طول، خم چرخزاد

$$x = a(\varphi - \sin\varphi)$$

$$y = a(1 - \cos\varphi)$$

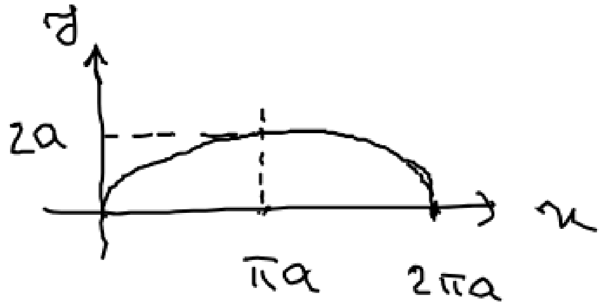
$$\frac{ds}{d\varphi} = \|v\|$$

$$v = a\left[\hat{x}(1-\cos\varphi) + \hat{y}\sin\varphi\right]$$

$$\|v\| = a\sqrt{(1-\cos\varphi)^2 + \sin^2\varphi} = a\sqrt{2-2\cos\varphi}$$

$$= a\sqrt{4\sin^2\frac{\varphi}{2}} = 2a\left|\sin\frac{\varphi}{2}\right|$$

$$\frac{ds}{d\varphi} = 2a\left|\sin\frac{\varphi}{2}\right|$$



طول یک نیم-طاق :

$\varphi : 0 \to \pi$

$$L = \int_0^{\pi} 2a\left|\sin\frac{\varphi}{2}\right| d\varphi = 2a\int_0^{\pi} \left(\sin\frac{\varphi}{2}\right) d\varphi$$

$$= 4a\left(-\cos\frac{\varphi}{2}\right)_{\varphi=0}^{\varphi=\pi} = 4a$$

طول یک طاق : $8a = 2\times(4a)$

طول یک مارپیچ دایره‌ای با شعاع:

$$\tan\alpha = \frac{l}{2\pi a}$$

l : گام مارپیچ

a : شعاع مارپیچ

$$x = a\cos\varphi$$

$$y = a\sin\varphi$$

$$z = a(\tan\alpha)\varphi = \frac{l}{2\pi}\varphi$$

$$\frac{ds}{d\varphi} = \|v\|$$

$$v = a\left(-\hat{x}\sin\varphi + \hat{y}\cos\varphi + \hat{z}\tan\alpha\right)$$

$$\|v\| = a\sqrt{1+\tan^2\alpha} = \frac{a}{\cos\alpha}$$

$$\int_0^{2\pi} \frac{ds}{d\varphi}\,d\varphi = \int_0^{2\pi} (d\varphi)\,\frac{a}{\cos\alpha}$$

طول یک دور مارپیچ :

$$= \frac{2\pi a}{\cos\alpha}$$

$\alpha = 0$ مارپیچ $\rightarrow$ دایره

یک دور مارپیچ : بازشده

$l = 2\pi a \tan\alpha$

گام مارپیچ

طول یک مارپیچ $= \sqrt{l^2 + (2\pi a)^2}$

$$= 2\pi a\sqrt{1+\tan^2\alpha} = \frac{2\pi a}{\cos\alpha}$$

توابع چند متغیری با مقادیر عدد.

تابع m متغیری با مقادیر عدد

$$\underbrace{f:\ \mathbb{R}^m}_{\downarrow} \longrightarrow \mathbb{R}$$

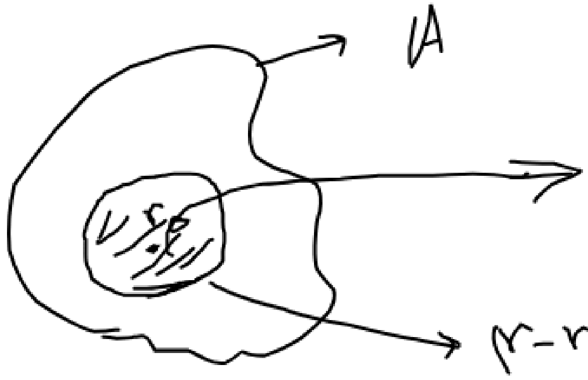
یک زیرمجموعه‌ای از $\mathbb{R}^m$

A زیرمجموعه‌ی $\mathbb{R}^m$

A باز:

$$\forall r_0 \in A :$$

$$\exists \varepsilon > 0 \ni |r - r_0| < \varepsilon \Rightarrow r \in A$$



$|r - r_0| < \varepsilon$

$\|r - r_0\| < \varepsilon$

$|r - r_0| = \varepsilon$

r و r_0 : سای

$(r - r_0)\cdot(r - r_0) < \varepsilon^2$

$(r - r_0)\cdot(r - r_0) = \varepsilon^2$

یک دایره در صفحه

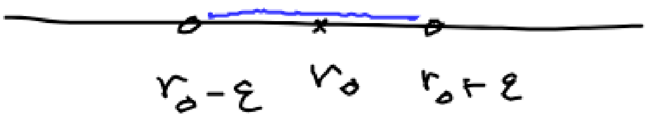
یک کره در فضای سه بعدی

دو نقطه

در فضای یک بعدی : $r = r_0 - \varepsilon$ یا $r_0 + \varepsilon$ $\quad$ $r - r_0 = \pm\varepsilon$

یک بعد:

$\|r-r_0\|<\varepsilon$ $\qquad$ $r_0-\varepsilon<r<r_0+\varepsilon$

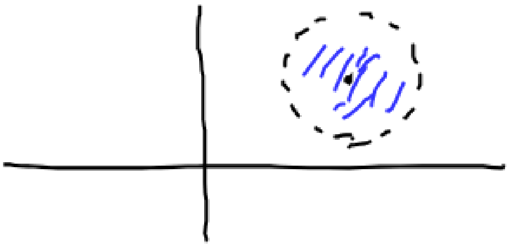


$(r_0-\varepsilon, r_0+\varepsilon)$

فاصله‌ی باز

دو بعد:

$\|r-r_0\|<\varepsilon$



یک قرص (بدون مرز)

به مرکز r_0 و شعاع ε

سه بعد:

$\|r-r_0\|<\varepsilon$

یک گوی (بدون مرز) به مرکز r_0 و شعاع ε

زیرمجموعه‌ی باز از $\mathbb{R}^m$:

گوی m-بعدی باز به مرکز r_0 و شعاع ε:

$$\|r - r_0\| < \varepsilon$$

اگر A یک زیرمجموعه‌ی باز از $\mathbb{R}^m$ است،

مشروط به بودن r_0 در A، یک گوی باز به مرکز r_0 هست

که همه‌ی اعضای آن توی A، یعنی آن گوی زیرمجموعه‌ی A است.

این گسترش تعریف فاصله‌ی باز در فضای یک بعدی است:

(a, b) $\quad a < b \quad$ در فضای یک بعدی

$x_0 \in (a, b)$

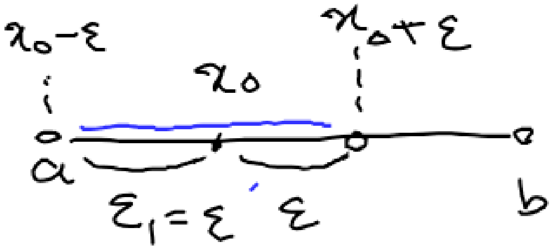
$x_0 - a = \varepsilon_1 > 0$

$a < x_0 < b$

$b - x_0 = \varepsilon_2 > 0$

$\min(\varepsilon_1, \varepsilon_2) = \varepsilon$

$(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) \subseteq (a, b)$



$(a,b) \subseteq$ (فاصله‌ی باز آی)

دو بعد

$\to A$ (بدون مرز)

همه x ها درونی

گوی (قرص) [باز (بدون مرز) آ ی] $\subseteq A$

مجموعه‌های باز بیشتر از یک بعدی شکل‌های پیچیده‌تری دارن

نسبت به مجموعه‌های باز یک بعدی.

یک متغیر با دو متغیر خیلی فرق میکنه.

دو متغیر با بیش از دو متغیر زیاد فرق نمیکنه.

تعریف حد:

a ، x ، L عدد

$f(x)$ عدد

یک متغیری:

$$\lim_{x \to a} f(x) = L :$$

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists \delta > 0 \ni 0 < |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$$

بیش از یک متغیر:

r ، a چندتایی

$f(r)$ ، L عدد

$$\lim_{r \to a} f(r) = L :$$

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists \delta > 0 \ni 0 < \|r-a\| < \delta \Rightarrow |f(r) - L| < \varepsilon$$

تغییر $|x-a|$

با شبیه به آنچه برای توابع تک متغیری داریم

$$\left(\lim_{r\to a} f_1(r) = L_1\,,\ \lim_{r\to a} f_2(r) = L_2\right) \Longrightarrow$$

$$\lim_{r\to a} (f_1+f_2)(r) = L_1+L_2$$

$$\lim_{r\to a} (f_1-f_2)(r) = L_1-L_2$$

$$\lim_{r\to a} (f_1 f_2)(r) = L_1 L_2$$

$L_2 \neq 0$

$$\lim_{r\to a} \frac{f_1}{f_2}(r) = \frac{L_1}{L_2}$$

$$\lim_{r \to a} f(r) = 0 \quad , \quad \exists M, \delta > 0 \ni$$

$$0 < \|r - a\| < \delta \Longrightarrow |g(r)| < M$$

$$\Longrightarrow \lim_{r \to a} (fg)(r) = 0$$

حد f صفر

g کراندار

$\Longleftarrow$ حد (fg) صفر

$$\lim_{r\to a} g(r) = l$$

g : چند متغیره با مقدار عددی

$$\lim_{x\to l} f(x) = L$$

f : یک متغیره با مقدار عددی

$(f\circ g)(r)$

fog : چند متغیره با مقدار عددی

$$\lim_{r\to a} (f\circ g)(r) = L$$

به شرط اینکه

$$\exists\, \delta>0 \ni$$

$$0<\|r-a\|<\delta \Rightarrow g(r)\neq l$$

پیوستگی:

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$

f در a پیوسته است.

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists \delta > 0 \ni \|x - a\| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon$$

مشابه با حالت توابع یک متغیره:

f و g در a پیوسته $\Longrightarrow$ $(f \pm g)$ و (fg) در a پیوسته

$\frac{f}{g}$ در a پیوسته است اگر $g(a) \neq 0$

ترکیب ۲ تابع:

g : m متغیری با مقدار حد

f : یک متغیری با مقدار حد.

g در a پیوسته، f در g(a) پیوسته

$\Leftarrow$ $(f \circ g)$ در a پیوسته

$$\lim_{r\to a} g(r)=g(a)\ ,\quad \lim_{x\to g(a)} f(x)=f[g(a)]$$

$$\Rightarrow\quad \lim_{r\to a}(f\circ g)(r)=(f\circ g)(a)$$

آن شرط اضافی (در یک همسایگی از a، مقادیر $g(r)$ و $g(a)$ برابر نبود) لازم نیست.

f ۲ متغیری با مقدار عدد

$r \to (x, y)$

a, b عدد

$f(x, y) = l$

(a,b) ۲ تایی

$(x, y) \to (a, b)$

$f(a, \cdot)$ → جای متغیر

$f(a, y)$

$f(x, b)$

$f(a,\cdot)$ → یک تابع یک متغیری

$$[f(a, \cdot)](y) = f(a, y)$$

$f(\cdot, b)$ یعنی $[f(\cdot, b)](x) = f(x, b)$

$f(a,0)$ و $f(a,b)$ تابع‌ها را تعریف کنید.

اگر $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)=l$ $\Longrightarrow$

$$\left.\begin{aligned} &\lim_{y\to b} f(a,y) = \,? \\ &\lim_{x\to a} f(x,a) = \,? \end{aligned}\right\}$$

$$\lim_{y\to b} f(a,y) = l$$

نشان دهیم

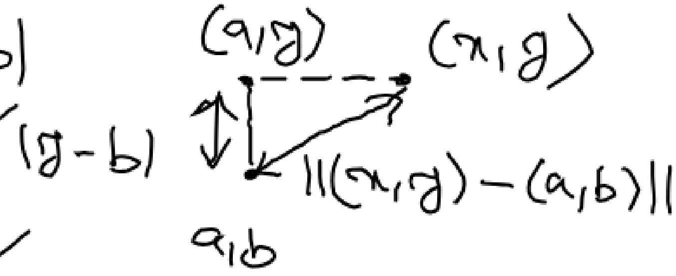
$|y-b|$

$$\|(x,y)-(a,b)\| = \sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2} \geq \sqrt{(y-b)^2}$$

$$\|(x,y)-(a,b)\| \geq |y-b|$$

وتر مثلث قائم الزاوية

ضلع مثلث قائم الزاوية



پیوستگی را داریم :

$$\forall \varepsilon>0 : \exists \delta>0 \ni$$

$$0<|y-b|<\delta \Longrightarrow |f(a,y)-l|<\varepsilon$$

چیزی که میدانیم :

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = l$$

یعنی :

$$\forall \varepsilon>0 : \exists \delta>0 \ni$$

$$0<\|(x,y)-(a,b)\|<\delta \Longrightarrow |f(x,y)-l|<\varepsilon$$

$\varepsilon > 0$;

δ را همان δ ی در تعریف $\lim f(x,y)$ بگیریم:

$$\exists \delta > 0 \ni 0 < \|(x,y) - (a,b)\| < \delta$$

$$\Rightarrow |f(x,y) - f(a,b)| < \varepsilon$$

$$|y - b| = \|(a,y) - (a,b)\|$$

اگر $0 < |y-b| < \delta \Rightarrow 0 < \|(a,y) - (a,b)\| < \delta$

$$\xrightarrow{f(x,y)\ \text{پیوسته}} |f(a,y) - f(a,b)| < \varepsilon .$$

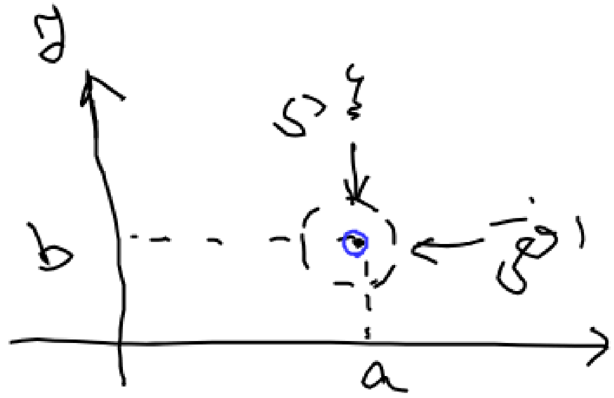
$$\lim_{y \to b} f(a,y) = l$$ پس

کاملن مشابه $\Leftarrow$

$$\lim_{x \to a} f(x,b) = l$$

پس ثابت شد

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = l \implies \begin{cases} \lim\limits_{y \to b} f(a,y) = l \\ \lim\limits_{x \to a} f(x,b) = l \end{cases}$$



$f(x,y)$ به l میگراید، وقتی (x,y) به (a,b) اگر نقطه به نقطه (a,b) نزدیک شود لازم است x ... f به l نزدیک میشود.

لزوماً اگر نقطه به شکل عمودی به (a,b) نزدیک شود $(x=a)$ یا نقطه به شکل افقی به (a,b) نزدیک شود $(y=b)$، f به l نزدیک شود. (داشتیم. اثبات قبلی اینجا هم هست

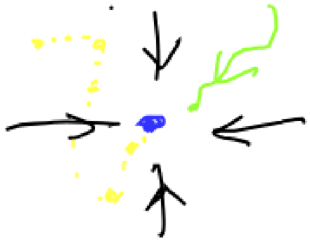
برعکس چه؟

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{y\to b} f(a,y) = l \\ \text{و} \quad \lim\limits_{x\to a} f(x,b) = l \end{array}\right\} \overset{?}{\Longrightarrow} \lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = l$$

جواب: در حالت کلی نه

لزوما نه.

نقطه
از مسیرهای سیاه به A بی نزدیک شود،
مقدار f به l نزدیک می‌شود.



(۵ برای اینکه f در A بی حد داشته باشد (مقدار حد l باشد)،
لازم است از هر مسیری نقطه به A بی نزدیک شد،
f به l نزدیک شود، از جمله از مسیر سبز
که ممکن است خیلی ناپیوسته باشد (نقاط زرد)

این که ^نقطه^ افقی یا عمودی به آنجا نزدیک بشود، f به l نزدیک میشود،
تضمین نمی‌کند نقطه به هر شکلی به آنجا نزدیک بشود f به l نزدیک میشود.
یک چیز دیگر هم ممکن است رخ دهد. ممکن است
توابع تک متغیری (متناظر با x ثابت یا y ثابت)
حد داشته باشند، ولی این حدها برابر نباشند.

مثال برای حالتهای مختلف:

$$f(x,y) = \frac{x^2+2y^2}{x^2+y^2} \qquad (x,y) \neq (0,0)$$

$$f(0,y) = \frac{2y^2}{y^2} \quad , y \neq 0 \Rightarrow f(0,y) = 2$$

$$\lim_{y \to 0} f(0,y) = 2$$

$$f(x,0) = \frac{x^2}{x^2} \quad , \quad x \neq 0 \quad f(x,0) = 1$$

$$\lim_{x \to 0} f(x,0) = 1$$

$$\lim_{y\to 0} f(0,y)=2\neq 1=\lim_{x\to 0} f(x,0)$$

پس $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ وجود ندارد.

مثال:

$$g(x,y)=\frac{x^2+2xy+y^2}{x^2+y^2}, \quad (x,y)\neq(0,0)$$

$$g(0,y)=\frac{y^2}{y^2}=1, \quad y\neq 0 \;\Big|\; \lim_{y\to 0} g(0,y)=1$$

$$g(x,0)=\frac{x^2}{x^2}=1, \quad x\neq 0 \;\Big|\; \lim_{x\to 0} g(x,0)=1$$

آیا

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} g(x,y) \stackrel{?}{=} 1$$

3) جواب : نه :

مثال:

$$y = x$$

$$g(x,x) = \frac{x^2 + 2x^2 + x^2}{2x^2} = 2, \quad x \neq 0$$

$$\lim_{x\to 0} g(x,x) = 2 \neq 1 = \lim_{y\to 0} g(0,y) = \lim_{x\to 0} g(x,0)$$

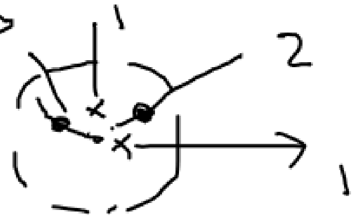
[illegible]

$y = -x$

$$g(x,-x) = \frac{x^2 - 2x^2 + x^2}{x^2 + x^2} = 0, \quad x \neq 0$$

$$\lim_{x \to 0} g(x,-x) = 0 \neq 1$$

$\neq 2$



g [illegible]

به شکل مشابه برای پیوستگی :

اگر $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = f(a,b)$ ، f در (a,b) پیوسته است

$$\Downarrow$$

$\displaystyle\lim_{y\to b} f(a,y) = f(a,b)$ ⟸ $f(a,\cdot)$ در b پیوسته است

$\displaystyle\lim_{x\to a} f(x,b) = f(a,b)$ ⟸ $f(\cdot,b)$ در a پیوسته است

ب) برعکس درست نیست:

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{y\to b} f(a,y) = f(a,b) \\[2ex] \lim\limits_{x\to a} f(x,b) = f(a,b)\end{array}\right\} \not\Rightarrow \lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = f(a,b)$$

مثال نقض:

$$g(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2+2xy+y^2}{x^2+y^2} & , (x,y)\neq(0,0) \\ 1 & , (x,y)=(0,0) \end{cases}$$

$$g(x,y) := \begin{cases} \dfrac{(x+y)^2}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 1, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

$$g(0,y) = \begin{cases} \dfrac{y^2}{y^2}, & y \neq 0 \\ 1, & y = 0 \end{cases} \qquad g(0,y) = 1$$

$$g(x,0) = \begin{cases} \dfrac{x^2}{x^2}, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases} \qquad g(x,0) = 1$$

$\lim\limits_{y \to 0} g(0,y) = 1 = g(0,0) \therefore$ $g(0,\cdot)$ پیوسته

$\lim\limits_{x \to 0} g(x,0) = 1 = g(0,0) \therefore$ $g(\cdot,0)$ پیوسته

اما دیدیم که $\lim_{(x,y)\to(0,0)} g(x,y)$ وجود ندارد.

پس g در $(0,0)$ پیوسته نیست.