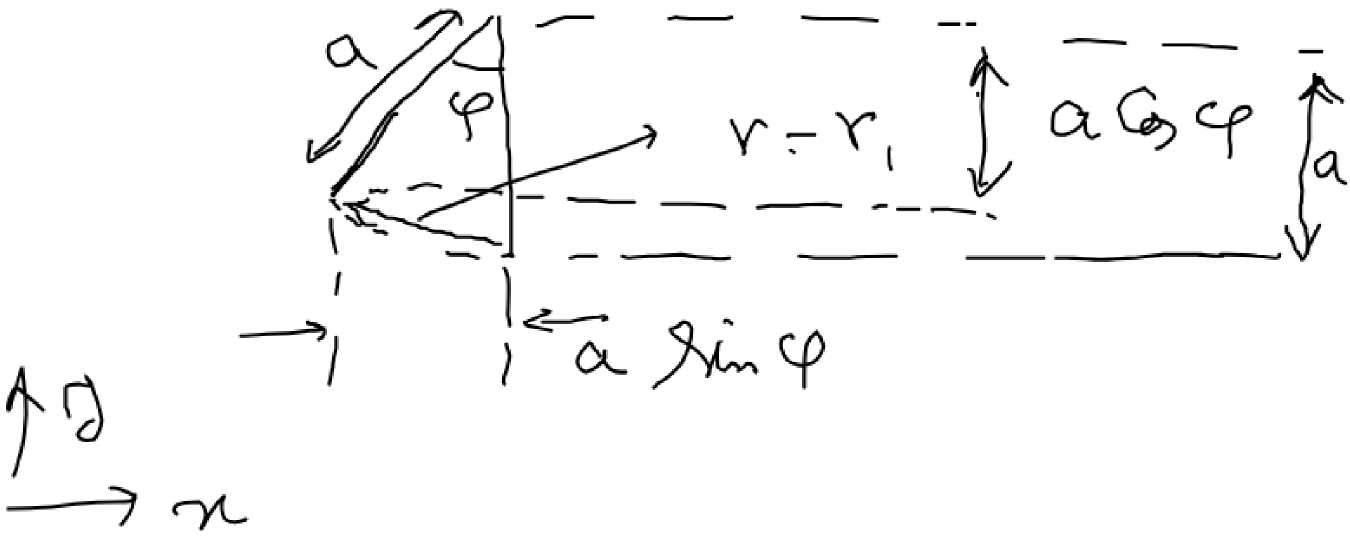
شعاع مسیر به نقطه بر مسیر بستگی دارد




طول مسیر $= a\varphi =$ طول آبی

$r_1 = (a\varphi)\hat{x}$

$r_2$: جای نقطه‌ی سبز (ثابت نسبت به دایره)




$$r - r_1 = \hat{x}(-a\sin\varphi) + \hat{y}(a - a\cos\varphi)$$

$$r_1 = \hat{x}(a\varphi)$$

$$r = a\left[\hat{x}(\varphi - \sin\varphi) + \hat{y}(1 - \cos\varphi)\right]$$

معادله‌ی پارامتری چرخزاد:

$$\mathbf{r} = a\left[\hat{x}(\varphi - \sin\varphi) + \hat{y}(1-\cos\varphi)\right]$$

برای این معادله، لطفاً شکل مسیر را بکشید، و در هر نقطه، بردار یکه‌ی مماس، شعاع خمش، و بردار یکه‌ی قائم را حساب کنید.

البته لازم است $\frac{ds}{d\varphi}$ هم حساب کنید.