$$J = \frac{1}{4}\frac{N}{V}\langle|\vec v|\rangle \qquad J = \frac{\text{تعداد ذرات}}{\text{زمان} \times \text{مساحت}}$$

$$P = \frac{1}{3}\frac{N}{V}\langle \vec p\cdot\vec v\rangle \qquad P = \text{فشار}$$

$\hookrightarrow$

$$UR: \quad \vec v = c\,\hat v \quad \vec p = |\vec p|\,\hat p \quad \hat p = \hat v$$

فوالنیسی آلک ذره (6) $\qquad \vec p\cdot\vec v = c|\vec p| = \varepsilon \qquad$ انرژی یک ذره

$$P = \frac{1}{3}\frac{N}{V}\langle\varepsilon\rangle = \frac{1}{3}\frac{U}{V}$$

NR
نانسبیتی تک ذره

$$\vec{p} = m\vec{v} \qquad \vec{p}\cdot\vec{v} = m\vec{v}\cdot\vec{v} = 2\varepsilon$$

$$P = \frac{1}{3}\frac{N}{V}\langle 2\varepsilon\rangle \qquad P = \frac{2}{3}\frac{U}{V}$$

یک ظرف به حجم V با یک روزنه‌ی کوچک به مساحت S شامل N مولکول از یک گاز کامل کلاسیک و نانسبیتی

(نا کوانتمی) انرژی تک ذره (ε)

گاز از این شکاف بیرون می‌رود:

$$\frac{dN}{dt} = -JS = -\frac{NS}{4V}\langle|\vec{v}|\rangle$$

اگر $\langle|\vec{v}|\rangle$ ثابت باشد،

$$N(t) = N(0)\,\exp\left[-\frac{S\langle|\vec{v}|\rangle}{4V}\,t\right]$$

$$? = \langle|\vec{v}|\rangle$$

توزیع برای سرعت: ناکوانتمی و نانسبیتی

$$\rho(a) = \mathcal{N} e^{-\beta \mathcal{E}(a)}$$

a: حالت ذره، مکان‌ها و تکانه‌ها را [illegible]

$$\mathcal{E}(a) = \frac{\vec{p}\cdot\vec{p}}{2m} + \mathcal{E}'(a')$$

حالت در چارچوب مرکز جرم

مکان‌های نسبی، تکانه‌های نسبی متناظر

انرژی در چارچوب مرکز جرم

$$\rho(a) = \mathcal{N}\, e^{-\beta \mathcal{E}'(a')}\, e^{-\beta\frac{\vec{p}\cdot\vec{p}}{2m}} \qquad da = da'\, d^3p$$

$$\int da' \longrightarrow \rho_{\vec{P}}(\vec{p}) = \left[\mathcal{N}\int da'\, e^{-\beta\mathcal{E}'(a')}\right] e^{-\frac{\vec{p}\cdot\vec{p}}{2m}}$$

$$\rho_{\vec{P}}(\vec{p}) = \tilde{\mathcal{N}}\, e^{-\frac{\vec{p}\cdot\vec{p}}{2m}} \qquad \vec{P} = m\vec{v}$$

$$\vec{p} = m\vec{u}$$

$$\rho_{\vec{P}}(\vec{p})\, d^3p = \rho_{\vec{P}}(m\vec{u})\, m^3 d^3u = \rho_{\vec{v}}(\vec{u})\, d^3u$$

$$\rho_{\vec{v}}(\vec{u}) = m^3 \rho_{\vec{p}}(m\vec{u}) = \tilde{\mathcal{N}}\, e^{-\beta m \frac{\vec{u}\cdot\vec{u}}{2}}$$

توزیع تکانه

توزیع سرعت

$$1 = \int d^3u\, \rho_{\vec{v}}(u) = \tilde{\mathcal{N}} \left(\sqrt{\frac{2\pi}{\beta m}}\right)^3$$

$$\tilde{\mathcal{N}} = \left(\sqrt{\frac{\beta m}{2\pi}}\right)^3 \qquad \rho_{\vec{v}}(\vec{u}) = \left(\frac{\beta m}{2\pi}\right)^{3/2} e^{-\beta m \frac{\vec{u}\cdot\vec{u}}{2}}$$

$$\langle f(\vec{v})\rangle = \int d^3u\, \rho_{\vec{v}}(\vec{u})\, f(\vec{u})$$

$$\langle|\vec{v}|\rangle = \tilde{\tilde{\mathcal{N}}} \int d^3u \, |\vec{u}| \, e^{-\beta \frac{\vec{u}\cdot\vec{u}}{2} m}$$

(از جمله

$$d^3u = u^2 du \, d\Omega \qquad u = |\vec{u}|$$

عنصر زاویه فضایی

$$\langle|\vec{v}|\rangle = \tilde{\tilde{\mathcal{N}}} \int u^2 du \, d\Omega \;\; u \, e^{-\frac{\beta u^2}{2} m}$$

$$= 4\pi \, \tilde{\tilde{\mathcal{N}}} \int_0^\infty du \; u^3 \, e^{-\frac{\beta u^2}{2} m}$$

$$\int_0^\infty du \; u^{j+2} \, e^{-\alpha u^2} = -\frac{d}{d\alpha} \int_0^\infty du \; u^j \, e^{-\alpha u^2}$$

$$\int_0^\infty du\, u^3 e^{-\alpha u^2} = -\frac{d}{d\alpha}\int_0^\infty du\, u\, e^{-\alpha u^2}$$

$$= -\frac{d}{d\alpha}\left[-\frac{1}{2\alpha} e^{-\alpha u^2}\right]_{u=0}^{u=\infty} = -\frac{d}{d\alpha}\left(\frac{1}{2\alpha}\right) = \frac{1}{2\alpha^2}$$

$$\alpha = \frac{\beta m}{2} \qquad \frac{1}{2\alpha^2} = \frac{2}{\beta^2 m^2}$$

$$\langle|\vec{v}|\rangle = 8\pi \tilde{\mathcal{N}} \frac{1}{\beta^2} = 8\pi\left(\frac{m\beta}{2\pi}\right)^{3/2}\frac{1}{\beta^2 m^2}$$

$$\langle|\vec{v}|\rangle = \sqrt{\frac{8}{\pi m \beta}} = \sqrt{\frac{8 k_B T}{\pi m}}$$

انرژی بر ذره   میانگین

$$\varepsilon = \frac{\alpha}{2} k_B T$$

آیا T ثابت است؟

α : تعداد درجه‌ی آزادی‌های مجموعه‌ی مشتق

ذراتی در دماهای معمول: $\alpha = 5$

تک اتمی $\alpha = 3$

انرژی بر ذره ثابت است؟

$$dU = (dN)\ \varepsilon_0$$

ε_0 : میانگین انرژی بر ذره برای آنها که بیرون میروند

$$dU = d(N\varepsilon) = \varepsilon\, dN + N\, d\varepsilon$$

$$N\, d\varepsilon = (\varepsilon_0 - \varepsilon)\, dN$$

$$\varepsilon = \frac{\alpha}{2} k_B T$$

برای ذراتی که بیرون میروند، توزیع سرعت فرق میکنه

تحلیل سرعت برای ذراتی که بیرون می‌روند.

$$\frac{\text{تعداد ذراتی که بیرون می‌روند و سرعتشان در بازه‌ی } d^3u \text{ است}}{S \times \text{زمان}} = \rho_{\vec{v}}(\vec{u})\, d^3u\, (\vec{u}\cdot\hat{z})\, \frac{N}{V}\, \Theta(\vec{u}\cdot\hat{z})$$

$\hat{z}$ جهت عمود بر روزنه به بیرون

$$\rho_{0\vec{v}}(\vec{u}) = \tilde{A}_0 \frac{N}{V}\, \vec{u}\cdot\hat{z}\, \rho_{\vec{v}}(\vec{u})\, \Theta(\vec{u}\cdot\hat{z})$$

$$= \mathcal{A}_0\, \vec{u}\cdot\hat{z}\, \Theta(\vec{u}\cdot\hat{z})\, \rho_{\vec{v}}(\vec{u})$$

$$\langle f(\vec{v}) \rangle_0 = \int d^3u \, \rho_0(\vec{u}) \, f(\vec{u})$$

$$= \frac{\int d^3u \, \rho_{\vec{v}}(\vec{u}) \, \overbrace{(\vec{u}\cdot\hat{z}) \, \Theta(\vec{u}\cdot\hat{z})}^{u_z \text{ مثبت}} \, f(\vec{u})}{\int d^3u \, \rho_{\vec{v}}(\vec{u}) \, (\vec{u}\cdot\hat{z}) \, \Theta(\vec{u}\cdot\hat{z}) \, f(\vec{u})}$$

$$\frac{1}{2\cdot J} = \mathcal{N}_0$$

$$\rho_{\vec{v}}(\vec{u}) = \text{بهنجارش} \cdot e^{-\beta \frac{m \vec{u}\cdot\vec{u}}{2}}$$

$$= \text{بهنجارش} \cdot \times e^{-\beta \frac{m u_x^2}{2}} \times e^{-\beta \frac{m u_y^2}{2}} \times e^{-\beta \frac{m u_z^2}{2}}$$

اگر $f(\vec{u})$ به u_z وابسته نباشد، انتگرال بر u_z از صورت و مخرج حذف میشود و $(\vec{u}\cdot\hat{z})\Theta(\vec{u}\cdot\hat{z})$ از بین میرود:

پس برای کمیتهای مستقل از v_z، میانگین درون و بیرون یکسان است.

پس تنها چیزی که فرق میکند بخشی از انرژی است که به v_z وابسته است: مستقل از v_z + $m\frac{v_z^2}{2}$ = انرژی

$$\varepsilon_0 - \left\langle \frac{m v_z^2}{2} \right\rangle_0 = \varepsilon - \left\langle \frac{m v_z^2}{2} \right\rangle$$

$$\varepsilon_0 = \varepsilon + \left\langle \frac{m v_z^2}{2} \right\rangle_0 - \left\langle \frac{m v_z^2}{2} \right\rangle$$

$$\langle v_z^2 \rangle_0 = \frac{\int d^3u \, e^{-\beta m \frac{\vec{u}\cdot\vec{u}}{2}} \, u_z \Theta(u_z) \, u_z^2}{\int d^3u \, e^{-\beta m \frac{\vec{u}\cdot\vec{u}}{2}} \, u_z \Theta(u_z)}$$

$$= \frac{\int_0^\infty du_z \, e^{-\beta m \frac{u_z^2}{2}} \, u_z^3}{\int_0^\infty du_z \, e^{-\beta m \frac{u_z^2}{2}} \, u_z} = \frac{-\frac{d}{d\left(\frac{\beta m}{2}\right)} \left[2 \cdot \mathcal{J} \right]}{2 \cdot \mathcal{J}}$$

$$Z \zeta^0 = \int_0^\infty du_z \, e^{-\frac{\beta m u_z^2}{2}} u_z = \frac{2}{\beta m} \int_0^\infty dw \, e^{-w^2} w$$

$$\frac{\beta m}{2} u_z^2 =: w^2$$

$$= \frac{2}{\beta m} A$$

$$-\frac{d(Z \zeta^0)}{d\left(\frac{\beta m}{2}\right)} = \frac{A}{\left(\frac{\beta m}{2}\right)^2} = \frac{2}{\beta m} (Z \zeta^0)$$

$$\langle v_z^2 \rangle_0 = \frac{2}{\beta m} \qquad \left\langle \frac{\beta m v_z^2}{2} \right\rangle_0 = 1$$

$$\left\langle \frac{m v_z^2}{2} \right\rangle_0 = k_B T$$

درس: تعادل ترمودینامیکی، کلاسیک (ناکوانتمی)

← همپارش

نتیجه:

$$p_z = m v_z$$

$$\frac{m v_z^2}{2} = p_z \frac{v_z}{2}$$

$$\left\langle \frac{m v_z^2}{2} \right\rangle = \frac{1}{2} \left\langle p_z v_z \right\rangle$$

$$= \frac{1}{2} k_B T$$

$$\left\langle \frac{m v_z^2}{2} \right\rangle_0 - \left\langle \frac{m v_z^2}{2} \right\rangle = \frac{1}{2} k_B T$$

$$\varepsilon_0 = \varepsilon + \frac{k_B T}{2} \qquad \varepsilon = \frac{\alpha}{2} k_B T$$

$$dU = d(N\varepsilon) = \varepsilon\, dN + N\, d\varepsilon$$

$$N\, d\varepsilon = (\varepsilon_0 - \varepsilon)\, dN$$

$$\frac{dN}{N} = \frac{d\varepsilon}{\varepsilon_0 - \varepsilon} = \frac{\frac{\alpha}{2} k_B\, dT}{\frac{k_B T}{2}}$$

$$\frac{dN}{N} = \alpha \frac{dT}{T} \qquad \ln \frac{N}{N_0} = \alpha \ln \frac{T}{T_0}$$

$$\frac{N}{N_0} = \left(\frac{T}{T_0}\right)^{\alpha}$$

اولی

$$\frac{T}{T_0} = \left(\frac{N}{N_0}\right)^{\frac{1}{\alpha}} \qquad \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} = \left(\frac{N}{N_0}\right)^{\frac{1}{\alpha}}$$

$$\frac{dN}{dt} = -\frac{1}{4}\frac{NS}{V}\langle|\vec{v}|\rangle$$

$$\langle|\vec{v}|\rangle = \sqrt{\frac{8k_BT}{\pi m}} \qquad \frac{\langle|\vec{v}|\rangle}{\langle|\vec{v}_0|\rangle} = \sqrt{\frac{T}{T_0}} = \left(\frac{N}{N_0}\right)^{\frac{1}{2\alpha}}$$

$$\frac{d(N/N_0)}{dt} = -\frac{S\langle|\vec{v}_0|\rangle}{4V}\frac{\langle|\vec{v}|\rangle}{\langle|\vec{v}_0|\rangle}\frac{N}{N_0} = \left(\frac{N}{N_0}\right)^{1+\frac{1}{2\alpha}}$$

$$\left(\frac{N}{N_0}\right)^{-1-\frac{1}{2\alpha}} d\left(\frac{N}{N_0}\right) = -\frac{S\langle|\vec{v}_0|\rangle}{4V}\,dt$$

$$-2\alpha\left[\left(\frac{N}{N_0}\right)^{-\frac{1}{2\alpha}} - 1\right] = -\frac{S\langle|\vec{v}_0|\rangle}{4V}\,t$$

$$\left(\frac{N}{N_0}\right)^{-\frac{1}{2\alpha}} = 1 + \frac{S\langle|\vec{v}_0|\rangle}{8\alpha V}\,t$$

$$\frac{N}{N_0} = \left[1 + \frac{S\langle|\vec{v}_0|\rangle}{8\alpha V}\,t\right]^{-2\alpha}$$

$$\frac{N}{N_0} = \left[1 + \frac{S\langle|\vec{v}_0|\rangle}{8\alpha V}t\right]^{-2\alpha}$$

$$\frac{T}{T_0} = \left[1 + \frac{S\langle|\vec{v}_0|\rangle}{8\alpha V}t\right]^{-2}$$

تک اتمی : $\alpha = 3$

گاز پیچیده‌تر α زیاد میشود

برای مولکولهای سنگین در دماهای معمولی، α درست بالا به 5 یا ۶ میرسد (فقط درجه‌های آزادی دورانی فعال شد)

برای مولکولهای پیچیده‌تر (با جهتهای بیشتر) ممکن است

به جز بعضی از درجه‌های ارتعاشی آنها کم شود که

این درجه‌ها هم فعال شوند، و α بیشتر شود.

$\alpha \to \infty$

$$\frac{N}{N_0} = e^{-\frac{S\langle|\vec{v}_0|\rangle t}{4V}}$$

$$(1+\varepsilon)^{\frac{b}{\varepsilon}} \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{} e^{b}$$

$$\frac{T}{T_0} = 1$$

میانگین

انرژی هر ذره‌ی بیرون چندان با میانگین انرژی هر ذره‌ی درون فرق نمی‌کند

ج: در حالت های بسیار بزرگ، با گذشت زمان

دما کم میشود. چرا؟

ذرات با انرژی بیشتر، سریعتر بیرون میروند.

پس میانگین انرژی برای ذرات درون کم میشود.

مثل اتفاقی که در طی تبخیر رخ میدهد:

ذرات پر انرژی سریعتر از مایع بیرون میروند

مایع تبخیر که میشود سرد میشود:
گرمای زمان تبخیر از خود مایع گرفته میشود.