**X1-003 (2001/06/28)**

# تابع- ِ- گرینها یِ معادله یِ پُوَاسُن و معادله یِ پخش در کُرِه و صفحه: انقباض

**محمد خرمی** mamwad@mailaps.org

تابع- ِ- گرین [1] ِ معادله یِ پُوَاسُن [2] در صفحه، از رو یِ تابع- ِ- گرین [1] ِ همین معادله در کره، و با میل- دادن ِ شعاع ِ کره به بی‌نهایت به دست میئاید. همین کار برا یِ معادله یِ پخش هم انجام میشود.

## 0 تابع- ِ- گرین ِ معادله یِ پُوَاسُن در کره و صفحه

در نگاه ِ اول به نظر میرسد $G_{\mathbb{S}}$، تابع‌گرین [1] ِ معادله یِ پُوَاسُن [2] رو یِ کره ای به شعاع ِ $R$، باید این معادله را براوَرَد.

$$\frac{1}{R^2}\,[(\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{\nabla})_\Omega\, G_{\mathbb{S}}](\hat{\boldsymbol{n}},\hat{\boldsymbol{n}}') = \frac{1}{R^2}\,\delta(\hat{\boldsymbol{n}},\hat{\boldsymbol{n}}'). \tag{1}$$

که،

$$(\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{\nabla})_\Omega\,\mathfrak{X} = \frac{1}{\sin\theta}\,\frac{\partial}{\partial\,\theta}\,\left[(\sin\theta)\,\frac{\partial\,\mathfrak{X}}{\partial\,\theta}\right] + \frac{1}{\sin^2\theta}\,\frac{\partial^2\,\mathfrak{X}}{\partial\,\phi^2}. \tag{2}$$

$\hat{\boldsymbol{n}}$ بردار ِ یکه ای ست که جهت ِ آن با $(\theta, \phi)$ مشخص می‌شود، $(\theta, \phi)$ مختصها ی ِ زاویئی در مختصات ِ کروی یَند،

$$\int (\mathrm{d}^2\,\Omega)\,\delta(\hat{\boldsymbol{n}}, \hat{\boldsymbol{n}}')\,f(\hat{\boldsymbol{n}}) = f(\hat{\boldsymbol{n}}'), \tag{3}$$

و

$$\mathrm{d}^2\,\Omega = \sin\theta\,(\mathrm{d}\,\theta)\,(\mathrm{d}\,\phi). \tag{4}$$

ولی معادله ی ِ $(1)$ جواب ندارد. برا ی ِ دیدن ِ این، کافی ست از دُ-طرف ِ آن رو ی ِ کره انتگرال بگیرم. نتیجه میشود

$$\int_{\mathbb{S}} (\mathrm{d}^2\,\Omega)\,[(\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{\nabla})_\Omega\,G_{\mathbb{S}}](\hat{\boldsymbol{n}}, \hat{\boldsymbol{n}}') = 1. \tag{5}$$

اما،

$$\int_{\mathbb{S}} (\mathrm{d}^2\,\Omega)\,[(\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{\nabla})_\Omega\,G_{\mathbb{S}}](\hat{\boldsymbol{n}}, \hat{\boldsymbol{n}}') = \oint_{\mathsf{bo}(\mathbb{S})} (\mathrm{d}\,\boldsymbol{\ell})\cdot(\boldsymbol{\nabla}\,G_{\mathbb{S}})(\hat{\boldsymbol{n}}, \hat{\boldsymbol{n}}'). \tag{6}$$

که $\mathsf{bo}(\mathbb{S})$ مرز ِ کره ی ِ $\mathbb{S}$ است. کره مرز ندارد، پس طرف ِ راست ِ رابطه ی ِ بالا، و در نتیجه طرف ِ چپ ِ رابطه ی ِ $(5)$، صفر است.

برا ی ِ این که این ناسازگاری رفع شود، باید طرف ِ راست ِ معادله ی ِ $(1)$ را چنان اصلاح کرد که انتگرال ِ آن صفر شود. معنی ی ِ این کار در الکترُستاتیک رو ی ِ کره آن است که بار ِ کل ِ کره باید صفر باشد. در واقع بر اساس ِ قضیه ی ِ گاؤس [3]، بار ِ کل ِ کره برابر است با انتگرال ِ مثلفه ی ِ عمود-بر-مرز ِ میدان ِ الکتریکی رو ی ِ مرز ِ کره. اما کره مرز ندارد، پس این انتگرال صفر است، و بار ِ کل ِ کره هم باید صفر باشد.

یک راه ِ ساده ی ِ حل ِ مشکل این است که به طرف ِ راست ِ رابطه ی ِ $(1)$ یک جمله ی ِ ثابت افزوده شود، چنان که انتگرال ِ طرف ِ راست ِ این رابطه رو ی ِ کره صفر شود. به این ترتیب، معادله ی ِ تابع- ِ-گرین [1] چنین میشود

$$\frac{1}{R^2}\,[(\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{\nabla})_\Omega\,G_{\mathbb{S}}](\hat{\boldsymbol{n}}, \hat{\boldsymbol{n}}') = \frac{1}{R^2}\,\left[\delta(\hat{\boldsymbol{n}}, \hat{\boldsymbol{n}}') - \frac{1}{4\,\pi}\right]. \tag{7}$$

معادله یِ بالا تحتِ دَوَران ناوردا ست. پس میشود $\hat{\boldsymbol{n}}'$ را هم ان $\hat{\boldsymbol{z}}$ گرفت. در این صورت $G_{\mathbb{S}}$ هم تابعِ فقط $\theta$ میشود:

$$\frac{1}{\sin\theta}\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,\theta}\,\left\{\sin\theta\,\frac{\mathrm{d}\,[G_{\mathbb{S}}(\theta)]}{\mathrm{d}\,\theta}\right\}=\delta(\hat{\boldsymbol{n}},\hat{\boldsymbol{z}})-\frac{1}{4\,\pi}. \tag{8}$$

یک راهِ حلِ معادله یِ بالا این است که دُ-طرف بر حسبِ ویژه-تابعها یِ عملگرِ طرفِ چپِ معادله بسط داده شوند. اینها چندجملِئیها یِ لُژاندر [4] اند [5]:

$$\frac{1}{\sin\theta}\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,\theta}\,\left\{(\sin\theta)\,\frac{\mathrm{d}\,[\mathrm{P}_l(\cos\theta)]}{\mathrm{d}\,\theta}\right\}=-l(l+1)\mathrm{P}_l(\cos\theta). \tag{9}$$

بسطِ $\delta$ هم چنین است.

$$\delta(\hat{\boldsymbol{n}},\hat{\boldsymbol{z}})=\frac{1}{2\,\pi}\,\sum_{l=0}^{\infty}\frac{2l+1}{2}\,\mathrm{P}_l(\cos\theta). \tag{10}$$

بسطِ $G_{\mathbb{S}}$ را هم چنین مینویسم.

$$G_{\mathbb{S}}(\theta)=\frac{1}{2\,\pi}\,\sum_{l=0}^{\infty}G_l\,\mathrm{P}_l(\cos\theta) \tag{11}$$

که $G_l$ ها ثابتَند. نتیجه میشود

$$-l(l+1)\,G_l=\frac{2l+1}{2}-\frac{1}{2}\,\delta_{l\,0}. \tag{12}$$

جمله یِ دومِ طرفِ راست ناشی از جمله یِ ثابت در طرفِ راستِ (8) است. این جمله باعث می‌شود طرفِ راست به ازا یِ $(l=0)$ صفر شود، و معادله یِ (12) در $(l=0)$ سازگار باشد.

جوابِ معادله یِ (12) میشود

$$G_l=-\frac{2l+1}{2\,l\,(l+1)},\qquad l\neq 0. \tag{13}$$

از اینجا،

$$G_{\mathbb{S}}(\theta)=\frac{1}{2\,\pi}\,\left[G_0-\sum_{l=1}^{\infty}\frac{2l+1}{2\,l\,(l+1)}\,\mathrm{P}_l(\cos\theta)\right], \tag{14}$$

که $G_0$ یک ثابتِ دلبخاه است. این ثابت را میشود چنان گرفت که $G_{\mathbb{S}}$ در $(\theta=\theta_0)$ صفر شود. برا یِ این کار،

$$G_0=\sum_{l=1}^{\infty}\frac{2l+1}{2\,l\,(l+1)}\,\mathrm{P}_l(\cos\theta_0), \tag{15}$$

و از آنجا

$$G_S(\theta)=-\frac{1}{2\,\pi}\,\sum_{l=1}^{\infty}\frac{2l+1}{2\,l\,(l+1)}\,[\mathrm{P}_l(\cos\theta)-\mathrm{P}_l(\cos\theta_0)]. \tag{16}$$

حالا میخاهم $R$ را به بینهایت میل دهم و $G_{\mathbb{P}}$، تابع- ِ-گرین [1] ِ معادله یِ پُؤَسُن [1] در صفحه، را به دست آورم. دقیقتر، منظور این است که فاصله یِ نقطه یِ $(\theta,\phi)$ از قطبِ شمالِ کره را ثابت میگیرم، و $G_{\mathbb{S}}$ را در حدِ $(R\to\infty)$ حساب میکنم. به این کار انقباض میگویند. فاصله را میشود $(R\,\theta)$، فاصله یِ رو-یِ-کره، گرفت؛ یا $[2\,R\,\sin(\theta/2)]$، فاصله یِ پاره-خط یِ در فضا یِ سه-بُعدی که این دُ-نقطه را به هم وصل میکند. اینها در حدِ $(R\to\infty)$، به یک نتیجه برا یِ $\theta$ بر حسبِ فاصله مینجامند (در مرتبه یِ غالب). در واقع برا یِ کارِ من شکلِ زیر کافی ست.

$$\theta=\frac{\rho}{R}+O(R^{-2}). \tag{17}$$

جملِها یِ مرتبه-یِ-بعد را میشود هر چیز ی گرفت. انتخابِ زیر کار را کم ی سادِتر میکند.

$$\rho=2\,R\,\sin\frac{\theta}{2}. \tag{18}$$

و هم ین هم انتخاب میشود. پس،

$$G_{\mathbb{P}}(\rho)=\lim_{R\to\infty}G_{\mathbb{S}}\left(2\,\sin^{-1}\frac{\rho}{2\,R}\right). \tag{19}$$

البته در (16) یک زاویه یِ دیگر $(\theta_0)$ هم هست. در (19)، منظور این است که این زاویه هم، با رابطه ای مشابه با (18)، بر حسبِ $\rho_0$ نوشته شده است.

برا یِ ادامه یِ کار، رفتارِ چندجملِئیها یِ لُژاندر [4] به ازا یِ مقدارها یِ نزدیک-به-یکِ متغیر لازم است. از (18) نتیجه میشود

$$\cos\theta=1-\frac{\rho^2}{2R^2}. \tag{20}$$

چندجمله‌ئیها یِ لُژاندر [4] معادله یِ لُژاندر [4] را برمیئاورند:

$$0=\left\{(1-\cos^2\theta)\ \left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,(\cos\theta)}\right]^2-2\,(\cos\theta)\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,(\cos\theta)}\right.$$
$$\left.+\,l\,(l+1)\right\}[\mathrm{P}_l(\cos\theta)]. \qquad (21)$$

و بر حسبِ متغیرِ $\rho$،

$$0=\left[\left(1-\frac{\rho^2}{4\,R^2}\right)\,\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\,\rho^2}+\left(1-\frac{3\,\rho^2}{4\,R^2}\right)\,\frac{1}{\rho}\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,\rho}\right.$$
$$\left.+s^2-\frac{1}{4\,R^2}\right]\,\left[\mathrm{P}_l\left(1-\frac{\rho^2}{2\,R^2}\right)\right]. \qquad (22)$$

که $s$ چنین تعریف شده.

$$R\,s=l+\frac{1}{2}. \qquad (23)$$

معادله یِ بِسِل [6] ِ مرتبه-یِ صفر، برا یِ $f$ چنین است.

$$0=\left(\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\,y^2}+\frac{1}{y}\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,y}+1\right)\,[f(y)]. \qquad (24)$$

دیده میشود در حدِ $(R\to\infty)$ معادله یِ (22) به معادله یِ بِسِل [6] ِ مرتبه-یِ صفر، با متغیرِ $(s\,\rho)$ تبدیل میشود. به علاوه $[\mathrm{P}_l(\cos\theta)]$ در $(\rho=0)$، یعنی در $(\theta=0)$، خُش-رفتار است و مقدارَش یک است. تنها-جوابِ معادله ی بِسِل [6] با این ویژگیها، تابع-ِ-بِسِل [6] ِ نُعِ اول است. پس،

$$\lim_{R\to\infty}\left[\mathrm{P}_{R\,s-(1/2)}\left(1-\frac{\rho^2}{2\,R^2}\right)\right]=\mathrm{J}_0(s\,\rho). \qquad (25)$$

که $\mathrm{J}_0$ تابع-ِ-بِسِل [6] ِ نُعِ اول از مرتبه یِ صفر است.

به رابطه یِ (16) بر میگردم. بر حسبِ متغیرها یِ $\rho$ و $s$، این رابطه میشود

$$G_{\mathbb{S}}(\theta)=-\frac{1}{2\,\pi\,R}\,\sum_{l=0}^{\infty}\frac{s}{s^2-(4\,R^2)^{-1}}\,\left[\mathrm{P}_{R\,s-(1/2)}\left(1-\frac{\rho^2}{2\,R^2}\right)\right.$$
$$\left.-\,\mathrm{P}_{R\,s-(1/2)}\left(1-\frac{\rho_0^2}{2\,R^2}\right)\right]. \qquad (26)$$

عبارتِ طرفِ راست، در حدِ $(R\to\infty)$ به انتگرال تبدیل میشود. پس

$$G_{\mathbb{P}}(\rho)=-\frac{1}{2\,\pi}\int_0^\infty(\mathrm{d}\,s)\,\frac{\mathrm{J}_0(s\,\rho)-\mathrm{J}_0(s\,\rho_0)}{s}. \tag{27}$$

وجودِ جمله یِ دومِ صورتِ کسر لازم است، تا انتگرال واگرا نشود. به خاطرِ این جمله، ضمنَن تابع- ِ-گرین [1] در $(\rho=\rho_0)$ صفر میشود. رابطه یِ بالا به این شکل ساده میشود.

$$\begin{aligned}G_{\mathbb{P}}(\rho)&=-\frac{1}{2\,\pi}\int_0^\infty(\mathrm{d}\,s)\int_{\rho_0}^{\rho}(\mathrm{d}\,\zeta)\,\mathrm{J}_0'(s\,\zeta),\\&=-\frac{1}{2\,\pi}\int_{\rho_0}^{\rho}(\mathrm{d}\,\zeta)\int_0^\infty(\mathrm{d}\,s)\,\mathrm{J}_0'(s\,\zeta),\\&=-\frac{1}{2\,\pi}\int_{\rho_0}^{\rho}(\mathrm{d}\,\zeta)\left[\frac{\mathrm{J}_0(s\,\zeta)}{\zeta}\right]_0^\infty,\\&=\frac{1}{2\,\pi}\int_{\rho_0}^{\rho}\frac{\mathrm{d}\,\zeta}{\zeta},\end{aligned} \tag{28}$$

و از آنجا

$$G_{\mathbb{P}}(\rho)=\frac{1}{2\,\pi}\,\ln\frac{\rho}{\rho_0}. \tag{29}$$

این هم ان است که با حلِ مستقیمِ معادله یِ تابع- ِ-گرین [1] در صفحه به دست میئاید.

## 1 یک راهِ سادتِر برا یِ به-دست-آوردنِ تابع- ِ-گرینِ معادله یِ پُوَسُن در کره و صفحه

یک راهِ دیگر برا یِ به-دست-آوردنِ $G_{\mathbb{S}}$، استفاده از قضیه یِ گاؤس [3] است. از معادله یِ (8) رو یِ بخش ی از کره که با $(\theta<\alpha)$ مشخص میشود انتگرال میگیرم:

$$\begin{aligned}2\,\pi\,(\sin\alpha)\,G_{\mathbb{S}}'(\alpha)&=\int_{\theta<\alpha}(\mathrm{d}^2\,\Omega)\,[(\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{\nabla})_\Omega\,G_S](\theta),\\&=\int_{\theta<\alpha}(\mathrm{d}^2\,\Omega)\left[\delta(\hat{\boldsymbol{n}},\hat{\boldsymbol{z}})-\frac{1}{4\,\pi}\right],\\&=1-\frac{1-\cos\alpha}{2},\\&=\frac{1+\cos\alpha}{2}.\end{aligned} \tag{30}$$

از اینجا،

$$G'_{\mathbb{S}}(\theta) = \frac{1+\cos\theta}{4\,\pi\,\sin\theta} = \frac{1}{4\,\pi}\,\cot\frac{\theta}{2}. \tag{31}$$

و در نتیجه،

$$G_{\mathbb{S}}(\theta) = \frac{1}{2\,\pi}\,\ln\frac{\sin(\theta/2)}{\sin(\theta_0/2)}. \tag{32}$$

حالا با تعریفِ (18)، رابطه یِ (29) مستقیمًن به دست میئاید.

## 2 تابع- ِ-گرینِ معادله یِ پخش در کره و صفحه

$F_{\mathbb{S}}$، تابع- ِ-گرین [1] ِ معادله یِ پخش رو یِ کره ای به شعاعِ $R$، این معادله را برمیئاورَد.

$$\left[\frac{\partial}{\partial\,t} - \frac{1}{R^2}\,(\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{\nabla})_{\Omega}\right]\,F_{\mathbb{S}}(\hat{\boldsymbol{n}},t;\hat{\boldsymbol{n}}',t') = \frac{1}{R^2}\,[\delta(\hat{\boldsymbol{n}},\hat{\boldsymbol{n}}')]\,\delta(t-t'). \tag{33}$$

این معادله هم چرخش-ناورد است. پس می‌شود $\hat{\boldsymbol{n}}'$ را $\hat{\boldsymbol{z}}$ گرفت، و در این صورت $F_{\mathbb{S}}$ تابعِ $\phi$ نخاهد بود. این معادله تحتِ انتقال- ِ-زمان هم ناوردا ست. پس $t'$ را هم میشود صفر گرفت. به این ترتیب معادله یِ (33) به این شکلِ سادِترِ درمیئاید.

$$\frac{\partial\,[F_{\mathbb{S}}(\theta,t)]}{\partial\,t} - \frac{1}{R^2}\,\frac{1}{\sin\theta}\,\frac{\partial}{\partial\,\theta}\,\left\{(\sin\theta)\,\frac{\partial\,[F_{\mathbb{S}}(\theta,t)]}{\partial\,\theta}\right\} = \frac{1}{R^2}\,[\delta(\hat{\boldsymbol{n}},\hat{\boldsymbol{z}})]\,\delta(t). \tag{34}$$

$F_{\mathbb{S}}$ را بر حسبِ چندجملِئیها یِ لُژاندر [4] بسط میدهم:

$$F_{\mathbb{S}}(\theta,t) = \frac{1}{2\,\pi}\,\sum_{l=0}^{\infty}[F_l(t)]\,\mathrm{P}_l(\cos\theta). \tag{35}$$

نتیجه میشود

$$\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,t} + \frac{l\,(l+1)}{R^2}\right]\,[F_l(t)] = \frac{2l+1}{2\,R^2}\,\delta(t). \tag{36}$$

که در آن از (10) استفاده شده. جوابِ این معادله (با این شرط که تابع- ِ-گرین [1] در ($t<0$) صفر باشد) میشود

$$F_l(t) = \frac{2l+1}{2\,R^2}\,\left\{\exp\left[-\frac{l\,(l+1)\,t}{R^2}\right]\right\}\,\mathrm{H}(t). \tag{37}$$

که H تابعِ هِویسایدِ [7] (پله یِ واحد) است:

$$\mathrm{H}(t) = \begin{cases} 0, & t<0 \\ r1, & t>0 \end{cases}. \tag{38}$$

به این ترتیب، تابع- ِ-گرین [1] ِ معادله یِ پخش در کره چنین میشود.

$$F_{\mathbb{S}}(\theta,t) = \frac{1}{2\,\pi}\,\sum_{l=0}^{\infty}\frac{2l+1}{2\,R^2}\,[\mathrm{P}_l(\cos\theta)]\,\left\{\exp\left[-\frac{l\,(l+1)\,t}{R^2}\right]\right\}\,\mathrm{H}(t). \tag{39}$$

اینجا هم میخاهم $F_{\mathbb{P}}$، تابع- ِ-گرین [1] ِ معادله یِ پخش در صفحه، را از انقباضِ $F_{\mathbb{S}}$، تابع- ِ-گرین [1] ِ معادله یِ پخش در کره به دست آورم:

$$F_{\mathbb{P}}(\rho,t) = \lim_{R\to\infty}\left[F_{\mathbb{S}}\left(2\,\sin^{-1}\frac{\rho}{2\,R},t\right)\right]. \tag{40}$$

که در آن $\rho$ به شکلِ (18) تعریف شده. با تعریفِ $s$ به شکلِ (23)، $F_{\mathbb{S}}$ چنین میشود

$$F_{\mathbb{S}}(\theta,t) = \frac{1}{2\,\pi\,R}\,\sum_{l=0}^{\infty}s\,\left[\mathrm{P}_{R\,s-(1/2)}\left(1-\frac{\rho^2}{2\,R^2}\right)\right]\,\left\{\exp\left[-\left(s^2-\frac{1}{4}\right)\,t\right]\right\}\,\mathrm{H}(t). \tag{41}$$

در حدِ ($R\to\infty$)، سری یِ بالا به انتگرال تبدیل میشود و، با استفاده از (25)، نتیجه میشود

$$F_{\mathbb{P}}(\rho,t) = \frac{1}{2\,\pi}\,\left\{\int_0^{\infty}(\mathrm{d}\,s)\,s\,[\mathrm{J}_0(s\,\rho)]\,\exp(-s^2\,t)\right\}\,\mathrm{H}(t). \tag{42}$$

یک راه برا یِ محاسبه یِ طرفِ راستِ رابطه یِ بالا، استفاده از جدولِ انتگرال است، مثلَن [8]. اما انتگرالِ طرف- ِ-راست را با تبدیلِ لَپلَس [9] هم میشود حساب کرد. متغیرِ $u$ را چنین تعریف میکنم.

$$u = s^2\,\rho^2. \tag{43}$$

دیده میشود

$$\int_0^\infty (\mathrm{d}\, s)\, s\, [\mathrm{J}_0(s\,\rho)]\, \exp(-s^2\, t) = \frac{1}{2\,\rho^2} \int_0^\infty (\mathrm{d}\, u)\, [\mathrm{J}_0(\sqrt{u})]\, \exp\left(-\frac{u\, t}{\rho^2}\right). \quad (44)$$

پس مسئله به یافتنِ تبدیل-ِ-لَپلَس [9] ِ تابعِ $[\mathrm{J}_0(\sqrt{\cdot})]$ تبدیل میشود. $[\mathrm{J}_0(y)]$ این معادله را برمیئاورَد.

$$y\, \frac{\mathrm{d}^2\, [\mathrm{J}_0(y)]}{(\mathrm{d}\, y)^2} + \frac{\mathrm{d}\, [\mathrm{J}_0(y)]}{\mathrm{d}\, y} + y\, \mathrm{J}_0(y) = 0. \quad (45)$$

این تغییر-ِ-متغیر را به کار میبَرم.

$$u = y^2. \quad (46)$$

معادله یِ (45) چنین میشود.

$$4\, \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\, u} \left\{ u\, \frac{\mathrm{d}\, [\mathrm{J}_0(\sqrt{u})]}{\mathrm{d}\, u} \right\} + \mathrm{J}_0(\sqrt{u}) = 0. \quad (47)$$

تبدیل-ِ-لَپلَس [9] ِ تابعِ $[\mathrm{J}_0(\sqrt{\cdot})]$ را با $\mathcal{J}$ نشان میدهم:

$$\mathcal{J}(r) = \int_0^\infty (\mathrm{d}\, u)\, [\exp(-r\, u)]\, \mathrm{J}_0(u). \quad (48)$$

دُ-طرفِ معادله یِ (47) را در $[\exp(-r\, u)]$ ضرب میکنم، و از حاصل بر $u$ انتگرال میگیرم. نتیجه میشود

$$-4\, r\, \frac{\mathrm{d}\, [r\, \mathcal{J}(r)]}{\mathrm{d}\, r} + \mathcal{J}(r) = 0. \quad (49)$$

این یک معادله-یِ-دیفرانسیلِ مرتبه-ی-ِ-یک برا یِ $\mathcal{J}$ است. این معادله جداشدنی ست:

$$\frac{\mathrm{d}\, [\mathcal{J}(r)]}{\mathcal{J}(r)} = \frac{1 - 4\, r}{4\, r^2}\, \mathrm{d}\, r. \quad (50)$$

که از آن نتیجه میشود

$$\mathcal{J}(r) = \frac{C}{r}\, \exp\left(-\frac{1}{4\, r}\right). \quad (51)$$

$C$ یک ثابت است. برا یِ به-دست-آوردن ِ آن این رابطه را به کار میبَرم. که

$$\int_0^{\infty} (\mathrm{d}\, u)\, [\exp(-r\, u)]\, \mathrm{J}_0'(u) = r\, \mathcal{J}(r) - \mathrm{J}_0(0). \tag{52}$$

طرف ِ چپ ِ رابطه یِ بالا، در حد ِ $(r \to \infty)$ به صفر میگراید. پس طرف ِ راست هم چنین است:

$$\lim_{r\to\infty} [r\, \mathcal{J}(r) - \mathrm{J}_0(0)] = 0, \tag{53}$$

و از اینجا،

$$C = 1. \tag{54}$$

که نتیجه میدهد

$$\mathcal{J}(r) = \frac{1}{r}\, \exp\left(-\frac{1}{4\, r}\right). \tag{55}$$

پس،

$$F_{\mathbb{P}}(\rho, t) = \frac{1}{4\, \pi\, t}\, \left[\exp\left(-\frac{\rho^2}{4\, t}\right)\right]\, \mathrm{H}(t). \tag{56}$$

این هم ان است که با حل ِ مستقیم ِ معادله یِ پخش در صفحه به دست میئاید.

# 3 پانوشتها


[1] Green

[2] Poisson

[3] Gauss

[4] Legendre

[5] George B. Arfken & Hans J. Weber; “Mathematical methods for physicists” 4th edition (Academic Press, 1998) chapter 12

[6] Bessel

[7] Heaviside

[8] I. S. Gradshteyn & I. M. Ryzhik; “Table of integrals, series, and products” 6th edition (Academic Press, 2000) 631

[9] Laplace