X1-002 (2001/04/01)

تابعِ‌گرین ِ معادله یِ موج در بعدها یِ مختلف

محمد خرمی

mamwad@mailaps.org

رابطه یِ تابعِ‌گرین [a] ها یِ مختلف ِ معادله یِ موج در بعدها یِ مختلف، با هم و با تابعِ‌گرین [a]ِ معادله یِ لَپلَس [b] بررسی می‌شود. با استفاده از این‌ها، تابعِ‌گرین [a] ها یِ معادله یِ موج در بعدها یِ مختلف را به دست می‌آوریم.

1 معادله یِ موج و تابعِ‌گرین ِ آن

معادله یِ (هم‌گن ِ) موج به شکل ِ

$$\left(-\frac{\partial^2}{\partial t^2}+\nabla^2\right)\psi=0 \qquad (1)$$

است. در این‌جا مختصات ِ فضازمان $(t,\mathbf{r})$ است، فضازمان تخت است، و سرعت ِ موج را یک کرده ایم. جواب ِ کلی یِ معادله یِ (1) ترکیب ِ خطی یِ دل‌بخواه ی از موج‌ها یِ تخت ِ $\exp(-i\omega t+i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r})$ است، که ω و $\mathbf{k}$ شرط ِ پاشنده‌گی یِ

$$\omega^2-\mathbf{k}\cdot\mathbf{k}=0 \qquad (2)$$

را بر می‌آورند. معادله یِ موج ِ با چشمه

$$\left(-\frac{\partial^2}{\partial t^2}+\nabla^2\right)\psi=j \tag{3}$$

است، که در آن j تابع ِ دل‌بخواه ی از فضازمان است. از آن‌جا که این معادله خطی است، جواب ِ این معادله

$$\psi(t,\mathbf{r})=\int \mathrm{d}t\;\mathrm{d}V\;G(t,\mathbf{r};t',\mathbf{r}')j(t',\mathbf{r}')+\psi_{\mathrm{h}}(t,\mathbf{r}) \tag{4}$$

است. در این‌جا ψ_{h} تابع ِ دل‌بخواه ی است که معادله یِ هم‌گن ِ موج (1) را بر می‌آورد، D بعد ِ فضا است، و G تابعِ‌گرین [a]ِ معادله یِ موج است، که معادله یِ

$$\left(-\frac{\partial^2}{\partial t^2}+\nabla^2\right)G(t,\mathbf{r};t',\mathbf{r}')=\delta(t-t')\delta^D(\mathbf{r}-\mathbf{r}') \tag{5}$$

را بر می‌آورد. معادله یِ موج مستقل‌اززمان و مستقل‌ازفضا است، چون در عمل‌گرِدیفرانسیل ِ طرفِ‌چپ ِ معادله یِ موج، تابع ِ صریح ی از فضازمان وجود ندارد. نتیجه این است که G را می‌شود تابع ِ تفاضل ِ متغیرها یِ بدونِ‌پریم و متغیرها یِ پریم‌دار گرفت:

$$G(t,\mathbf{r};t',\mathbf{r}')=G(t-t',\mathbf{r}-\mathbf{r}'). \tag{6}$$

در این صورت به جا یِ معادله یِ (5) می‌شود معادله یِ

$$\left(-\frac{\partial^2}{\partial t^2}+\nabla^2\right)G(t,\mathbf{r})=\delta(t)\delta^D(\mathbf{r}) \tag{7}$$

را به کار برد.

2 تابعِ‌گرین‌ها یِ مختلف ِ معادله یِ موج

جواب ِ معادله یِ (5) یا معادله یِ (7) یک‌تا نیست. در واقع اگر به جواب ی از معادله یِ (7)، جواب ِ دل‌بخواه ی از معادله یِ هم‌گن ِ (1) را بیفزاییم، جوابِ دیگر ی از معادله یِ (7) به دست می‌آید. راه ِ دیگر ِ دیدن ِ این مطلب استفاده از تبدیل ِ فوریه [c] است. تبدیلِ‌فوریه [c] یِ معادله یِ (7) می‌شود

$$(\omega^2-\mathbf{k}\cdot\mathbf{k})\tilde{G}(\omega,\mathbf{k})=1. \tag{8}$$

جواب ـِ این معادله یک‌تا نیست. در واقع هر تابع ی به شکل ـِ

$$\tilde{G}_{\mathrm{h}} = f(\omega, \mathbf{k})\delta(\omega^2 - \mathbf{k}\cdot\mathbf{k}) \tag{9}$$

معادله یِ هم‌گن ـِ

$$(\omega^2 - \mathbf{k}\cdot\mathbf{k})\tilde{G}_{\mathrm{h}}(\omega, \mathbf{k}) = 0 \tag{10}$$

را بر می‌آورد. در این‌جا f یک تابع ـِ دل‌بخواه است. معنی یِ (9) این است که G_{h} ترکیب ی از موج‌ها یِ تخت است، که رابطه یِ پاشنده‌گی یِ (2) را بر می‌آورند. بنابراین، با افزودن ـِ تابع ی مثل ـِ $\tilde{G}_{\mathrm{h}}$ به یک جواب ـِ معادله یِ (8)، جواب ـِ دیگر ی از این معادله به دست می‌آید. نکته یِ دیگر (که البته به همین موضوع مربوط است) این است که برا یِ به‌دست‌آوردن ـِ تابعِ‌گرین [a] از رو یِ تبدیلِ‌فوریه [c] یِ آن، باید این تبدیلِ‌فوریه [c] را به‌دقت تعریف کرد. جواب ـِ معادله یِ (8)

$$\tilde{G}(\omega, \mathbf{k}) = \mathrm{pf}\frac{1}{\omega^2 - \mathbf{k}\cdot\mathbf{k}} + \tilde{G}_{\mathrm{h}}(\omega, \mathbf{k}) \tag{11}$$

است [1]، که در آن $\mathrm{pf}(1/x)$ توزیع ی است که اثر ـِ آن بر تابعِ آزمون ـِ ϕ

$$\langle \mathrm{pf}(1/x), \phi(x)\rangle = \lim_{\epsilon\to 0^+}\left(\int_{-\infty}^{-\epsilon} + \int_{\epsilon}^{\infty}\right)\frac{\mathrm{d}x\ \phi(x)}{x} \tag{12}$$

است. سه انتخاب ـِ خاص برا یِ $\tilde{G}$ عبارت اند از تابعِ‌گرین [a] ـِ تأخیری:

$$\tilde{G}_{\mathrm{R}} = \frac{1}{(\omega + i\epsilon)^2 - \mathbf{k}\cdot\mathbf{k}}, \tag{13}$$

تابعِ‌گرین [a] ـِ تقدمی:

$$\tilde{G}_{\mathrm{A}} = \frac{1}{(\omega - i\epsilon)^2 - \mathbf{k}\cdot\mathbf{k}}, \tag{14}$$

و تابعِ‌گرین [a] ـِ فاین‌مَن [d]:

$$\tilde{G}_{\mathrm{F}} = \frac{1}{\omega^2 - \mathbf{k}\cdot\mathbf{k} + i\epsilon}. \tag{15}$$

در هر سه‌مورد، منظور حد ـِ $\epsilon \to 0^+$ است. رابطه یِ

$$G(t, \mathbf{r}) = \frac{1}{(2\pi)^{D+1}}\int \mathrm{d}\omega\ \mathrm{d}^D k\ \tilde{G}(\omega, \mathbf{k})\exp(-i\omega t + i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}) \tag{16}$$

هر یک از این تابعِ گرین [a] ها را به تبدیلِ فوریه [c] یِشان مربوط می‌کند. انتگرال ِ رو يِ ω را، برا يِ $t > 0$ و $t < 0$ می‌توان به انتگرال رو يِ یک مسیر ِ بسته در صفحه يِ مختلط ِ ω تبدیل کرد:

$$G(t, \mathbf{r}) = \frac{1}{(2\pi)^{D+1}} \int \mathrm{d}^D k \oint_{S_\pm} \mathrm{d}\omega\ \tilde{G}(\omega, \mathbf{k}) \exp(-i\omega t + i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}), \qquad \pm t > 0. \quad (17)$$

در این‌جا S_+ مسیر ی است که از $\omega \to -\infty$ شروع می‌شود، رو يِ خط ِ حقیقی به $\omega \to \infty$ می‌رود، و سپس رو يِ یک نیم‌دایره يِ بی‌نهایت در نیم‌صفحه يِ $\Im(\omega) < 0$ به $\omega \to -\infty$ بر می‌گردد. S_- مسیر ی است که از $\omega \to -\infty$ شروع می‌شود، رو يِ خط ِ حقیقی به $\omega \to \infty$ می‌رود، و سپس رو يِ یک نیم‌دایره يِ بی‌نهایت در نیم‌صفحه يِ $\Im(\omega) > 0$ به $\omega \to -\infty$ بر می‌گردد. از این‌جا دیده می‌شود

$$G_{\mathrm{R}} = 0, \qquad t < 0, \qquad (18)$$

و

$$G_{\mathrm{A}} = 0, \qquad t > 0, \qquad (19)$$

چون در هر یک از این حالت‌ها انتگرال‌ده يِ تابع ِ ω، درون ِ پربند ِ انتگرال‌گیری تحلیلی است. علت ِ اسم‌گذاری يِ تأخیری و تقدمی هم این است که تابعِ گرین [a] ِ تأخیری فقط در $t > 0$ مخالف ِ صفر است و تابعِ گرین [a] ِ تقدمی فقط در $t < 0$. در موردِ تابعِ گرین [a] ِ فاین‌مَن [d]، دیده می‌شود در $t > 0$ فقط جمله‌ها يِ با بس‌آمد ِ (ω يِ) مثبت باقی می‌مانند، چون در این حالت قطب ِ $\omega = -(\mathbf{k}\cdot\mathbf{k})^{1/2}$ خارج ِ پربند ِ انتگرال‌گیری است. در $t < 0$، فقط جمله‌ها يِ با بس‌آمد ِ منفی باقی می‌مانند.

حالا دو تابع ِ کمکی يِ G_+ و G_- را در نظر بگیرید. تعریف ِ این‌ها شبیه ِ (16) است، جز این که مسیر ِ انتگرال‌گیری در صفحه يِ مختلط ِ ω خط ِ حقیقی نیست:

$$G_\pm(t, \mathbf{r}) = \frac{1}{(2\pi)^{D+1}} \int \mathrm{d}^D k \oint_{C_\pm} \mathrm{d}\omega\ \frac{1}{\omega^2 - \mathbf{k}\cdot\mathbf{k}} \exp(-i\omega t + i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}). \qquad (20)$$

C_+ پربند ی است که نقطه يِ $\omega = (\mathbf{k}\cdot\mathbf{k})^{1/2}$ را در جهت ِ پادساعت‌گرد دور می‌زند و نقطه يِ $\omega = -(\mathbf{k}\cdot\mathbf{k})^{1/2}$ بیرون ِ آن است. C_- پربند ی است که نقطه يِ $\omega = -(\mathbf{k}\cdot\mathbf{k})^{1/2}$ را در جهت ِ پادساعت‌گرد دور می‌زند و نقطه يِ $\omega = (\mathbf{k}\cdot\mathbf{k})^{1/2}$ بیرون ِ آن است. این‌ها در معادله يِ (7) صدق نمی‌کنند اما (چنان‌که خواهیم دید)

تابعِ‌گرین [a] ها یِ تأخیری، تقدمی، و فاین‌مَن [d] را می‌شود بر حسب ِشان نوشت. برا یِ ساده‌گی، به این دوتابع ِ کمکی هم تابعِ‌گرین [a] می‌گوییم.

3 ارتباط ِ تابعِ‌گرین‌ها یِ مختلف با هم

با تعریف‌ها یِ بخش ِ قبل، روشن است که

$$\begin{aligned} G_{\mathrm{R}}(t,\mathbf{r}) &= -\theta(t)[G_+(t,\mathbf{r})+G_-(t,\mathbf{r})],\\ G_{\mathrm{A}}(t,\mathbf{r}) &= \theta(-t)[G_+(t,\mathbf{r})+G_-(t,\mathbf{r})],\\ G_{\mathrm{F}}(t,\mathbf{r}) &= -\theta(t)G_+(t,\mathbf{r})+\theta(-t)G_-(t,\mathbf{r}). \end{aligned} \tag{21}$$

از رابطه یِ (20) می‌شود G_+ و G_- را به یک‌دیگر و به مزدوجِ‌مختلط‌ها یِشان مربوط کرد. داریم

$$G_+(-t,\mathbf{r}) = -G_-(t,\mathbf{r}). \tag{22}$$

برا یِ رسیدن به این رابطه از تغییرِمتغیر ِ $z=-\omega$ استفاده شده است. پربند ِ انتگرال‌گیری برا یِ متغیر ِ z خم ِ C_- است، که هر نقطه یِ آن قرینه یِ یک نقطه یِ خم ِ C_+ است. از سو یِ دیگر،

$$G_+(-t,\mathbf{r}) = -G_+^*(t,\mathbf{r}). \tag{23}$$

برا یِ رسیدن به این رابطه از تغییرِمتغیر ِ $s=\omega^*$ استفاده شده است. پربند ِ انتگرال‌گیری برا یِ متغیر ِ s پربند ی است که هر نقطه یِ آن مزدوجِ‌مختلط ِ یک نقطه یِ پربند ِ C_+ است. این پربند همان C_+ می‌شود که در جهت ِ ساعت‌گرد پیموده می‌شود. بنابراین، انتگرال رو یِ این پربند، منها یِ انتگرال رو یِ پربند ِ C_+ است. نتیجه این که

$$\begin{aligned} G_+(-t,\mathbf{r}) &= -G_-(t,\mathbf{r}) = -G_+^*(t,\mathbf{r}),\\ G_-(-t,\mathbf{r}) &= -G_+(t,\mathbf{r}) = -G_-^*(t,\mathbf{r}). \end{aligned} \tag{24}$$

با استفاده از این رابطه‌ها و رابطه‌ها یِ (21)، می‌شود همه یِ این تابع‌ها را بر حسب ِ تابعِ‌گرین [a] ِ فاین‌مَن [d] نوشت:

$$G_+(t,\mathbf{r}) = -\theta(t)G_{\mathrm{F}}(t,\mathbf{r})+\theta(-t)G_{\mathrm{F}}^*(t,\mathbf{r}),$$

$$
\begin{aligned}
G_-(t,\mathbf{r}) &= -\theta(t)G_{\mathrm{F}}^*(t,\mathbf{r}) + \theta(-t)G_{\mathrm{F}}(t,\mathbf{r}),\\
G_{\mathrm{R}}(t,\mathbf{r}) &= \theta(t)[G_{\mathrm{F}}(t,\mathbf{r}) + G_{\mathrm{F}}^*(t,\mathbf{r})],\\
G_{\mathrm{A}}(t,\mathbf{r}) &= \theta(-t)[G_{\mathrm{F}}(t,\mathbf{r}) + G_{\mathrm{F}}^*(t,\mathbf{r})]. \qquad (25)
\end{aligned}
$$

نتیجه ي این رابطه‌ها آن است که با داشتن ِ تابعِ گرین [a]ِ فاین‌مَن [d]، چهارتابع ِ دیگر مشخص می‌شوند.

4 رابطه ي بازگشتی برا ي تابعِ گرین بر حسب ِ بعد ِ فضازمان

شکل ِ کلی ي پنج‌تابع ی که معرفی کردیم

$$
G(t,\mathbf{r}) = \frac{1}{(2\pi)^{D+1}} \int \mathrm{d}^D k \int_C \mathrm{d}\omega\, \frac{1}{\omega^2 - \mathbf{k}\cdot\mathbf{k}} \exp(-i\omega t + i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}) \qquad (26)
$$

است. بسته به این که پربند ِ C چه باشد، تابع‌ها ي مختلف به دست می‌آیند. این عبارت را می‌شود چنین نوشت.

$$
\begin{aligned}
G^{(D)}(t,\mathbf{r}) = {}& \frac{S_{D-2}}{(2\pi)^{D+1}} \int_0^\infty k^{D-1}\mathrm{d}k \int_0^\pi \sin^{D-2}\theta\, \mathrm{d}\theta\\
&\times \int_C \mathrm{d}\omega\, \frac{1}{\omega^2 - k^2} \exp(-i\omega t + ikr\cos\theta). \qquad (27)
\end{aligned}
$$

در این‌جا S_D مساحت ِ یک کره ي D بعدی به شعاع ِ یک است. در رسیدن به این رابطه از این استفاده شده که پربند ِ C فقط به اندازه ي k بسته‌گی دارد. از عبارت ِ بالا نسبت به r مشتق می‌گیریم. نتیجه می‌شود

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial r}G^{(D)}(t,\mathbf{r}) = {}& \frac{S_{D-2}}{(2\pi)^{D+1}} \int_0^\infty k^{D-1}\mathrm{d}k \int_0^\pi \sin^{D-2}\theta\, \mathrm{d}\theta\\
&\times \int_C \mathrm{d}\omega\, \frac{1}{\omega^2 - k^2} \exp(-i\omega t + ikr\cos\theta) ik\cos\theta. \qquad (28)
\end{aligned}
$$

با یک انتگرال‌گیری ي جزئ‌به‌جزئ نسبت به θ نتیجه می‌شود

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial r}G^{(D)}(t,\mathbf{r}) = {}& \frac{S_{D-2}}{(2\pi)^{D+1}} \int_0^\infty k^{D-1}dk \int_0^\pi \sin^{D-2}\theta\, d\theta\\
&\times \int_C d\omega\, \frac{1}{\omega^2 - k^2} \exp(-i\omega t + ikr\cos\theta) \frac{-k^2 r\sin^2\theta}{D-1}. \qquad (29)
\end{aligned}
$$

از این‌جا نتیجه می‌شود

$$\frac{\partial}{r\partial r}G^{(D)}(t,\mathbf{r})=\frac{-4\pi^2 S_{D-2}}{(D-1)S_D}G^{(D+2)}(t,\mathbf{r}). \tag{30}$$

با جای‌گذاری یِ

$$S_D=\frac{2\pi^{(D+1)/2}}{\Gamma[(D+1)/2]}, \tag{31}$$

نتیجه می‌شود

$$G^{(D+2)}(t,\mathbf{r})=-\frac{1}{\pi}\frac{\partial}{\partial r^2}G^{(D)}(t,\mathbf{r}). \tag{32}$$

این رابطه برای هر پنج‌تابع ی که معرفی کردیم درست است. البته در این‌جا فرض شده $D\geq 1$. در غیر ِ این صورت، اصولاً انتگرال‌گیری یِ رو یِ k وجود نخواهد داشت. در واقع در $D=0$، اصولاً فضا یی نداریم که موج در آن منتشر شود.

5 به‌دست‌آوردن ِ تابعِ‌گرین ِ فاین‌مَن از رو یِ تابعِ‌گرین ِ معادله یِ لَپلَس

تابعِ‌گرین [a]ِ معادله یِ لَپلَس [b] در $D+1$ بعد، معادله یِ

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}+\nabla^2\right)G_{\rm E}(t,\mathbf{r})=\delta(t)\delta^D(\mathbf{r}) \tag{33}$$

را بر می‌آورد. این معادله مانسته یِ معادله یِ (7) برا یِ تابعِ‌گرین [a]ِ معادله یِ موج است. از این‌جا نتیجه می‌شود

$$G_{\rm E}(t,\mathbf{r})=\frac{1}{(2\pi)^{D+1}}\int {\rm d}^D k\int {\rm d}\omega\frac{1}{-\omega^2-\mathbf{k}\cdot\mathbf{k}}\exp(-i\omega t+i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}). \tag{34}$$

با انتگرال‌گیری رو یِ ω، نتیجه می‌شود

$$G_{\rm E}(t,\mathbf{r})=\frac{-1}{(2\pi)^D}\int {\rm d}^D k\frac{\theta(t)e^{-kt}+\theta(-t)e^{kt}}{2k}\exp(i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}). \tag{35}$$

با استفاده از رابطه‌ها یِ (15) و (16) برا یِ تابعِ‌گرین [a]ِ فاین‌مَن [d] نتیجه می‌شود

$$G_{\rm F}(t,\mathbf{r})=\frac{-i}{(2\pi)^D}\int {\rm d}^D k\frac{\theta(t)e^{-ikt}+\theta(-t)e^{ikt}}{2k}\exp(i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}). \tag{36}$$

این رابطه را با رابطه يِ (35) مقایسه کنید. رابطه يِ (35) برا يِ t يِ حقیقی است. اما (35) را می‌شود ادامه يِ تحلیلی داد و برا يِ t يِ مختلط ی با جزء‌ِیِ‌حقیقی يِ غیرِصفر هم نوشت:

$$G_{\mathrm{E}}(t,\mathbf{r}) = \frac{-1}{(2\pi)^D}\int \mathrm{d}^D k \frac{\theta[\Re(t)]e^{-kt}+\theta[-\Re(t)]e^{kt}}{2k}\exp(i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}). \qquad (37)$$

دیده می‌شود که این تابع در $\Re(t)\neq 0$ تحلیلی است. حالا رابطه‌ها يِ (36) و (37) را با هم مقایسه کنید. دیده می‌شود برا يِ t ها يِ حقیقی،

$$G_{\mathrm{F}}(t,\mathbf{r}) = i\lim_{\epsilon\to 0^+} G_{\mathrm{E}}(ite^{-i\epsilon},\mathbf{r}). \qquad (38)$$

توجه کنید که جزء‌ِیِ‌حقیقی يِ $\xi := ie^{-i\epsilon}$ مثبت است (برا يِ ϵ ِ مثبت). از این‌جا نتیجه می‌شود برا يِ t ها يِ حقیقی

$$\theta[\Re(\xi t)] = \theta(t). \qquad (39)$$

در نوشتن ِ رابطه يِ (38) از (39) استفاده شده است.

به این ترتیب، برا يِ به‌دست‌آوردن ِ تابعِ‌گرین [a] ِ فاین‌مَن [d] در فضازمان ِ $D+1$ بعدی، کافی است تابعِ‌گرین [a] ِ معادله يِ لَپلَس [b] در $D+1$ بعد را بدانیم. برا يِ $D>1$، این تابع می‌شود

$$G_{\mathrm{E}}(t,\mathbf{r}) = \frac{R^{1-D}}{(1-D)S_D}, \qquad (40)$$

که در آن

$$R := \sqrt{t^2+\mathbf{r}\cdot\mathbf{r}}. \qquad (41)$$

برا يِ رسیدن به رابطه يِ (40) کافی است G_{E} را کرویِ‌متقارن بگیریم و قضیه يِ گاؤس [e] را برا يِ گرادیان ِ G_{E} رو يِ گوی ی $D+1$ بعدی به شعاع ِ R به کار ببریم. از (38) و (40) نتیجه می‌شود

$$G_{\mathrm{F}}(t,\mathbf{r}) = i\frac{(r^2-t^2+i\epsilon)^{(1-D)/2}}{(1-D)S_D}. \qquad (42)$$

(در این عبارت به جا يِ $2\epsilon t^2$ گذاشته ایم ϵ.) دیده می‌شود این عبارت رابطه يِ (32) را بر می آورد.

از این تابع می‌شود استفاده کرد و چهارتابع ِ دیگر را به دست آورد. برا یِ این کار، خوب است بخش ِ حقیقی و موهومی یِ تابع‌ِگرین [a]ِ فاین‌مَن [d] را به دست آوریم. از این‌جا به بعد، حساب ِ D ها یِ زوج و فرد از هم جدا می‌شود. برا یِ D ها یِ زوج، $(D-1)/2$ نیمه‌صحیح است و داریم

$$\Re[G_{\rm F}(t,\mathbf{r})]=-(-1)^{D/2}\mathrm{pf}\left[\frac{(t^2-r^2)^{(1-D)/2}}{(1-D)S_D}\theta(t^2-r^2)\right],\qquad (D/2)\in\mathbb{Z},\quad (43)$$

و

$$\Im[G_{\rm F}(t,\mathbf{r})]=\mathrm{pf}\left[\frac{(r^2-t^2)^{(1-D)/2}}{(1-D)S_D}\theta(r^2-t^2)\right],\qquad (D/2)\in\mathbb{Z}.\qquad (44)$$

در این دورابطه اثر ِ $\mathrm{pf}[x^{-n-(1/2)}\theta(x)]$ بر تابعِ آزمون ِ ϕ از رابطه یِ بازگشتی یِ

$$\int \mathrm{d}x\ \mathrm{pf}[x^{-n-1-(1/2)}\theta(x)]\phi(x):=\frac{1}{n+(1/2)}\int \mathrm{d}x\ \mathrm{pf}[x^{-n-(1/2)}\theta(x)]\phi'(x)\quad (45)$$

تعریف می‌شود. $x^{-(1/2)}\theta(x)$ موضعاً انتگرال‌پذیر است و علامت ِ pf جلو یِ آن اثر ی ندارد.

برا یِ D ها یِ فرد، $(D-1)/2$ صحیح است. داریم

$$\Re[G_{\rm F}(t,\mathbf{r})]=-\frac{1}{4\pi^{(D-1)/2}}\delta^{[(D-3)/2]}(t^2-r^2),\qquad [(D-1)/2]\in\mathbb{Z},\qquad (46)$$

و

$$\Im[G_{\rm F}(t,\mathbf{r})]=\mathrm{pf}\left[\frac{(r^2-t^2)^{(1-D)/2}}{(1-D)S_D}\right],\qquad [(D-1)/2]\in\mathbb{Z}.\qquad (47)$$

در رسیدن به این رابطه‌ها از

$$\frac{1}{x+i\epsilon}=\mathrm{pf}\frac{1}{x}-i\pi\delta(x)\qquad (48)$$

و مشتق‌ها یِ آن استفاده شده است. توجه کنید که رفتار ِ تابعِ‌گرین [a]ِ فاین‌مَن [d] برا یِ بعدها یِ زوج و فرد کاملاً متفاوت است. به‌ویژه، محمل ِ جزءِ‌حقیقی یِ آن برا یِ بعدها یِ فضایی یِ فرد مخروط ِ نور است، در حال ی که برا یِ بعدها یِ فضایی یِ زوج درون ِ مخروطِ نور هم جزءِ محمل است.

حالت ِ $D=1$ را باید جداگانه بررسی کرد. در $D=1$ رابطه‌ها یِ (40) و (42) به این ترتیب اصلاح می‌شوند.

$$G_{\rm E}(t,x)=\frac{1}{4\pi}\ln\frac{x^2+t^2}{a^2},\qquad D=1,\qquad (49)$$

و

$$G_{\mathrm{F}}(t,x)=\frac{i}{4\pi}\ln\frac{x^2-t^2+i\epsilon}{a^2},\qquad D=1, \tag{50}$$

که a ثابت ی دل‌بخواه است. از این‌جا

$$\Re[G_{\mathrm{F}}(t,x)]=-\frac{1}{4}\theta(t^2-x^2),\qquad D=1, \tag{51}$$

و

$$\Im[G_{\mathrm{F}}(t,x)]=\frac{1}{4\pi}\ln\left|\frac{x^2-t^2}{a^2}\right|,\qquad D=1. \tag{52}$$

به این ترتیب، تابعِ‌گرین [a] ها يِ تأخیری و تقدمی در بعدها يِ مختلف به دست می‌آیند. داریم

$$G_{\mathrm{R}}(t,\mathbf{r})=-2(-1)^{D/2}\mathrm{pf}\left[\frac{(t^2-r^2)^{(1-D)/2}}{(1-D)S_D}\theta(t^2-r^2)\right]\theta(t),\qquad (D/2)\in\mathbb{Z}, \tag{53}$$

و

$$G_{\mathrm{R}}(t,\mathbf{r})=-\frac{1}{2\pi^{(D-1)/2}}\theta^{[(D-1)/2]}(t^2-r^2)\theta(t),\qquad [(D-1)/2]\in\mathbb{Z}. \tag{54}$$

تابعِ‌گرین [a]ِ تقدمی به همان شکل ِ تابعِ‌گرین [a]ِ تأخیری است، که فقط به جا يِ $\theta(t)$ در آن $\theta(-t)$ گذاشته اند.

6 مرجع

[1] Ivar Stakgold; “Green’s functions and boundary value problems”, second edition (John Wiley & Sons, 1998) chapter 2

7 اسم‌ها يِ خاص

[a] Green

[b] Laplace

[c] Fourier

[d] Feynman

[e] Gauss