یک کاربرد دیگر مشتق: کمینه و بیشینه.

f ، دو متغیری با مقدار حقیقی:

$f(x,y)$

$(x,y)=r \qquad r_0=(x_0,y_0)$

f در r_0 کمینه‌ی موضعی: یک همسایگی r_0 هست که در آن همه‌ی مقادیر f از $f(r_0)$ کوچکتر نیست

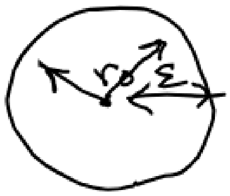
$$\exists \varepsilon>0 \ni |r-r_0|<\varepsilon \Rightarrow f(r)\geq f(r_0)$$

عدد

$$r = r_0 + tu$$

بردار

متغیر



$$r - r_0 = tu$$

$$\|r - r_0\| = |t|\ \|u\|$$

اگر

$$\|r - r_0\| < \varepsilon \Longleftarrow |t| < \frac{\varepsilon}{\|u\|}$$

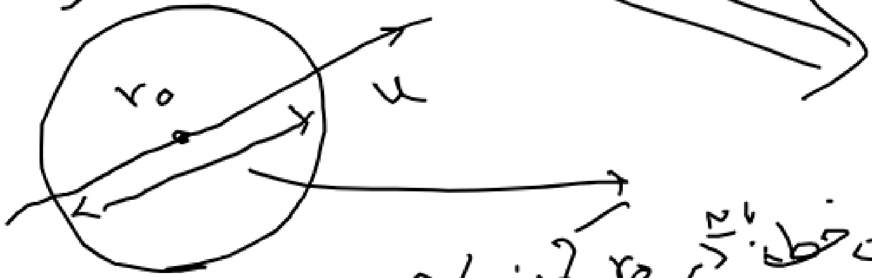
تعریف

$$g(t) := f(r_0 + tu) = f(r)$$

ثابت

f در r_0 کمینه $\Longleftarrow$ g در $t=0$ کمینه است

f در r_0 کمینه



f برای این خط‌ها در r_0 کمینه شود

یعنی $g(t)$ در $t=0$ کمینه شود.

g یک متغیره است. g در صفر کمینه شود

$\Downarrow$

$t=0$ یک نقطه بحرانی است $\Leftarrow$ کافی نیست: g برای tهای مثبت و منفی تعریف شده

یا g در $t=0$ مشتق‌پذیر نیست، یا مشتق g در $t=0$ صفر است.

پس اگر g در $t=0$ مشتق‌پذیر باشد، مشتق g در $t=0$ باید
صفر شود (تا g در $t=0$ کمینه شود)

$$(Dg)(0)=0$$

قاعده‌ی زنجیره‌ای مشتق‌گیری:

$$g(t) = f(r_0 + tu)$$

$$h(t) := r_0 + tu \longrightarrow \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$$

یک متغیره با مقادیر دو مؤلفه‌ای

$$g(t) = f[h(t)] = (f \circ h)(t)$$

$h : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$

$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$

$g = f \circ h : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

قاعده‌ی زنجیره‌ای مشتق‌گیری

از [illegible]

$$\underbrace{(Dg)(0)}_{\substack{\text{عدد} \\ 1\times 1}} = \underbrace{\{(Df)[h(0)]\}}_{1\times 2} \underbrace{[(Dh)(0)]}_{2\times 1} \qquad h = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix}$$

$$(D_1 f \;,\; D_2 f) \qquad \begin{pmatrix} Dh_1 = Dx \\ Dh_2 = Dy \end{pmatrix}$$

$$D_1 f \downarrow \frac{\partial f}{\partial x} \qquad D_2 f \downarrow \frac{\partial f}{\partial y}$$

$$h = r_0 + tu = \begin{pmatrix} x_0 + tu_x = x = h_1 \\ y_0 + tu_y = y = h_2 \end{pmatrix}$$

t: متغیر

$$Dh = \begin{pmatrix} Dh_1 \\ Dh_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_x \\ u_y \end{pmatrix}$$

$r = r_0 + tu$ t زمان، r مکان

معادله‌ی حرکت یک متغیر که با سرعت ثابت u حرکت می‌کند
در $t=0$ در r_0 است.

$$(Dh)(0) = \begin{pmatrix} u_x \\ u_y \end{pmatrix} \qquad \dot{r} = u$$

$$(Dg)(0) = \left\{ (D_1 f)[\underbrace{h(0)}_{r_0}] \quad (D_2 f)[h(0)] \right\} \begin{pmatrix} u_x \\ u_y \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} u_x \\ u_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$$

$$= [(D_1 f)(r_0)] u_1 + [(D_2 f)(r_0)] u_2$$

$$= \frac{\partial f}{\partial x} u_x + \frac{\partial f}{\partial y} u_y$$

$$\frac{d}{dt}\{f[r(t)]\} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt}$$

$$= \frac{d}{dt}\{f[x(t), y(t)]\}$$

$$(Dg)(0) = [(D_1 f)(r_0)]u_1 + [(D_2 f)(r_0)]u_2$$
$$= (D_u f)(r_0)$$

مشتق سوئی f (با بردار u)

بعضی جاها مشتق سوئی را با فقط بردار یکه تعریف میکنند (اگر u یکه باشد).

در قراردادی که در این درس به کار میرود، برای مشتق سوئی لازم نیست بردار (u) یکه باشد.

$D_u f$ ، نسبت به u خطی است. از جمله اگر u به αu تبدیل شود، که α عدد است، $(D_u f)$ به $\alpha (D_u f)$ تبدیل می‌شود.

$$D_{\alpha u} f = \alpha (D_u f)$$

$$\boxed{D_{u+v} f = D_u f + D_v f}$$

مثال: یک شخص یک دمایی دارد. دما تابع مکان (شخص) است. این شخص حرکت می‌کند. مکانش تابع زمان است.

مشتق دمایی که در لحظه t حس میشود

مشتق سویی دما است، با بردار u، که u سرعت آن شخص است، که لازم نیست ثابت باشد.

$$T[r(t)]$$

دما   مکان   زمان

$$\frac{d}{dt}\left\{T[r(t)]\right\} = D_u T$$

$$= \frac{\partial T}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial T}{\partial y}\frac{dy}{dt}$$

$$u = \begin{pmatrix} \frac{dx}{dt} \\ \frac{dy}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix}$$

f در x_0 کمینه‌ی مشخص داشته باشد و x_0 نقطه‌ی مرزی نیست:

(یک همسایگی باز از x_0 هست که f در آن تعریف شده).

اگر f در x_0 مشتق‌پذیر باشد، g در $t=0$ مشتق‌پذیر است:

f در x_0 کمینه دارد $\Longleftarrow$ g در $t=0$ کمینه دارد

$t=0$ نقطه‌ی مرزی نیست، g در $t=0$ مشتق‌پذیر است.

پس $(Dg)(0)=0$

$(Dg)(0)=0 \Longleftarrow$ (f در ۰ کمینه (یا آن بیشینه

$$Dg = D_u f = \begin{pmatrix} D_1 f & D_2 f \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$$

$$= (D_1 f) u_1 + (D_2 f) u_2$$

$$(D_1 f) u_1 + (D_2 f) u_2 = 0$$

$$? = u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$$

g با استفاده از یک u ی خاص که تعریف شده

اما نتیجه ۲ زمانی برای هر u درست باشد:

روی هر خط گذرا از x_0 مینیمم دارد، مقدار f باید نا کوچکتر از $f(x_0)$ باشد.

نتیجه

$$\forall u: \quad (D_1 f) u_1 + (D_2 f) u_2 = 0$$

پس:

$$D_1 f = 0 \quad , \quad D_2 f = 0$$

یعنی

$$D f = 0$$

نتیجه همان است که برای تابع‌های یک متغیری

به دست آمد:

f در x_0 کمینه‌ی نسبی دارد، x_0 نقطه‌ی درونی است،

و f در x_0 مشتق‌پذیر است

$$\Downarrow$$

$$(Df)(x_0)=0$$

روشن است که برای بیشینه هم نتیجه‌ی مشابهی به دست می‌آید.

---

f در x_0 کمینه یا بیشینه‌ی نسبی دارد، x_0 نقطه‌ی مرزی نیست

f در x_0 مشتق‌پذیر است

$$\Downarrow$$

$$(Df)(x_0)=0$$

برای به دست آوردن کمینه و بیشینه‌ی مطلق،

این نقاط باید بررسی شوند:

نقاط مرزی (دامنه)

جاهایی که تابع مشتق‌پذیر نیست

جاهایی که مشتق تابع صفر است.

جاهایی که تابع کمینه یا بیشینه‌ی محلی دارد بیرون این نقاط نیستند.

البته لازم نیست تابع در همه‌ی این نقاط کمینه یا بیشینه باشد.

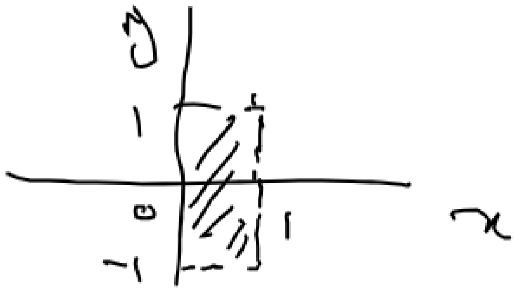
مثال:

$$f(x,y) = 2x^2 + 3xy + y^2 + 6x - 4y$$

در ناحیه ی

$$0 \leq x \leq 1$$

$$-1 \leq y \leq 1$$



دامنه ناحیه ی بسته و کراندار است.

کمینه و بیشینه ی f ؟

f مشتق پذیر است (چند جمله ای است)

یعنی نقاط بحرانی، و جاهایی که مشتق f صفر است.

$$Df = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \end{pmatrix}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 4x + 3y + 6$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 3x + 2y - 4$$

$$Df = 0 \quad \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 4 & 3 & -6 \\ 3 & 2 & 4 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 4 & 3 & -6 \\ 0 & -\frac{1}{4} & \frac{17}{2} \end{array}\right)$$

$$y = -34$$

$$x = 24$$

جاهایی که مشتق تابع صفر میشود، در دامنه نیست.

پس کمینه و بیشینه بر مرز رخ میدهند.

$x=0 \quad , \quad x=1$

$y=-1, \quad y=1$

$x=0: \; f_1(y)=y^2-4y$

کمینه بیشینه

هم با مشتق گیری هست

$f_1'(y)=2y-4=0 \Rightarrow y=1/2 \Rightarrow f_1=\frac{1}{4}-2=-\frac{7}{2}$

نقاط مرزی برای f_1:

$f_1(-1)=1+4=5$

$f_1(+1)=1-4=-3$

$$\begin{cases} (0,\frac{1}{2}) \longrightarrow -\frac{7}{2} \\ (0,-1) \longrightarrow 5 \\ (0,1) \longrightarrow -3 \end{cases}$$

$x = 1 \quad f_2(y) = \cancel{2}8 - y + y^2$

$f_2'(y) = -1 + 2y = 0 \Rightarrow y = +\frac{1}{2} \quad f_2(+\frac{1}{2}) = \frac{31}{4}$

$f_2(+1) = 8 \quad f_2(-1) = 10$

$(1, +\frac{1}{2}) \longrightarrow \frac{31}{4}$

$(1, +1) \longrightarrow 8$

$(1, -1) \longrightarrow 10$

$y = -1 \quad f_3(\cancel{y}x) = 2x^2 - 3x + 1$

$2x^2 + 3x + \cancel{6}5 = +6x + \cancel{8}4$

$f_3'(x) = 4x + 3 = 0 \quad x = -\frac{3}{4}$

در ناحیه نیست :

$f_3(0) = 5 \quad f_3(1) = 11$

$(0, -1) \longrightarrow 5$

$(1, -1) \longrightarrow 10$

$y=1: \quad f_4(x) = 2x^2 + 3x + 1 + 6x - 4$

$= 2x^2 + 9x - 3$

$f_4'(x) = 4x + 9 = 0 \Rightarrow x = -\frac{9}{4}$ × در ناحیه نیست

$f_4(0) = -3$ $\quad (0, 1) \to -3$

$f_4(1) = 8$ $\quad (1, 1) \to 8$

$\boxed{(0, -\frac{1}{2}) \to -\frac{7}{2}}$ $\quad (1, \frac{1}{2}) \to \frac{31}{4}$

$(0, -1) \to 5$ $\quad (1, 1) \Rightarrow 8$

$(0, 1) \to -3$ $\quad \boxed{(1, -1) \to 10}$

کمینه $\quad$ بیشینه

حل:

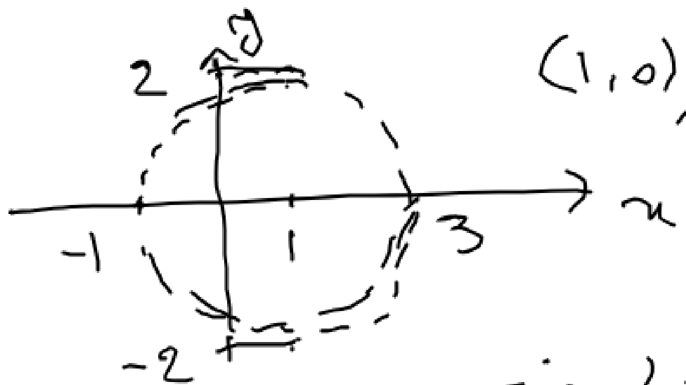
$f(x,y) = x^2 + y^2$

$(x-1)^2 + y^2 \leq 4$

دامنه

یک قرص به مرکز $(1,0)$

و شعاع 2



f همه جا مشتق پذیر است. پس نقاط بحرانی جایی که مشتق f صفر است.

$Df = 0 \quad \frac{\partial f}{\partial x} = 2x = 0 \quad \Rightarrow x = 0 = y \quad f(0,0) = 0$

$\frac{\partial f}{\partial y} = 2y = 0$

برای f:

$$(x-1)^2 + y^2 = 4$$

یک دایره به مرکز $(1,0)$

و شعاع 2

$$y = \pm\sqrt{4-(x-1)^2}$$

$$y^2 = 4-(x-1)^2$$

$$f \longrightarrow \qquad f_1(x) = x^2 + 4 - (x-1)^2$$

$$f_1(x) = 4 + 2x - 1 = 3 + 2x$$

$$-1 \leq x \leq 3$$

$$f_1'(x) = 2 \neq 0$$

برای f_1:

$x=-1 \quad f_1 = 3 \quad (-1,0) \to 3$

$x=3 \quad f_1 = 9 \quad (3,0) \to 9$

۱) روش: x را برحسب y:

$$(x-1)^2+y^2=4$$

$$x=1\pm\sqrt{4-y^2}$$

$$f(x,y)\longrightarrow f_2(y)=\left(1\pm\sqrt{4-y^2}\right)^2+y^2$$

$$=1+4-y^2\pm2\sqrt{4-y^2}+y^2$$

$$=5\pm2\sqrt{4-y^2}$$

$+$: مشتق $\quad \dfrac{-2y}{\sqrt{4-y^2}}=0 \Rightarrow y=0$

$(3,0)\longrightarrow 9 \qquad -2\le y\le 2 \qquad f_2=5 \leftarrow (1,\pm2) \qquad f_{2+}=9$

$-$: مشتق: $\dfrac{2y}{\sqrt{}}=0 \Rightarrow y=0 \longrightarrow f_{2-}=1 \quad x=1$

$(1,0)\longrightarrow 1 \qquad -2\le y\le 2 \qquad f_2=5 \leftarrow (1,\pm2)$

کمینه و بیشینه همان ۱ و ۹ اند:

$(1,0) \to 1$

$(3,0) \to 9$

همان نقاط قبلی

یک مثال دیگر:

$$f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$$

دامنه:

$$x^2+y^2 \leq 1$$

یک قرص به مرکز مبدأ و

شعاع ۱

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$(x,y) \neq (0,0)$

f در $(0,0)$ مشتق‌پذیر نیست.

Df در $r \neq (0,0)$ صفر نمی‌شود.

آن جایی که f مشتق‌پذیر است، $Df \neq 0$

پس نقاط مرزی و جایی که f مشتق‌پذیر نیست $\longrightarrow$ $(0,0)$

$\downarrow$

$f(0,0) = 0$

مرز:

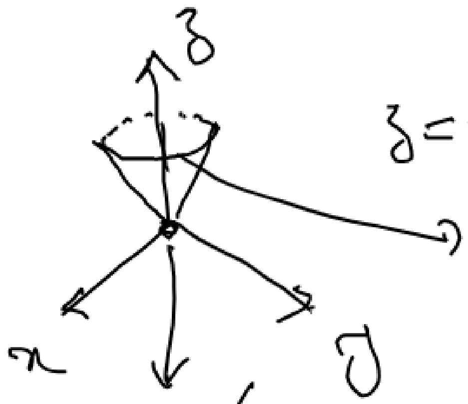
$x^2+y^2=1 \longrightarrow f(x,y)=1$

تابع

$(0,0) \longrightarrow 0 \longrightarrow$ کمینه

مرز $\longrightarrow 1 \longrightarrow$ بیشینه

(مرز ها $(1,0)$)



$z=f(x,y)$

کمینه

بیشینه

در رأس مخروط $((x,y,z)=(0,0,0))$

سطح تیز است و مشتق پذیر نیست