گاز کامل فرانسبیتی:

انرژی یک ذره $= \sqrt{m^2c^4 + c^2\vec{p}\cdot\vec{p}} = c|\vec{p}|$

فرانسبیتی $|\vec{p}| \gg mc$

انرژی کل $= \sum_i c|\vec{p}_i|$

شاخص ذره

$$\frac{\check{\Omega}(\text{انرژی} < E)}{a} = \int\limits_{\sum_i c|\vec{p}_i| < E} \frac{d^{3N}r \, d^{3N}p}{(N!)\, h^{3N}}$$

شمارش درست تعداد حالت‌ها

انتخاب : $a = h^{3N}$

$$= \frac{V^N (E/c)^{3N}}{h^{3N} N!} \int\limits_{\sum_i |\vec{u}_i| < 1} d^{3N}u \qquad \vec{p}_i = \frac{E}{c} \vec{u}_i$$

$$I_N = \int\limits_{\sum_i |\vec{u}_i| < 1} d^{3N}u \qquad \frac{\check{\Omega}}{a} = \left(\frac{VE^3}{c^3 h^3}\right)^N \frac{I_N}{N!}$$

$E \rightarrow U$

$$S = k_B \left\{ N \ln\left[V \left(\frac{U}{ch}\right)^3 \right] + \ln \frac{I_N}{N!} \right\}$$

$$\frac{1}{T} = \frac{\partial S}{\partial U} = \frac{3Nk_B}{U} \longrightarrow U = 3Nk_BT$$

$$\frac{P}{T} = \frac{\partial S}{\partial V} = \frac{Nk_B}{V} \longrightarrow PV = Nk_BT$$

ذرات بی برهمکنش:

$$\check{\Omega} = V^N \check{\check{\Omega}}(U,N)$$

$$\Rightarrow S = k_B \left\{ N \ln \frac{V}{V_0} + \ln\left(\check{\check{\Omega}} V_0^N\right) \right] \Rightarrow$$

$$\left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_{N,U} = \frac{Nk_B}{V} \longrightarrow PV = Nk_BT$$

نانسبیتی، نسبیتی، فرانسبیتی، فقط کلاسیک (ناکوانتوم)

نانسبیتی: $U = \frac{3Nk_BT}{2}$ (فقط تک‌اتمی)

فرانسبیتی $U = 3Nk_BT$ (فقط تک‌اتمی)

ساده بگیری که با N:

$$I_N = \int\limits_{\sum_{i=1}^{N} |\vec{u}_i| < 1} d^{3N} u$$

$$\sum_{i=1}^{N} |\vec{u}_i| = |\vec{u}_N| + \sum_{i=1}^{N-1} |\vec{u}_i|$$

$$\sum_{i=1}^{N} |\vec{u}_i| < 1 \quad \therefore \quad \sum_{i=1}^{N-1} |\vec{u}_i| < 1 - |\vec{u}_N|$$

$$I_N = \int\limits_{|\vec{u}_N| < 1} d^3 u_N \int\limits_{\sum_{i=1}^{N-1} |\vec{u}_i| < 1 - |\vec{u}_N|} d^{3(N-1)} u$$

$$A(\alpha) = \int\limits_{\sum_{i=1}^{N-1} |\vec{u}_i| < \alpha} d^{3(N-1)} u \;=\; \alpha^{3(N-1)} \int\limits_{\sum_{i=1}^{N-1} |\vec{v}_i| < 1} d^{3(N-1)} v$$

$$\vec{u}_i = \alpha \vec{v}_i$$

$$A(\alpha) = \alpha^{3(N-1)} I_{N-1}$$

$$I_N = \int\limits_{|\vec{u}_N| < 1} d^3 u_N \, A\left(1 - |\vec{u}_N|\right) = I_{N-1} \int\limits_{|\vec{u}_N| < 1} d^3 u_N \left(1 - |\vec{u}_N|\right)^{3N-3}$$

$$d^3 u_N = d\Omega \, |\vec{u}_N|^2 \, d|\vec{u}_N|$$

زاویه‌ی فضایی

$$w = 1 - |\vec{u}_N|$$

$$I_N = 4\pi I_{N-1} \int_0^1 d|\vec{u}_N| \; |\vec{u}_N|^2 \left(1 - |\vec{u}_N|\right)^{3N-3}$$

$$= 4\pi I_{N-1} \int_0^1 dw \; (1-w)^2 \, w^{3N-3}$$

$$= 4\pi I_{N-1} \int_0^1 dw \left(w^{3N-3} - 2w^{3N-2} + w^{3N-1} \right)$$

$$= 4\pi I_{N-1} \left(\frac{1}{3N-2} - \frac{2}{3N-1} + \frac{1}{3N} \right)$$

$$I_N = 4\pi I_{N-1} \frac{3N(3N-1) - 6N(3N-2) + (3N-1)(3N-2)}{3N(3N-1)(3N-2)}$$

$$= 4\pi I_{N-1} \frac{2}{3N(3N-1)(3N-2)}$$

$$I_N = \frac{8\pi I_{N-1}}{3N(3N-1)(3N-2)}$$

$$I_{N-1} = \frac{8\pi I_{N-2}}{(3N-3)(3N-4)(3N-5)} \rightsquigarrow$$

$$I_N = \frac{(8\pi)^{N-1}}{(3N) \cdots \times 4} I_1$$

$$I_1 = \int_{|\vec{u}|<1} d^3u = \frac{4\pi}{3} = \frac{8\pi}{6}$$ حجم کره‌ی به شعاع ۱

$6 = 3 \times 2 \times 1$

$$I_N = \frac{(8\pi)^N}{(3N)(3N-1)\cdots 1}$$

$$I_N = \frac{(8\pi)^N}{(3N)!}$$

$$S = k_B \ln \left[V^N \left(\frac{U}{ch}\right)^{3N} \frac{(8\pi)^N}{(3N)!\, N!} \right]$$

$$= k_B \left\{ N \ln\left[8\pi V \left(\frac{U}{ch}\right)^3\right] - N \ln N + N \right.$$

$\frac{V}{N}, \frac{U}{N}$ $3^{1/3}$

$$\left. -3N \ln(3N) + 3N \right\}$$

$$= k_B \left\{ N \ln\left[\frac{8\pi V}{N} \left(\frac{U}{chN}\right)^3\right] + 4N - 3N \ln 3 \right\}$$

$$\frac{S}{N} = k_B \left\{ \ln\left[\frac{8\pi V}{N} \left(\frac{U}{chN}\right)^3\right] + 4 - 3 \ln 3 \right\}$$

$$S = N k_B \left\{ \ln\left[\frac{8\pi V}{N} \left(\frac{U}{chN}\right)^3 \right] + 4 - 3\ln 3 \right\}$$

$$S = k_B \left\{ N \ln\left[8\pi V \left(\frac{U}{ch}\right)^3 \right] + 4N - N\ln N - 3N\ln(3N) \right\}$$

$$-\frac{\mu}{T} = \left(\frac{\partial S}{\partial N}\right)_{V,U} = k_B \left\{ \ln\left[8\pi V \left(\frac{U}{ch}\right)^3 \right] - 4\ln N - 3\ln 3 \right\}$$

$$\mu = k_B T \left\{ -\ln\left[\frac{8\pi V}{N} \left(\frac{U}{chN}\right)^3 \right] + 3\ln 3 \right\}$$

$$PV = N k_B T$$

$\frac{V}{N}$ و $\frac{U}{N}$ از تابع است

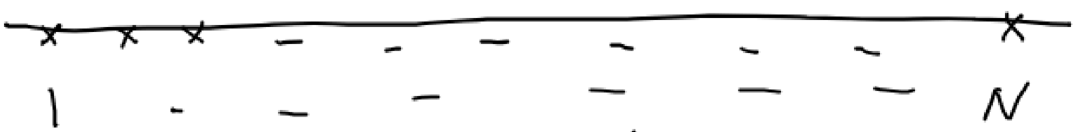
$$U = 3 N k_B T$$

پس μ از تابع است.

یک دستگاه از N ذره ی بی برهمکنش، که هرکدام
دو حالت دارند.

$\sigma = 0, 1$ $\qquad E_\sigma \qquad E_0$ و $E_1 \qquad \varepsilon_0 < \varepsilon_1$

قرارداد (بدون کاستن از کلیت)



ذرات مشابه ی بی برهمکنش تشخیص پذیر

انرژی $= \sum_i E_i \qquad E_i = \varepsilon_{\sigma(i)}$

$\Omega(U) =$ تعداد حالت‌های با انرژی U

N_0: تعداد ذرات با انرژی ε_0 (در حالت $\sigma=0$)

N_1: تعداد ذرات با انرژی ε_1 (در حالت $\sigma=1$)

$$U = N_1\varepsilon_1 + N_0\varepsilon_0$$

$U = N_0 \varepsilon_0 + N_1 \varepsilon_1 \qquad N = N_0 + N_1$

$\Longrightarrow$ N_0 و N_1 را مشخص میکنند

هر میکرو حالت: کدام یک از ذرات در حالت ۰ بود،

کدام یک از ذرات در حالت 1 بود

تعداد حالتهای با U ی معین (یعنی: N_0 و N_1 معین) $= \binom{N}{N_1} = \binom{N}{N_0}$

$$\Omega(U) = \frac{N!}{N_0!\ N_1!}$$

$$N_0 + N_1 = N \qquad N_0 \varepsilon_0 + N_1 \varepsilon_1 = U$$

$$N_1 = N - N_0 \qquad U = N\varepsilon_1 + N_0(\varepsilon_0 - \varepsilon_1)$$

$$= N\varepsilon_0 + N_1(\varepsilon_1 - \varepsilon_0)$$

$$\frac{d}{dN_0} = -\frac{d}{dN_1} \qquad \frac{d}{dU} = \frac{1}{\varepsilon_1 - \varepsilon_0}\frac{d}{dN_1}$$

$$\ln \Omega = N \ln N - N - N_1 \ln N_1 + N_1 - N_0 \ln N_0 + N_0$$

$$\frac{1}{k_B T} = \frac{1}{\varepsilon_1 - \varepsilon_0} \frac{d[\ln \Omega]}{d N_1} \qquad \frac{dN_0}{dN_1} = -1$$

$$= \frac{1}{\varepsilon_1 - \varepsilon_0} \left\{ -\ln N_1 + \ln N_0 \right\} = -\frac{1}{\varepsilon_1 - \varepsilon_0} \ln \frac{N_1}{N_0}$$

$\varepsilon_1 - \varepsilon_0 = \Delta$ فقط $\frac{1}{k_B T} = \beta$

$$\frac{N_1}{N_0} = e^{-\beta \Delta} \qquad N_0 + N_1 = N$$

$$N_1 = N \frac{e^{-\beta\Delta}}{1 + e^{-\beta\Delta}} \qquad N_0 = N \frac{1}{1 + e^{-\beta\Delta}}$$

$$\frac{N_1}{N} = \frac{e^{-\beta\frac{\Delta}{2}}}{e^{\frac{\beta\Delta}{2}} + e^{-\beta\frac{\Delta}{2}}} \qquad \frac{N_0}{N} = \frac{e^{\beta\frac{\Delta}{2}}}{e^{\frac{\beta\Delta}{2}} + e^{-\beta\frac{\Delta}{2}}}$$

$$\frac{N_1}{N_1} = \frac{e^{-\beta\frac{\Delta}{2}}}{2\,\mathrm{ch}\,\frac{\beta\Delta}{2}} \qquad \frac{N_0}{N} = \frac{e^{\frac{\beta\Delta}{2}}}{2\,\mathrm{ch}\,\beta\frac{\Delta}{2}}$$

$$\varepsilon_1 - \varepsilon_0 = \Delta \qquad \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_0}{2} = \bar{\varepsilon}$$

$$U = N_1\varepsilon_1 + N_0\varepsilon_0$$

$$\varepsilon_1 = \bar{\varepsilon} + \frac{\Delta}{2}$$

$$\frac{U}{N} = \frac{\varepsilon_1 e^{-\beta\frac{\Delta}{2}} + \varepsilon_0 e^{\beta\frac{\Delta}{2}}}{2\,\mathrm{ch}\,\beta\frac{\Delta}{2}} \qquad \varepsilon_0 = \bar{\varepsilon} - \frac{\Delta}{2}$$

$$\frac{U}{N} = \bar{\varepsilon} - \frac{\Delta}{2}\, \mathrm{th}\, \frac{\beta \Delta}{2}$$

$\beta \to +\infty$ $\quad T \to 0^+$ $\quad \frac{U}{N} \to \bar{\varepsilon} - \frac{\Delta}{2} = \varepsilon_0$

$\beta \to 0^+$ $\quad T \to +\infty$ $\quad \frac{U}{N} \to \bar{\varepsilon} \neq \varepsilon_1$

$$\frac{U}{N} \to \frac{\varepsilon_0 + \varepsilon_1}{2}$$

$\beta \to -\infty$

$\frac{U}{N} \to \bar{\varepsilon} + \frac{\Delta}{2} = \varepsilon_1$

اگر $\frac{U}{N}$ بیشتر از $\bar{\varepsilon}$ باشد، β باید منفی باشد.