آیا روش (تصنیف)های میکروکانونیک و کانونیک
هم‌ارزند؟

نشان میدهیم در تصنیف کانونیک، انرژی کل سیستم
هرچند معین نیست، پهنای آن کم است.

دقیقتر: در حد ترمودینامیک انحراف معیار انرژی
تقسیم بر اندازه به صفر میگراید.

یعنی در هر برهمکنشی ، افزایش یا کاهش ، چگالی انرژی

(یا انرژی بر اندازه) به صورت شمارا .

پس در این جا ، انرژی بر اندازه معین است .

تصویر کلاسیک عملاً همراه تصویر مکانیک کلاسیک شد .

محاسبه‌ی پهنای (انحراف معیار) انرژی ([illegible]).

$$\langle E \rangle = U$$

$$\mathrm{Var}(E) = \langle (E - \langle E \rangle)^2 \rangle = \langle (E - U)^2 \rangle$$

$$= \langle E^2 \rangle - \langle E \rangle^2$$

$$\langle E^2 \rangle = \sum_a P_a E_a^2 = \frac{1}{Z} \sum_a E_a^2 e^{-\beta E_a}$$

$$= \frac{1}{Z} \frac{d^2}{d\beta^2} \underbrace{\sum_a e^{-\beta E_a}}_{\to Z}$$

$$\langle E^2 \rangle = \frac{1}{Z} \frac{d^2 Z}{d\beta^2}$$

$$\langle E \rangle = \sum_a P_a E_a = \frac{1}{Z} \sum_a E_a e^{-\beta E_a}$$

$$= \frac{1}{Z} \frac{d}{d(-\beta)} \sum_a e^{-\beta E_a}$$

$$\langle E \rangle = -\frac{1}{Z} \frac{dZ}{d\beta}$$

$$\mathrm{Var}(E) = \langle E^2 \rangle - \langle E \rangle^2 = \frac{Z''}{Z} - \left(\frac{Z'}{Z}\right)^2$$

$$' : \frac{d}{d\beta} \qquad\qquad = \frac{d}{d\beta}\left(\frac{Z'}{Z}\right)$$

$$\mathrm{Var}(E) = -\frac{d}{d\beta}\langle E \rangle$$

یک حالت خاص از قضیه‌ی کلی: قضیه‌ی افت و خیز - پاسخ

$$P_a = \frac{1}{\mathcal{Z}} e^{\tilde{Y} X_a}$$

اگر

X یک کمیت،

$\tilde{Y}$ یک کمیت مزدوج با X

$$\mathrm{Var}(X) = \langle X^2 \rangle - \langle X \rangle^2$$

$$\langle X \rangle = \sum_a P_a X_a = \frac{1}{\mathcal{Z}} \sum_a X_a e^{\tilde{Y} X_a}$$

$$= \frac{1}{\mathcal{Z}} \frac{\partial \mathcal{Z}}{\partial \tilde{Y}}$$

$$\langle x^2 \rangle = \sum_a P_a x_a^2 = \frac{1}{Z} \sum_a x_a^2 e^{\tilde{Y} x_a}$$

$$= \frac{1}{Z} \frac{\partial^2 Z}{\partial \tilde{Y}^2}$$

$$\mathrm{Var}(x) = \langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2 = \frac{1}{Z} \frac{\partial^2 Z}{\partial \tilde{Y}^2} - \left(\frac{1}{Z} \frac{\partial Z}{\partial \tilde{Y}} \right)^2$$

$$= \frac{\partial}{\partial Y} \left(\frac{1}{Z} \frac{\partial Z}{\partial \tilde{Y}} \right)$$

(مهم جداً)

$$\overbrace{\mathrm{Var}(x)} = \frac{\partial \langle x \rangle}{\partial \tilde{Y}}$$

مهم

مطر، طير، قصير

$$P_a = \frac{1}{\mathcal{Z}} e^{\tilde{Y} x_a}$$

از کی ؟

$$E = -Y x_a - (\text{مستقل از } Y)$$

اگر در همیلتنی،

$$P_a = \frac{e^{-\beta E_a}}{Z} = \frac{e^{\beta(\text{مستقل از } Y)}}{Z} e^{\beta Y x_a}$$

$$\beta Y = \tilde{Y} \qquad \frac{e^{\beta(\text{مستقل از } Y)}}{Z} = \frac{1}{\mathcal{Z}}$$

$$P_a = \frac{e^{\tilde{Y} x}}{\mathcal{Z}}$$

مثال: دوقطبی مغناطیسی در میدان بیرونی:

$$E = -\underset{Y}{B}\,\underset{X}{M} + \cdots$$

$$\tilde{Y} = \beta B \qquad \langle M \rangle = \frac{1}{\beta Z}\frac{\partial Z}{\partial B}$$

$$\mathrm{Var}(M) = \frac{1}{\beta}\frac{\partial \langle M \rangle}{\partial B}$$

پذیرفتاری مغناطیسی (صرف نظر از ثابت‌هایی مثل μ_0)

$$\mathrm{Var}(E) = k_B T^2 C$$

$$\sigma(E) = \sqrt{\mathrm{Var}(E)} = \sqrt{k_B T^2 C}$$

$$\frac{\sigma(E)}{\Sigma} = \sqrt{k_B T^2 \frac{C}{\Sigma^2}} = \frac{\sqrt{k_B T^2 (C/\Sigma)}}{\sqrt{\Sigma}}$$

بی‌اندازه

مثلن تعداد ذرات

C فزونور است، چون مشتق U (فزونور) نسبت به T (ذاتی) است.

Σ فزونور است (اندازه است).

$\frac{C}{\Sigma}$ ذاتی است، پس در حد ترمودینامیک به یک ثابت
میگراید.

$$\sigma\left(\frac{E}{\Sigma}\right) \overset{\text{ترمودینامیک}}{=\!=} \frac{\text{ثابت}}{\sqrt{\Sigma}}$$

$$\sigma\left(\frac{E}{\Sigma}\right) \xrightarrow[\text{ترمودینامیک}]{} 0 \quad \text{مثل} \quad \frac{1}{\sqrt{\Sigma}}$$

متغیرهای معنی دار در حد ترمودینامیک :

متغیرهای ذاتی، با نسبت ۲ متغیر خارجی ،

$\underbrace{}$

این نسبت ذاتی میشود.

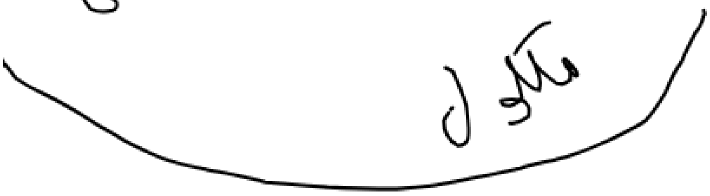
متغیر ذاتی همتا طی با انرژی، در حد ترمودینامیک

افت خیزش صفر میشود.

این هم‌ارزی ی تئوری‌های میکروکانونیک و کانونیک را نتیجه میدهد

(البته فقط در حد ترمودینامیک).

یک مولکول گاز در یک ظرف شامل تعداد زیادی



مولکول

جسم

شبیه یک مولکول گاز

منزوی رفتار نمیکند.

افت و خیز مغناطیدگی با پذیرفتاری مغناطیسی متناسب است.

انرژی:

$$Var(E) = -\frac{\partial \langle E \rangle}{\partial \beta}$$

$$Var(E) = -\frac{\partial U}{\partial \beta} \qquad C = \frac{\partial U}{\partial T}$$

ظرفیت گرمایی

$$-\frac{\beta \partial U}{\partial \beta} = T \frac{\partial U}{\partial T} = TC$$

$$\beta = \frac{1}{k_B T} \qquad -\frac{\partial U}{\partial \beta} = \frac{T}{\beta} C = k_B T^2 C$$

اولی افت و خیز انرژی دارد

دومی افت و خیز انرژیش صفر است.

اگر یک ظرف شامل N (یک عدد بزرگ) مولکول گاز

در دمای معین.

یا یک ظرف منزوی شامل N مولکول گاز.

برای اولی:

$$\langle E \rangle = \frac{3}{2} N k_B T$$

$$\sigma\left(\frac{E}{N}\right) = \sqrt{\frac{\frac{3}{2} N (k_B T)^2}{N^2}} = \sqrt{\frac{3}{2N}}\, k_B T$$

$$N \to \infty \qquad \sigma\left(\frac{E}{N}\right) \to 0$$

برای دومی: E معین ، $\frac{E}{N}$ هم معین

$$\sigma\left(\frac{E}{N}\right) = 0$$

اولی با دومی هم‌ارز میشود. $N \to$