f تک متغیری با مقدار عدد:

$$f'(x_0)=0, \quad f''(x_0)>0 \Longrightarrow$$ f در x_0 کمینه‌ی نسبی.

$$f'(x_0)=0, \quad f''(x_0)<0 \Longrightarrow$$ f در x_0 بیشینه‌ی نسبی

تابع‌های بیش از یک متغیری:

$r = r_0 + \Delta r$

f چند متغیری با مقدار r داریم:

$f(r) = f(r_0) +$ یک تابع خطی از (Δr) + یک تابع با مجذورات ، فقط از درجه 2 از Δr

$+ O[(\Delta r)^2]$.

در این صورت این تابع در r_0 ذ بار مشتق پذیر است.

بخش درجه ی : $[(Df)(r_0)](\Delta r)$

تعریف 3:

$\Delta r = (\Delta x, \Delta y) = (x - x_0, y - y_0)$ $\quad r = (x, y)$

بخش درجه ۱ $= \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_0 \Delta x + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_0 \Delta y$

بخش درجه ۲ $= A(\Delta x)^2 + B(\Delta x)(\Delta y) + C(\Delta y)^2$

در r_0

$f(r) = f(r_0) +$ بخش درجه ۱ $+$ بخش درجه ۲ $+ O(\Delta r)^3$

$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_0 + 2A\Delta x + B\Delta y + O(\Delta r)$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_0 + B\,\Delta x + 2C\,\Delta y + O(\Delta r)$$

r_0

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_0 + 2A\,\Delta x + B\,\Delta y + O(\Delta r)$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = 2A + \overbrace{O(1)}^{} \quad \lim_{r\to r_0} = 0$$

$$\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)\right]_0 = 2A \qquad \left[\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)\right]_0 = B$$

$$\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)\right]_0 = B \qquad \left[\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)\right]_0 = 2C$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) \Longleftarrow$$ تابع خوش رفتار

$$f(r) = f(r_0) + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_0 \Delta x + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_0 \Delta y$$

$$+ \frac{1}{2}\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)\right]_0 (\Delta x)^2 + \left\{\left[\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)\right]_0 + \left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)\right]_0\right\}(\Delta x)(\Delta y)$$

$$+ \frac{1}{2}\left[\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)\right]_0 (\Delta y)^2 + o\left[(\Delta r)^2\right]$$

مقایسه با یک متغیری :

$$f(x) = f(x_0) + \left[f'(x_0)\right]\Delta x + \frac{1}{2}\left[f''(x_0)\right](\Delta x)^2 + o\left[(\Delta x)^2\right]$$

تقارن:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) \qquad \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) \qquad \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) \qquad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) \qquad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)$$

$$\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) \qquad \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) \qquad \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)$$

$$\left(D^2 f\right)_{ij} = \frac{\partial}{\partial r_i}\left(\frac{\partial f}{\partial r_j}\right) = D_i D_j f$$

$$D_j D_i f = D_i D_j f$$

چند متغیری:
ماتریس مشتق دوم
متقارن است.

$$f(r) = f(r_0) + \sum_i \left[(D_i f)(r_0)\right](\Delta r_i)$$

$$+ \frac{1}{2} \sum_{i,j} \underbrace{\left[(D_i D_j f)(r_0)\right]} (\Delta r_i)(\Delta r_j) + o\left[(\Delta r)^2\right]$$

متقارن در ij، ماتریس مشتق دوم

تک متغیری:

$$f(x) = f(x_0) + \left[(Df)(x_0)\right]\Delta x$$

$$+ \frac{1}{2}\left[(D^2 f)(x_0)\right](\Delta x)^2 + o\left[(\Delta x)^2\right]$$

$$h(t) = f[g(t)] \qquad g(t) = r_0 + t\Delta r$$

$$h(t) = f(r_0 + t\Delta r)$$

$$h(t) = h(0) + [h'(0)]\,t + \frac{1}{2}[h''(0)]\,t^2 + o(t^2)$$

$$\underbrace{h'(t)}_{\text{مرکب}} = \Big[\underbrace{(Df)(r)}_{\text{ط}}\Big]\Big[\underbrace{(Dg)(t)}_{\text{متحول}}\Big] = \Big[\underbrace{(Df)(r)}_{\text{ط}}\Big]\underbrace{(\Delta r)}_{\text{متحول}}$$

متغیر :

$$\Delta r = \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{pmatrix} \qquad Df = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \end{pmatrix}$$

$$h'(t) = \frac{\partial f}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}\Delta y$$

$$g'(t) = \Delta r$$

$$h'(t) = \left[(D_1 f)(\underbrace{r_0 + t\Delta r}_{g(t)})\right] \Delta x \qquad \text{ثابت } t$$

$$+ \left[(D_2 f)(r_0 + t\Delta r)\right] \Delta y$$

$$(D_1 f)[g(t)] \xrightarrow{\frac{d}{dt}} \left\{\underbrace{[D(D_1 f)](r)}_{b}\right\} \underbrace{g'(t)}$$

$$\left(D_1 D_1 f \quad . \quad D_2 D_1 f\right) \longleftarrow b$$

ستون $\begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{pmatrix}$

$$= (D_1 D_1 f) . (\Delta x) + (D_2 D_1 f)\ \Delta y$$

$$(D_2 f)[g(t)] \xrightarrow{\frac{d}{dt}} (D_1 D_2 f)\Delta x + (D_2 D_2 f)\Delta y$$

$$h''(t) = (D_1 D_1 f)(Dx)^2 + (D_2 D_1 f)(Dy)(Dx)$$
$$+ (D_1 D_2 f)(Dx)(Dy) + (D_2 D_2 f)(Dy)^2$$

یعنی در r_0

$$h''(0) = (D_1 D_1 f)_0 (Dx)^2 + (D_2 D_1 f)_0 (Dy) Dx$$
$$+ (D_1 D_2 f)_0 (Dx)(Dy) + (D_2 D_2 f)_0 (Dy)^2$$

$$h'(0) = (D_1 f)_0 (Dx) + (D_2 f)_0 (Dy)$$

$$h(t) = h(0) + [h'(0)]t + \frac{1}{2}[h''(0)]t^2 + \cdots$$

$$f(r_0 + t\Delta r) = f(r_0) + \{[(D_1 f)(r_0)]\Delta x + [(D_2 f)(r_0)]\Delta y\}t$$

$$+ \frac{1}{2}\{[(D_1 D_1 f)(r_0)](\Delta x)^2 + [(D_2 D_1 f)(r_0)](\Delta y)(\Delta x)$$

$$+ [(D_1 D_2 f)(r_0)](\Delta x)(\Delta y) + [(D_2 D_2 f)(r_0)](\Delta y)^2\}t^2$$

$$+ \cdots \qquad t \to 1$$

$$r_0 + \Delta r = r$$

$$f(r) = f(r_0) + (D_1 f)_0 \, \Delta x + (D_2 f)_0 \, \Delta y$$

$$+ \frac{1}{2}\Big[(D_1 D_1 f)_0 (\Delta x)^2 + (D_2 D_1 f)_0 (\Delta y)(\Delta x)$$

$$+ (D_1 D_2 f)_0 (\Delta x)(\Delta y) + (D_2 D_2 f)_0 (\Delta y)^2\Big] + \cdots$$

همان نتیجه ی قبلی.

$(Df)(r_0)=0$ f در r_0 کمینه یا بیشینه؟

استفاده از تابع مرکب h:

بردار

$$h(t) = f(r_0 + t\vec{u}) \qquad h'(0) = \underbrace{[(Df)(r_0)]\,u}_{=0}$$

h (برای همه u) در $t=0$ کمینه

$\Updownarrow$

f در r_0 کمینه.

شرط کافی برای این h در $t=0$ کمینه بود: $h''(0)>0$

$$h''(0)=\left[(D_1D_1f)(r_0)\right](u_1)^2+\left[(D_2D_1f)(r_0)\right]u_2u_1$$
$$+\left[(D_1D_2f)(r_0)\right]u_1u_2+\left[(D_2D_2f)(r_0)\right](u_2)^2$$

$$u=\hat{x}u_1+\hat{x}u_2$$

$$h''(0)=\underbrace{\sum_{i,j}\left[(D_iD_jf)(r_0)\right]u_iu_j}$$

برای بعضی از [illegible] است

$$h''(0)>0 \iff \qquad >0$$

شرط کافی برای این که f در r_0 کمینه شود (1. اگر $(Df)(r_0)=0$)

$$\forall u \neq 0 \qquad \sum_{i,j} \left[(D_i D_j f)(r_0)\right] u_i u_j > 0$$

یعنی ماتریس $(D^2 f)$ معین مثبت باشد

تک متغیری: $f'(x_0)=0,\ f''(x_0)>0 \Longrightarrow$ f در x_0 کمینه

چند متغیری: $(Df)(r_0)= \quad \underset{\text{معین مثبت}}{(D^2 f)(r_0)} \Longrightarrow$ f در r_0 کمینه

$(Df)(r_0) = 0 \quad (D^2 f)(r_0)$ منفی معین $\Rightarrow$ f در r_0 بیشینه

برای بیش از یک متغیره $(D_2 f)(r_0)$ ممکن است

معین مثبت باشد، معین منفی باشد، یا هیچکدام (نامعلوم باشد)

$$\sum_{i,j} \left[(D_i D_j f)(r_0)\right] u_i u_j > 0$$

$$\sum_{i,j} (D_i D_j f)(r_0)] v_i v_j < 0$$

مثال:

$$f(x,y) = 2x^2 + 3y^2$$

$$Df = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4x & 6y \end{pmatrix}$$

$$(Df)(0) = 0$$

$$(D^2 f) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{(\partial x)^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 f}{(\partial y)^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$$

$$\sum_{i,j} (D_i D_j f)\, u_i u_j = 4(u_1)^2 + 6(u_2)^2 \underset{u \neq 0}{>} 0$$

مثال:

$$f(x,y) = 2x^2 - 3y^2$$

$$Df = (4x \quad -6y) \qquad (Df)(0) = 0$$

$$(D^2 f) = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -6 \end{pmatrix}$$

نقطه زینی

$$\sum_{i,j} (D_i D_j f)\, u_i u_j = 4(u_1)^2 - 6(u_2)^2$$

$$u_2 = 0 \quad u_1 \neq 0 \qquad > 0 \leftarrow \left|\frac{u_2}{u_1}\right| < \frac{2}{\sqrt{6}}$$

$$u_2 \neq 0 \quad u_1 = 0 \qquad < 0 \leftarrow \left|\frac{u_1}{u_2}\right| < \frac{\sqrt{6}}{2}$$

در $x=0$ ، f کمینه نسبی ، بیشینه هم نسبی ندارد.

در راستای محور x سطح بالا میرود

در راستای محور y سطح پایین میرود.

یک مثال دیگر:

$$f(x,y) = \alpha x^2 + \beta xy + \gamma y^2$$

$$(Df) = \begin{pmatrix} 2\alpha x + \beta y & \beta x + 2\gamma y \end{pmatrix}$$

$$(D^2 f) = \begin{pmatrix} 2\alpha & \beta \\ \beta & 2\gamma \end{pmatrix}$$

$\langle D_2 f\rangle$ یعنی مثبت است ؟

$$\sum_{i,j} \langle D_i D_j f\rangle u_i u_j = 2\alpha (u_1)^2 + 2\beta u_1 u_2 + 2\gamma (u_2)^2$$

$$\overset{?}{>} 0 \qquad u_2 \neq 0 \qquad = 2(u_2)^2 \left(\alpha s^2 + \beta s + \gamma\right)$$

$u \neq 0$ $\qquad s = \frac{u_1}{u_2}$

برای هر s $> 0 \iff \alpha s^2 + \beta s + \gamma > 0$

$$\Updownarrow$$

$$\underbrace{\alpha > 0 \qquad \beta^2 - 4\alpha\gamma < 0}$$

$= 2\gamma (u_2)^2$

اگر $u_2 = 0$

پس $= 0$

اگر $\alpha = \beta = 0$ $\qquad \times \leftarrow \gamma > 0 \,,\, \alpha = \beta = 0$ یا

پس یک حالت :

$\alpha, \gamma > 0$

$\beta^2 - 4\alpha\gamma < 0$

$\alpha > 0 \quad \beta^2 - 4\alpha\gamma < 0$

$\Downarrow$

$\gamma > 0$

نتیجه: اگر $u_1 \neq 0$

$u_1 \longleftrightarrow u_2 \qquad \alpha \longleftrightarrow \gamma$

- $(\alpha, \gamma) > 0$

$\beta^2 - 4\alpha\gamma < 0$

شرط برای مینیمم :

$$\alpha, \gamma > 0 \rightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} > 0$$

$$\beta^2 - 4\alpha\gamma < 0$$

حل :

$$f(x,y) = x^2 + xy + y^2$$

$$\alpha = \gamma = 1 \qquad \beta = 1 \qquad \beta^2 - 4\alpha\gamma = 1 - 4 = -3 < 0$$

$$> 0$$

$D^2 f$ معين موجب إذن . $(Df)(0) =$: f لـ 0 نهاية صغرى

$$(x+y)^2 + (x-y)^2 = 2(x^2+y^2) \qquad f(x,y) = 0$$

$$(x+y)^2 - (x-y)^2 = 4xy \qquad \Updownarrow$$

$$x + y = 0 = x - y$$

$$\Updownarrow \; x = y = 0$$

$$f(x,y) = \frac{1}{2}\left[(x+y)^2 + (x-y)^2\right] + \frac{1}{4}\left[(x+y)^2 - (x-y)^2\right]$$

$$= \frac{3}{4}(x+y)^2 + \frac{1}{4}(x-y)^2 \geq 0$$

$$f(x,y) = x^2 - xy + y^2$$

$$\alpha=\gamma=1 \qquad \beta=-1 \qquad \beta^2-4\alpha\gamma=-3<0$$

$(D^2 f)$ معین مثبت است.

$$f(x,y)=x^2+2xy+y^2 \qquad \alpha=\gamma=1 \qquad \beta=2$$

$$\beta^2-4\alpha\gamma=0 \qquad f(x,y)=(x+y)^2\geq 0$$

معین مثبت نیست

$f=0 \Leftarrow$ اگر و تنها اگر $y=-x$ ،

$D^2 f$ نیمه معین مثبت است

f در v_0 کمینه می‌شود ولی نه اکیداً

$$f(x,y) = x^2 + 3xy + y^2 \qquad \alpha = \gamma = 1 \quad \beta = 3$$

$$\beta^2 - 4\alpha\gamma = 9 - 4 > 0$$

$D^2 f$ معین مثبت نیست ، شبه معین مثبت نیست

معین منفی نیست ، شبه معین منفی نیست

$r=0$ نقطه ی زینی ، $\begin{cases} >0, & x=y \\ <0, & x=-y \end{cases}$

$$Df)(r=0) = 0$$

$$f(0) = 0 \qquad f(x,y) = \frac{1}{2}\left[(x+y)^2 + (x-y)^2\right]$$

$$+ \frac{3}{4}\left[(x+y)^2 - (x-y)^2\right] = \frac{5}{4}(x+y)^2 - \frac{1}{4}(x-y)^2$$

مشتق‌های بالاتر :

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial x \partial y} \quad \text{یا} \quad \frac{\partial^3 f}{\partial y \partial z \partial x}$$

ترتیب مشتق‌ها مهم نیست :

برای بسط تیلر اطراف r_0 :

$$f(r) = f(r_0) + \sum_i \left[(D_i f)(r_0)\right](\Delta r_i) + \cdots + \frac{1}{k!} \sum_{i_1 \cdots i_k} \left[(D_{i_1} \cdots D_{i_k} f)(r_0)\right](\Delta r_{i_1}) \cdots (\Delta r_{i_k}) + \cdots$$

تابع‌های چندمتغیری با مقادیر چند مؤلفه‌ای :

مثال :

$$x = \rho \cos\varphi$$

$$y = \rho \sin\varphi$$

$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ تابع $\begin{pmatrix} \rho \\ \varphi \end{pmatrix}$

f با مقادیر چند مؤلفه‌ای

$f_1, \dots, f_n$ چند متغیری

$$f = \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix}$$

$$f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$$

$$f_1(\underbrace{r_1, \dots, r_m}) \to r$$

هر کدام عدد

- صدادار : تک‌تک شکل‌ها صدادارند
(چند متغیری)

- پیوسته : تک‌تک شکل‌ها پیوسته‌اند
(چند متغیری)

- مستقیم : تک‌تک شکل‌ها (چند متغیری) مستقیم‌اند

$\Delta r = r - r_0$

برای f از $\mathbb{R}^m$ به $\mathbb{R}^n$ ، ماتریس مشتق $n \times m$ است.

$$\underbrace{f(r)}_{n\times 1} = \underbrace{f(r_0)}_{n\times 1} + \underbrace{\left[(Df)(r_0)\right]}_{n\times m} \underbrace{(\Delta r)}_{m\times 1} + o(\Delta r)$$

$$(Df) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial r_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial r_m} \\ \vdots & & \\ \frac{\partial f_n}{\partial r_1} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial r_m} \end{bmatrix}$$

$$(Df)_{ij} = D_j f_i = \frac{\partial f_i}{\partial r_j}$$

$$f_1(r_1, \dots, r_k, s_1, s_2) = 0$$

تابع ضمنی

$$f_2(r_1, \dots, r_k, s_1, s_2) = 0$$

(k+2) متغیره

s_1, s_2 بر حسب r_1 تا r_k

f_1, f_2 با مقادیر معین

$$s_1 = g_1(r_1, \dots, r_k)$$

مشتق s_1, s_2 نسبت به r_1 تا r_k

$$s_2 = g_2(r_1, \dots, r_k)$$

$$f_1[r_1, \dots, r_k, g_1(r_1, \dots, r_k), g_2(r_1, \dots, r_k)] = 0$$

$$f_2[r_1, \dots, r_k, g_1(r_1, \dots, r_k), g_2(r_1, \dots, r_k)] = 0$$

قاعده ی زنجیری:

$$F: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p \qquad G: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$$

$$F \circ G: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^p$$

$$H: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^p \qquad H = F \circ G$$

$$\underset{p \times m}{(DH)(r)} = \underset{p \times n}{\{(DF)[G(r)]\}} \underset{n \times m}{[(DG)(r)]}$$

$$f_1[r, g(r)] = 0$$

$$f_2[r, g(r)] = 0$$

$$f[r, g(r)] = 0$$

$$\forall r$$

$$f : \mathbb{R}^{k+2} \to \mathbb{R}^2$$

$$g : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^2$$

$$h(r) = f[r, g(r)] = f[G(r)]$$

$$G : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^{k+2}$$

$$\underset{2 \times k}{(Dh)}(r) = \Big\{ \underset{2 \times (k+2)}{(Df)[G(r)]} \Big\} \Big[\underset{(k+2) \times k}{(DG)(r)} \Big]$$

$$\forall r \quad h(r)=0 \Rightarrow (Dh)(r)=0$$

$$(Df)[G(r)] = (Df)(r, s) \qquad G=(r,s)$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial r_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial r_k} & \frac{\partial f_1}{\partial s_1} & \frac{\partial f_1}{\partial s_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial r_1} & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial r_k} & \frac{\partial f_2}{\partial s_1} & \frac{\partial f_2}{\partial s_2} \end{bmatrix} = \left(\underset{2\times k}{\frac{\partial f}{\partial r}}, \underset{2\times 2}{\frac{\partial f}{\partial s}} \right)$$

$$(DG)(r) = \underset{(k+2)\times k}{\begin{pmatrix} \frac{\partial r_1}{\partial r_1} & \cdots & \frac{\partial r_1}{\partial r_k} \\ \vdots & & \\ \frac{\partial r_k}{\partial r_1} & \cdots & \frac{\partial r_k}{\partial r_k} \\ \frac{\partial s_1}{\partial r_1} & \cdots & \frac{\partial s_1}{\partial r_k} \\ \frac{\partial s_2}{\partial r_1} & \cdots & \frac{\partial s_2}{\partial r_k} \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} 1_{k\times k} \\ \hline \underbrace{\frac{\partial s}{\partial r}}_{2\times k} \end{pmatrix}$$

$$0 = (Dh)(r) = \begin{pmatrix} \underset{2\times k}{\dfrac{\partial f}{\partial r}} & \underset{2\times 2}{\dfrac{\partial f}{\partial s}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \overset{\frac{\partial r}{\partial r}}{\underset{k\times k}{1}} \\ \underset{2\times k}{\dfrac{\partial s}{\partial r}} \end{pmatrix}$$

$$= \underset{2\times k}{\frac{\partial f}{\partial r}} + \underset{2\times 2}{\frac{\partial f}{\partial s}} \, \underset{2\times k}{\frac{\partial s}{\partial r}} \longrightarrow$$

ضرب در طرفین معادله

برای یافتن مشتق s نسبت به r

$$\left(\frac{\partial f}{\partial s}\right)^{-1} \frac{\partial f}{\partial r} + \underbrace{\left(\frac{\partial f}{\partial s}\right)^{-1} \left(\frac{\partial f}{\partial s}\right)}_{1} \frac{\partial s}{\partial r} = 0$$

$$\frac{\partial s}{\partial r} = -\left(\frac{\partial f}{\partial s}\right)^{-1}\frac{\partial f}{\partial r}$$

s ز متغیر

s l متغیر :

$$f(r,s)=0$$

l متغیر

k متغیر

$$\frac{\partial s}{\partial r} = -\left(\frac{\partial f}{\partial s}\right)^{-1}\frac{\partial f}{\partial r}$$

$l\times k \quad l\times l \quad l\times k$

حالت خاص: $l=k=1$

$$f(\overset{\overset{r}{\uparrow}}{x},\overset{\overset{s}{\uparrow}}{y})=0$$

$$\frac{\partial y}{\partial x}=-\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^{-1}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)$$

همه‌ی عوامل عددند

از جمله‌ی کاربردها: محاسبه‌ی نقاط فرینه (که مشتق صفر میشود) با قید.

$f(x,y) \longrightarrow$ فرینه شود

$C(x,y)=0$ با قید

$$C(x,y)=0 \longrightarrow y=g(x)$$

$h(x)=f[x,g(x)] \longrightarrow$ فرض کنید،

(مشتق جزئی گرفته ،)

$$(Dh)(x)=(D_1 f)[x,g(x)]\times\frac{dx}{dx}+(D_2 f)[x,g(x)]\frac{dg}{dx}$$

$$D_1 f+(D_2 f)\,g'=0$$

$$\begin{cases} D_1 f+(D_2 f)\times D_1 g=0 \\ g=0 \end{cases}$$

محاسبه‌ی $g'(x)$ با روش تابع ضمنی :

$$C(x, y) = 0 \qquad \frac{\partial C}{\partial x} + \frac{\partial C}{\partial y}\frac{dy}{dx} = 0$$

$$\frac{dx}{dx}$$

$$\frac{dy}{dx} = -\left(\frac{\partial C}{\partial y}\right)^{-1} \frac{\partial C}{\partial x}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\left[-\left(\frac{\partial C}{\partial y}\right)^{-1} \frac{\partial C}{\partial x}\right] = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \left[-\frac{\partial f}{\partial y}\left(\frac{\partial C}{\partial y}\right)^{-1}\right] \frac{\partial C}{\partial x} = 0 \qquad x \longleftrightarrow y$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}+\left[-\frac{\partial f}{\partial y}\left(\frac{\partial C}{\partial y}\right)^{-1}\right]\frac{\partial C}{\partial y}=0 \qquad \text{آری ر}$$

$$\underbrace{\underline{\left(\frac{\partial C}{\partial y}\right)^{-1}}\;\underline{\frac{\partial C}{\partial y}}}_{1}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}-\frac{\partial f}{\partial y}=0 \quad \checkmark$$

$$\lambda = -\frac{\partial f}{\partial y}\left(\frac{\partial C}{\partial y}\right)^{-1}$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}+\overbrace{\left[-\dfrac{\partial f}{\partial y}\left(\dfrac{\partial C}{\partial y}\right)^{-1}\right]}^{\lambda}\dfrac{\partial C}{\partial x}=0 \\[2ex] \dfrac{\partial f}{\partial y}+\left[-\dfrac{\partial f}{\partial y}\left(\dfrac{\partial C}{\partial y}\right)^{-1}\right]\dfrac{\partial C}{\partial y}=0 \\[2ex] C=0 \end{cases}$$

معادلات فرینه‌گر f

با قید C.

تعداد y ها با تعداد C ها ب.ب.ر

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \lambda \frac{\partial C}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} + \lambda \frac{\partial C}{\partial y} = 0$$

$$C = 0$$

گویا این روش بکار رفته

$f(x, y)$

$\rightarrow \tilde{f}(x, y, \lambda)$

$$\tilde{f}(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda C(x, y)$$

$\tilde{f}$ مشتق‌ها نسبت به x و y و λ

$$\frac{\partial \tilde{f}}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x} + \lambda \frac{\partial C}{\partial x} \qquad \frac{\partial \tilde{f}}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial y} + \lambda \frac{\partial C}{\partial y} \qquad \frac{\partial \tilde{f}}{\partial \lambda} = C$$

فرینه کردن f با قید $C = 0$

روش صریح: استفاده از قید(ها) متغیر (متغیرهایی) را برحسب متغیرهای دیگر حساب کنید و در f بگذارید. نتیجه را برحسب متغیرهای باقیمانده فرینه کنید

روش ضرایب لاگرانژ:

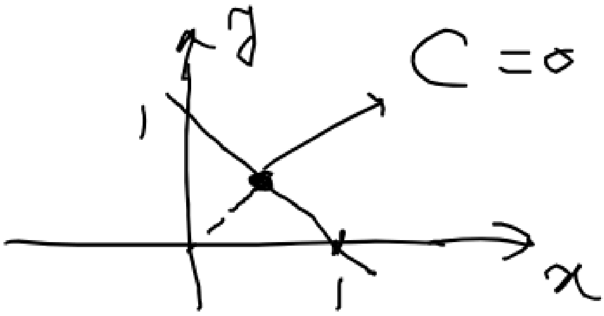
$$f \to \tilde{f} = f + \lambda C$$

λ: ضریب لاگرانژ. $\tilde{f}$ نسبت به همه‌ی متغیرها (از جمله λ) فرینه شود

مثال:

$$f(x,y) = x^2 + y^2$$

$$C(x,y) = x + y - 1$$



روش اول:

$$x + y - 1 = 0 \Rightarrow y = 1 - x$$

$$f(x,y) \longrightarrow x^2 + (1-x)^2 = 2x^2 - 2x + 1$$

$$\xrightarrow{\frac{d}{dx}} 4x - 2 = 0 \Rightarrow x = 1/2$$

روش دوم

$$\tilde{f}(x,y,\lambda) = x^2+y^2+\lambda(x+y-1)$$

$$\frac{\partial \tilde{f}}{\partial x} = 2x+\lambda = 0 \qquad \lambda = -2x$$

$$\frac{\partial \tilde{f}}{\partial y} = 2y+\lambda = 0 \qquad 2y-2x=0 \Rightarrow y=x$$

$$\frac{\partial \tilde{f}}{\lambda} = x+y-1 = 0 \qquad x+x-1=0$$

$$\Rightarrow x=\frac{1}{2} \checkmark$$

$$f + \alpha C \qquad \tilde{f}_i = f_i + \sum_a \alpha_{ia} C_a$$

$\downarrow \qquad \downarrow$

تعداد قیدها × تعداد f = تعداد ضرایب لاگرانژها

α_{ia} ها