X1-005 (2001/10/03)

پتانسیل ِ الکتروستاتیک، ماتریس ِ ضریب‌ها یِ پتانسیل، و ماتریس ِ ظرفیت

محمد خرمی
mamwad@mailaps.org

چند قضیه در مورد ِ پتانسیل ِ الکتروستاتیک، ماتریس ِ ضریب‌ها یِ پتانسیل، و ماتریس ِ ظرفیت طرح، و به طور ِ دقیق ثابت می‌شود.

0 مقدمه

تعداد ی رسانا یِ متناهی را در نظر بگیرید که هیچ یک درون ِ دیگری نباشد. فرض کنید فضا یِ بین ِ این رساناها خالی است. با این شرط ِ مرزی که پتانسیل ِ الکتریکی در بی‌نهایت صفر است، پتانسیل ِ هر رسانا یک ترکیب ِ خطی از بار ِ رساناها است. به ماتریس ی که این پتانسیل‌ها را به بارها مربوط می‌کند، ماتریس ِ ضریب‌ها یِ پتانسیل می‌گویند. نشان می‌دهند این ماتریس وارون‌پذیر است. به وارون ِ این ماتریس ماتریس ِ ظرفیت می‌گویند. این ماتریس بار ِ هر رسانا را به پتانسیل ِ رساناها (نسبت به بی‌نهایت) مربوط می‌کند. در کتاب‌ها یِ درسی یِ الکترومغناطیس (از جمله کتاب ِ ریتز، میلفُرد، و کْریستی [1]) قضیه‌ها یی در باره یِ مئلفه‌ها یِ این دوماتریس بیان می‌کنند، اما نوعاً از اثبات ِشان می‌گذرند. در این‌جا می‌خواهیم چندتا از این قضیه‌ها را بیان و ثابت کنیم.

پیش از اثبات ِ این قضیه‌ها، چند قضیه یِ کلی در باره یِ ویژه‌گی‌ها یِ تحلیلی یِ

پتانسیل ِ الکتروستاتیک بیان و ثابت می‌کنیم. کسان ی که این قضیه‌ها برا یِ ذائقه یِشان بیش از حد ریاضی است، می‌توانند از بخش ِ اول بگذرند و فقط نتایج ِ آن‌ها را (که در بخش ِ دوم به کار می‌آید) ببینند.

1 چند قضیه یِ اساسی در باره یِ پتانسیل ِ الکتریکی

یک توزیعِ‌بار در نظر بگیرید که بار ِ کل ِ مثبت و منفی یِ آن محدود است. (این یعنی انتگرال ِ قدرِمطلق ِ چگالیِ‌بار محدود است):

$$\int \mathrm{d}^3r \; |\rho(\mathbf{r})| < \infty. \qquad (1)$$

پتانسیل ِ الکتریکی یِ حاصل از این توزیعِ‌بار، از قانون ِ کولُن [a] به دست می‌آید:

$$\phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi} \int \mathrm{d}^3r' \, \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}. \qquad (2)$$

(واحدها را چنان انتخاب کرده ایم که $\epsilon_0 = 1$ باشد.)

منظور از یک هم‌سایه‌گی یِ مختلط ِ نقطه یِ $\mathbf{r}_0$، مجموعه یِ سه‌تایی‌ها یِ مختلط ی مثل ِ (x^1, x^2, x^3) است، که $|x^i - x_0^i| < \alpha$ و α یک عدد ِ حقیقی یِ مثبت است. (در این‌جا x^i ها مختصه‌ها یِ دکارتی یِ بردار ِ $\mathbf{r}$ اند، که حالا می‌توانند مختلط هم باشند، و x_0^i ها مختصه‌ها یِ دکارتی یِ $\mathbf{r}_0$ اند. پتانسیل ِ الکتریکی به ازا یِ مختصات ِ مختلط را از گسترش ِ رابطه یِ (2) تعریف می‌کنیم:

$$\phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi} \int \mathrm{d}^3r' \, \frac{\rho(\mathbf{r}')}{\sqrt{(x^1 - x'^1)^2 + (x^2 - x'^2)^2 + (x^3 - x'^3)^2}}, \qquad (3)$$

که در آن x'^i ها حقیقی اند.

می‌گوییم تابع ِ f از متغیرها یِ مختلط ِ (x^1, x^2, x^3) تمام‌ریخت است، اگر این تابع دیفرانسیل‌پذیر باشد و دیفرانسیل ِ آن یک ترکیب ِ خطی از دیفرانسیل ِ آن متغیرها یِ مختلط باشد (یعنی شامل ِ دیفرانسیل ِ مزدوجِ‌مختلط ِ این متغیرها نباشد).

قضیه یِ 1: اگر چگالی یِ بار درون ِ یک گوی به شعاع ِ a صفر باشد، آن‌گاه پتانسیل ِ الکتریکی در یک هم‌سایه‌گی یِ مختلط از مرکز ِ گوی تمام‌ریخت است.

اثبات: داریم

$$\begin{aligned}&[(\mathbf{r}'-\mathbf{r}-\Delta\mathbf{r})\cdot(\mathbf{r}'-\mathbf{r}-\Delta\mathbf{r})]^{-1/2}\\ &-[(\mathbf{r}'-\mathbf{r})\cdot(\mathbf{r}'-\mathbf{r})]^{-1/2}=\Delta\mathbf{r}\cdot(\mathbf{r}'-\mathbf{r})[(\mathbf{r}'-\mathbf{r})\cdot(\mathbf{r}'-\mathbf{r})]^{-3/2}\\ &\qquad+\frac{1}{2}\sum_{i,j}M_{ij}\Delta x^i\Delta x^j.\end{aligned}\tag{4}$$

در این‌جا M ماتریس ِ مشتق ِ دوم ِ $[(\mathbf{r}'-\mathbf{r})\cdot(\mathbf{r}'-\mathbf{r})]^{-1/2}$ نسبت به $\mathbf{r}$ است. این ماتریس یک چندجمله‌ای ِ درجه‌ی دو نسبت به مئلفه‌ها ی $(\mathbf{r}'-\mathbf{r})$، ضرب در $[(\mathbf{r}'-\mathbf{r})\cdot(\mathbf{r}'-\mathbf{r})]^{-5/2}$ است. مقدار ِ این ماتریس در رابطه ی بالا، در نقطه ی $\mathbf{r}+t\Delta\mathbf{r}$ حساب می‌شود، که t عدد ی حقیقی بین ِ صفر و یک است. به‌ساده‌گی دیده می‌شود که اگر $r'\geq a$، و $|x^i|$ ها و $|\Delta x^i|$ ها به حد ِ کافی کوچک باشند، آن‌گاه عددها یی مثل ِ N و M (مستقل از $\mathbf{r}'$) وجود دارند که

$$\begin{aligned}|(\mathbf{r}'-\mathbf{r})\cdot(\mathbf{r}'-\mathbf{r})^{-3/2}|&<N,\\ |M_{ij}|&<M.\end{aligned}\tag{5}$$

حالا (4) را در $\rho(\mathbf{r}')$ ضرب می‌کنیم و از آن انتگرال می‌گیریم. از نامساوی ِ بالا و شرط ِ (1) نتیجه می‌شود

$$\phi(\mathbf{r}+\Delta\mathbf{r})-\phi(\mathbf{r})=\Delta\mathbf{r}\cdot\mathbf{A}(\mathbf{r})+\frac{1}{2}\sum_{i,j}B_{ij}\Delta x^i\Delta x^j,\tag{6}$$

که در آن برا ی B_{ij} ها کرانِ‌بالا یی وجود دارد که مستقل از $\Delta\mathbf{r}$ است. $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ از انتگرال‌گیری از حاصلِ‌ضرب ِ جمله ی اول ِ طرف ِ راست ِ (4) در $\rho(\mathbf{r}')$ به دست می‌آید. رابطه ی (6) دقیقاً یعنی حکم ِ قضیه.

■

می‌گوییم تابع ِ f از متغیرها ی (x^1,x^2,x^3) (احیاناً متغیرها ی مختلط) در یک نقطه تحلیلی است، اگر حول ِ آن نقطه هم‌سایه‌گی یی باشد که در آن تابع ِ f با سری ِ تیلِر [b] ِ خود َ ش برابر باشد.

قضیه ی 2: اگر چگالی ِ بار درون ِ یک گوی به شعاع ِ a صفر باشد، پتانسیل ِ الکتریکی درون ِ آن گوی تحلیلی است.

اثبات: بر اساس ِ قضیه ی 1، پتانسیل ِ الکتریکی تمام‌ریخت است. اما هر تابع ِ

تمام‌ریخت تحلیلی است. اثبات این ادعا مشابه ِ اثبات ِ تحلیلی‌بودن ِ تابع‌ها یِ تمام‌ریخت ِ یک‌متغیره است. برا یِ دیدن ِ جزئیات، می‌توانید مثلاً به بخش ِ 4.V از مرجع ِ [2] رجوع کنید. در واقع علت ِ واردکردن ِ متغیرها یِ مختلط در قضیه یِ 1 هم این بود که بتوانیم از خاصیت‌ها یِ تحلیلی یِ تابع‌ها یِ تمام‌ریخت استفاده کنیم.

■

قضیه یِ 3: فرض کنید در مجموعه یِ باز ِ هم‌بند ِ V بار ی نباشد. اگر پتانسیل ِ الکتریکی در یک زیرمجموعه یِ باز ِ ناتهی از V ثابت باشد، آن‌گاه پتانسیل در کل ِ V ثابت است.

اثبات ِ این قضیه در پیوست آمده است.

قضیه یِ 4: اگر در مجموعه یِ باز ِ V بار ی نباشد، پتانسیل ِ الکتریکی در آن ناحیه معادله یِ لَپلَس [c] را بر می‌آورد.

اثبات: کافی است روش ِ اثبات ِ قضیه یِ 1 را تکرار کنیم و $|\mathbf{r}+\Delta\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^{-1}$ را تا مرتبه یِ 3 نسبت به $\Delta\mathbf{r}$ بسط دهیم. به همان روش ِ اثبات ِ قضیه یِ 1، معلوم می‌شود برا یِ مشتق‌گیری از پتانسیل کافی است از انتگرال‌ده در رابطه یِ (1) مشتق بگیریم. (در واقع این برا یِ مشتق از هر مرتبه ای درست است.) به‌ساده‌گی دیده می‌شود

$$\nabla^2\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}=0,\qquad \mathbf{r}\neq\mathbf{r}',\tag{7}$$

و این اثبات ِ قضیه را کامل می‌کند.

■

قضیه یِ 5: اگر در ناحیه یِ باز ِ کران‌دار ِ هم‌بند ِ V بار ی نباشد، پتانسیل ِ الکتریکی در V با معلوم‌بودن ِ پتانسیل ِ الکتریکی در مرز ِ آن (∂V) به طور ِ یک‌تا تعیین می‌شود.

اثبات: فرض کنید ϕ_1 و ϕ_2 دو تابع ِ پتانسیلِ‌الکتریکی باشند که مقدار ِشان در (∂V) برابر است. بنا بر قضیه یِ 2، هر دوتابع تحلیلی اند. پس تفاضل ِشان (ϕ) هم تحلیلی است. بنابراین ϕ و مشتق‌ها یِ اول و دوم ِ آن پی‌وسته اند. پس

$$\int_V \mathrm{d}^3r\;\nabla\cdot(\phi\nabla\phi)=\oint_{\partial V}\mathrm{d}S\;\phi\frac{\partial\phi}{\partial n}.\tag{8}$$

طرف ِ راست صفر است، چون ϕ در ∂V صفر است. انتگرال‌ده یِ طرف ِ چپ می‌شود مجذور ِ گرادیان ِ ϕ، چون لَپلَسی یِ ϕ صفر است. پس نتیجه می‌شود

$$\int_V \mathrm{d}^3r\ \nabla\phi\cdot\nabla\phi = 0. \tag{9}$$

اما انتگرال‌ده نامنفی و پی‌وسته است. پس نتیجه یِ رابطه یِ بالا این است که گرادیان ـِ ϕ صفر است. از این‌جا نتیجه می‌شود ϕ در V ثابت است، و چون در ∂V صفر است، در کل ـِ V صفر است. پس ϕ_1 با ϕ_2 برابر است.

■

روشن است که اگر ناحیه یِ V شامل ـِ چند مثلفه یِ هم‌بندی باشد هم، نتیجه یِ این قضیه برقرار است.

قضیه یِ 6: اگر در مجموعه یِ باز ـِ V بار ی نباشد، و گوی ـِ B درون ـِ این مجموعه باشد، آن‌گاه میان‌گین ـِ سطحی یِ پتانسیل ـِ الکتریکی رو یِ مرز ـِ این گوی (کره یِ S) برابر ـِ پتانسیل ـِ الکتریکی در مرکز ـِ این گوی است.

اثبات: مرکز ـِ این گوی را مبدئ می‌گیریم. داریم

$$\begin{aligned}\int_{\epsilon<r<R}\mathrm{d}^3r\ \left(\phi\nabla^2\frac{1}{r}-\frac{1}{r}\nabla^2\phi\right) &= \oint_{r=R}\mathrm{d}S\ \left(-\frac{\phi}{r^2}-\frac{1}{r}\frac{\partial\phi}{\partial r}\right)\\ &\quad -\oint_{r=\epsilon}\mathrm{d}S\ \left(-\frac{\phi}{r^2}-\frac{1}{r}\frac{\partial\phi}{\partial r}\right).\end{aligned} \tag{10}$$

در این‌جا R شعاع ـِ گوی ـِ B است و $0<\epsilon<R$. جمله یِ دوم ـِ هر یک از پرانتزها یِ طرفِ‌راست صفر است، چون می‌شود آن را به انتگرال ـِ $\nabla^2\phi$ رو یِ یک گوی (یک بار به شعاع ـِ R و یک بار به شعاع ـِ ϵ) تبدیل کرد، و طبق ـِ قضیه یِ 4، $\nabla^2\phi=0$. طرف ـِ چپ ـِ عبارت ـِ بالا هم صفر است، چون در $r\neq 0$، لَپلَسی یِ $(1/r)$ صفر است. از این‌جا نتیجه می‌شود

$$\frac{1}{4\pi R^2}\oint_{r=R}\mathrm{d}S\ \phi = \frac{1}{4\pi\epsilon^2}\oint_{r=\epsilon}\mathrm{d}S\ \phi. \tag{11}$$

حالا ϵ را به صفر میل می‌دهیم. طرف ـِ راست ـِ معادله یِ بالا به $\phi(0)$ میل می‌کند، و این همان حکم ـِ قضیه است.

■

قضیه یِ 7: اگر در مجموعه یِ باز ـِ هم‌بند ـِ V بار ی نباشد، و پتانسیل ـِ الکتریکی در نقطه ای در این مجموعه بیشینه یِ موضعی یا کمینه یِ موضعی داشته باشد، آن‌گاه پتانسیل ـِ الکتریکی در V ثابت است.

اثبات: فرض کنید پتانسیل ِ الکتریکی در نقطه ای (که آن را 0 می‌نامیم) بیشینه یِ موضعی داشته باشد. این یعنی گوی ی به شعاع ِ مثلاً $\epsilon > 0$ وجود دارد که

$$\phi(0) \geq \phi(\mathbf{r}), \qquad r < \epsilon. \tag{12}$$

حالا کره ای به شعاع ِ r درون ِ این گوی در نظر می‌گیریم ($r < \epsilon$). پتانسیل ِ الکتریکی رو یِ این کره نابزرگ‌تر از $\phi(0)$، و پی‌وسته است. پس میان‌گین ِ آن کوچک‌تر از $\phi(0)$ است، مگر آن که پتانسیل ِ الکتریکی رو یِ این کره برابر با $\phi(0)$ باشد. قضیه یِ 6 می‌گوید میان‌گین ِ پتانسیل ِ الکتریکی رو یِ این کره برابر با $\phi(0)$ است. پس پتانسیل ِ الکتریکی رو یِ این کره برابر با $\phi(0)$ است. از این‌جا نتیجه می‌شود

$$\phi(\mathbf{r}) = \phi(0), \qquad r < \epsilon, \tag{13}$$

و از این‌جا، بر اساس ِ قضیه یِ 3 پتانسیل ِ الکتریکی در کل ِ V ثابت است. اثبات برا یِ کمینه یِ موضعی هم کاملاً مشابه است.

■

2 چند قضیه در مورد ِ ماتریس ِ ضریب‌ها یِ پتانسیل

در سراسر ِ این بخش فرض می‌کنیم تعداد ی متناهی رسانا یِ محدود داریم، که هیچ یک درون ِ دیگری نیست. رسانا یِ i ناحیه یِ V_i را اشغال کرده است. بیرون ِ این ناحیه‌ها را با V نشان می‌دهیم:

$$V := \mathbb{R}^3 - \cup_i V_i. \tag{14}$$

مرز ِ V_i را با S_i نشان می‌دهیم. درون ِ ناحیه یِ V بار ی نیست و پتانسیل ِ الکتریکی معادله یِ لَپلَس [c] را بر می‌آورد. رو یِ هر رسانا، پتانسیل ِ الکتریکی ثابت است. فرض کنید بار ِ الکتریکی یِ کل ِ رسانا یِ i برابر ِ Q_i است. چون رساناها متناهی اند، پتانسیل ِ الکتریکی در $\mathbf{r} \to \infty$ به صفر می‌گراید. پتانسیل ِ الکتریکی یک ترکیب ِ خطی از این بارها است. (توجه دارید که فقط بار ِ کل ِ هر رسانا را می‌شود تعیین کرد. توزیع ِ بار ِ رو یِ هر رسانا چنان تعیین می‌شود که پتانسیل ِ الکتریکی رو یِ هر رسانا ثابت بماند.) از

جمله، پتانسیل ِ الکتریکی یِ هر رسانا هم یک ترکیب ِ خطی از بارها است. به ماتریس ِ ضریب‌ها یِ این ترکیب ِ خطی، ماتریس ِ ضریب‌ها یِ پتانسیل می‌گویند:

$$\phi^i = \sum_j p^{ij} Q_j. \tag{15}$$

در این‌جا ϕ^i پتانسیل رو یِ رسانا یِ i است. ماتریس ِ ضریب‌ها یِ پتانسیل فقط به هندسه یِ سیستم بسته‌گی دارد.

فرض و حکم ِ قضیه‌ها یِ این بخش را با دقت ِ کم‌تر ی (نسبت به بخش ِ قبل) بیان می‌کنیم، پس اگر حوصله یِتان از بخش ِ قبل سر رفته است، نگران نباشید.

تابعی یِ U را در نظر بگیرید:

$$U(\psi) := \frac{1}{2}\int_V \mathrm{d}^3r\ \nabla\psi\cdot\nabla\psi - \sum_i Q_i\psi^i, \tag{16}$$

که در آن ψ تابع ی است که در V تعریف شده، و رو یِ S_i مقدار ِ ثابت ِ ψ^i را می‌گیرد.

قضیه یِ 8: تابعی یِ U در رابطه یِ (16)، به ازا یِ تابع ِ ϕ با شرط‌ها یِ

$$\nabla^2\phi(\mathbf{r}) = 0, \qquad \mathbf{r}\in V \tag{17}$$

و

$$\oint_{S_i} \mathrm{d}S\ \frac{\partial\phi}{\partial n} = Q_i \tag{18}$$

کمینه می‌شود. (در این‌جا مشتق نسبت به n، یعنی مشتق در جهت ِ عمود بر S_i به طرف ِ درون ِ V_i، بیرون ِ V). به علاوه، تابع ی که U را کمینه می‌کند یک‌تا است، یعنی U به ازا یِ هر تابع ِ دیگر ی که رو یِ مرزها ثابت باشد، بزرگ‌تر از $U(\phi)$ است. (توجه دارید که شرط ِ (18) یعنی بار ِ متناظر با ϕ رو یِ رسانا یِ i همان Q_i است، و به این‌ترتیب پتانسیل ِ الکتروستاتیک با این شرط ِ مرزی که بار ِ رسانا یِ i برابر ِ Q_i است، آن تابع ی است که تابعی یِ U را کمینه می‌کند.)

اثبات: فرض کنید قرار باشد Φ تابعی یِ U را کمینه کند. در این صورت جمله یِ خطی یِ تغییر ِ U نسبت به تغییر ِ Φ باید صفر باشد. داریم

$$U(\Phi+\alpha) - U(\Phi) = \int_V \mathrm{d}^3r\ \nabla\Phi\cdot\nabla\alpha - \sum_i Q_i\alpha^i + \frac{1}{2}\int_V \mathrm{d}^3r\ \nabla\alpha\cdot\nabla\alpha,$$

$$= -\int_V \mathrm{d}^3 r\ \alpha \nabla^2 \Phi + \sum_i \alpha^i \left(\int_{S_i} \mathrm{d}S\ \frac{\partial \Phi}{\partial n} - Q_i\right)$$
$$+\frac{1}{2}\int_V \mathrm{d}^3 r\ \nabla\alpha\cdot\nabla\alpha. \qquad (19)$$

از این‌جا نتیجه می‌شود Φ باید رابطه‌ها یِ (17) و (18) را بر آورد (تا جمله یِ خطی یِ تغییر ِ U صفر شود). از سو یِ دیگر، روشن است که

$$U(\phi+\alpha) - U(\phi) = \frac{1}{2}\int_V \mathrm{d}^3 r\ \nabla\alpha\cdot\nabla\alpha. \qquad (20)$$

طرف ِ راست ِ این عبارت مثبت است، مگر آن که مشتق ِ α صفر باشد. در این‌صورت α ثابت است، و چون در بی‌نهایت صفر می‌شود، همه جا صفر است.

■

برا یِ قضیه‌ها یِ بعدی یک تابعی یِ دیگر هم تعریف می‌کنیم، و آن تابعی یِ انرژی یِ الکتروستاتیک است:

$$\begin{aligned} W(\phi) &:= \frac{1}{2}\int_V \mathrm{d}^3 r\ \nabla\phi\cdot\nabla\phi,\\ &= \frac{1}{2}\sum_i Q_i \phi^i,\\ &= \frac{1}{2}\sum_{i,j} p^{ij} Q_i Q_j. \end{aligned} \qquad (21)$$

قضیه یِ 9: ماتریس ِ ضریب‌ها یِ پتانسیل متقارن است.

اثبات: این قضیه در واقع حالت ِ خاص ی از قضیه یِ دوجانبه‌گی است، فصل ِ 1 از مرجع ِ [3]. برا یِ اثبات ِ مستقیم ِ آن، فرض کنید بار ِ رساناها را تغییر دهیم. می‌خواهیم مشتق ِ W نسبت به این تغییرِبارها را به دست آوریم. داریم

$$\begin{aligned} \delta W &= \int_V \mathrm{d}^3 r\ \nabla\phi\cdot\nabla(\delta\phi),\\ &= \sum_i \oint_{S_i} \phi \frac{\partial(\delta\phi)}{\partial n},\\ &= \sum_i \phi^i \delta Q_i,\\ &= \sum_{i,j} p^{ij} Q_j \delta Q_j. \end{aligned} \qquad (22)$$

از سو یِ دیگر

$$\delta W = \frac{1}{2}\sum_{i,j}(p^{ij}+p^{ji})Q_j\delta Q_i. \tag{23}$$

این دورابطه به ازا یِ Q^i ها و δQ^i های دل‌بخواه درست اند. پس

$$p^{ij}+p^{ji}=2p^{ij}, \tag{24}$$

یا

$$p^{ij}=p^{ji}, \tag{25}$$

که همان حکم ـِ قضیه است.

■

قضیه یِ 10: ماتریس ـِ ضریب‌ها یِ پتانسیل مثبت ـِ معین است.
اثبات: اگر دستِ‌کم یک ی از Q^i ها غیرِصفر باشد، آن‌گاه جا یی وجود دارد که مشتق ـِ ϕ صفر نیست (چون انتگرال ـِ مئلفه یِ عمودی یِ مشتق رو یِ S_i برابر ـِ Q_i است). پس W مثبت است.

■

قضیه یِ 11: عنصرها یِ قطری یِ ماتریس ـِ ضریب‌ها یِ پتانسیل مثبت اند.
اثبات: کافی است در قضیه یِ قبل بگیریم $Q_i = Q\delta_i^j$ (یعنی همه یِ رساناها بی‌بار اند، جز رسانا یِ j). نتیجه می‌شود $p^{jj}Q^2>0$، و از آن

$$p^{jj}>0. \tag{26}$$

■

قضیه یِ 12: اگر بار ـِ یک ی از رساناها (رسانا یِ j) برابر ـِ $Q\neq 0$ باشد، و بقیه یِ رساناها بی‌بار باشند، $Q\phi$ در V نامنفی است.
اثبات: داریم

$$Q_i = Q\delta_i^j. \tag{27}$$

متناظر با پتانسیل ـِ الکتریکی یِ ϕ، تابع ـِ $\tilde{\phi}$ را چنین تعریف می‌کنیم.

$$\tilde{\phi} := \phi\ \mathrm{H}(Q\phi), \tag{28}$$

که در آن H تابع ِ هِوی‌ساید [d] (پله ي واحد) است. روشن است که مقدار ِ $\tilde{\phi}$ رو ي هر رسانا ثابت است. بر اساس ِ قضیه ي 11، $p^{jj} > 0$. از این‌جا نتیجه می‌شود

$$Q\phi^j = Q^2 p^{jj} > 0, \tag{29}$$

و از آن معلوم می‌شود

$$\tilde{\phi}^j = \phi^j. \tag{30}$$

تابعی ي U در رابطه ي (16)، با Q_i ها ي (27) را در نظر بگیرید. داریم

$$U(\phi) - U(\tilde{\phi}) = \frac{1}{2}\int_V \mathrm{d}^3 r\ (\nabla\phi\cdot\nabla\phi - \nabla\tilde{\phi}\cdot\nabla\tilde{\phi}). \tag{31}$$

فرض کنید V' آن زیرمجموعه ي V است که در آن ϕ با $\tilde{\phi}$ برابر است. نتیجه می‌شود

$$U(\phi) - U(\tilde{\phi}) = \frac{1}{2}\int_{V-V'} \mathrm{d}^3 r\ \nabla\phi\cdot\nabla\phi. \tag{32}$$

قضیه ي 8 می‌گوید طرف ِ چپ ِ عبارت ِ بالا منفی است، مگر آن که $\phi = \tilde{\phi}$. اما طرف ِ راست نامنفی است. پس دوطرف ِ رابطه ي بالا باید صفر باشند و

$$\tilde{\phi}(\mathbf{r}) = \phi(\mathbf{r}), \qquad \mathbf{r}\in V. \tag{33}$$

این یعنی

$$Q\phi(\mathbf{r}) \geq 0, \qquad \mathbf{r}\in V, \tag{34}$$

که حکم ِ قضیه است.

■

قضیه ي 13: همه ي مئلفه‌ها ي ماتریس ِ ضریب‌ها ي پتانسیل مثبت اند.

اثبات: Q_i را مثل ِ (27) (با $Q \neq 0$) می‌گیریم. بر اساس ِ قضیه ي 11، عنصرها ي قطری ي p مثبت اند. از قضیه ي 12 می‌دانیم $Q\phi$ در ناحیه ي V نامنفی است. به این ترتیب معلوم می‌شود $Q\phi^i$ هم نامنفی است. فرض کنید $Q\phi^k = 0$، که $k \neq j$. چون $Q\phi$ در V نامنفی است، داریم

$$Q\frac{\partial\phi}{\partial n}\Big|_{S_k} \leq 0. \tag{35}$$

انتگرال ـ طرف ـ چپ می‌شود QQ_k، که صفر است. پس انتگرال‌ده (که نامثبت است) باید صفر باشد:

$$\frac{\partial\phi}{\partial n}\Big|_{S_k} = 0. \tag{36}$$

این یعنی در ناحیه یِ V_k (و مرز ـ آن) بار ی نیست. بنابراین در ناحیه یِ $V \cup V_k$ بار ی وجود ندارد. بنا بر قضیه یِ 12، $Q\phi$ در این ناحیه نامنفی است. پس $Q\phi$ رو یِ هر نقطه یِ S_k (که یک نقطه یِ درونی یِ $V \cup V_k$ است) کمینه یِ موضعی می‌شود، و از قضیه یِ 7 نتیجه می‌شود پتانسیل ـ الکتریکی در کل ـ $V \cup V_k$ ثابت (صفر) است. اما پتانسیل ـ الکتریکی رو یِ S_j (که بخش ی از مرز ـ $V \cup V_k$ است) برابر است با $p^{jj}Q$، که بر اساس ـ قضیه یِ 11 غیرِصفر است. پس این فرض که ϕ^k صفر است، نادرست بوده است. به این ترتیب،

$$Q\phi^k > 0, \tag{37}$$

و از این‌جا نتیجه می‌شود

$$p^{kj} > 0, \tag{38}$$

که همان حکم ـ قضیه است.

■

قضیه یِ 14: اگر بار ـ یک ی از رساناها (رسانا یِ j) برابر ـ $Q \neq 0$ باشد، و بقیه یِ رساناها بی‌بار باشند، $Q(\phi^j - \phi)$ در V نامنفی است.

اثبات: $\tilde{\phi}$ را این بار به شکل ـ

$$\tilde{\phi} := \phi\ \mathrm{H}(Q\phi^j - Q\phi) + \phi^j\ \mathrm{H}(Q\phi - Q\phi^j) \tag{39}$$

تعریف می‌کنیم. بقیه یِ اثبات کاملاً مشابه با اثبات ـ قضیه یِ 12 است.

■

قضیه یِ 15: هر مئلفه یِ غیرِقطری یِ ماتریس ـ ضریب‌ها یِ پتانسیل، از مئلفه یِ قطری یِ همان ستون ـ ماتریس کوچک‌تر است.

اثبات: Q_i را مثل ـ (27) (با $Q \neq 0$) می‌گیریم. از قضیه یِ 14 می‌دانیم $Q(\phi^j - \phi)$ در

ناحیه ی ِ V نامنفی است. به این‌ترتیب معلوم می‌شود $Q(\phi^j - \phi^i)$ هم نامنفی است. فرض کنید $Q(\phi^j - \phi^k) = 0$، که $k \neq j$. چون $Q(\phi^j - \phi)$ در V نامنفی است، داریم

$$Q\frac{\partial\phi}{\partial n}\Big|_{S_k} \geq 0. \tag{40}$$

بقیه ی ِ اثبات کاملاً مشابه با اثبات ِ قضیه ی ِ 13 است.

■

3 ماتریس ِ ظرفیت

قضیه ی ِ 16: ماتریس ِ ضریب‌ها ی ِ پتانسیل وارون‌پذیر است.
اثبات: قضیه ی ِ 10 می‌گوید ماتریس ِ ضریب‌ها ی ِ پتانسیل مثبت ِ معین است. این نتیجه می‌دهد همه ی ِ ویژه‌مقدارها ی ِ آن مثبت اند، پس ماتریس ِ ضریب‌ها ی ِ پتانسیل ویژه‌مقدار ِ صفر ندارد، و بنابراین وارون‌پذیر است.

■

به وارون ِ ماتریس ِ ضریب‌ها ی ِ پتانسیل، ماتریس ِ ظرفیت می‌گویند:

$$Q_i = C_{ij}\phi^j. \tag{41}$$

قضیه ی ِ 17: ماتریس ِ ظرفیت متقارن و مثبت ِ معین است.
اثبات: این قضیه نتیجه ی ِ مستقیم ِ قضیه‌ها ی ِ 9 و 10 است.

■

قضیه ی ِ 18: عنصرها ی ِ قطری ی ِ ماتریس ِ ظرفیت مثبت اند.
اثبات: بر اساس ِ قضیه ی ِ 17، ماتریس ِ ظرفیت مثبت ِ معین است. به این‌ترتیب، اثبات ِ این قضیه کاملاً مشابه با اثبات ِ قضیه ی ِ 11 است.

■

قضیه ی ِ 19: عنصرها ی ِ غیرِقطری ی ِ ماتریس ِ ظرفیت منفی اند.
اثبات: می‌گیریم $\phi^i = \Phi\delta^i_j$، که $\Phi \neq 0$. بر اساس ِ قضیه ی ِ 7، پتانسیل ِ الکتریکی در هیچ نقطه ای از فضا ی ِ بیرون ِ رساناها بیشینه یا کمینه ی ِ موضعی (و در نتیجه بیشینه یا کمینه ی ِ مطلق) ندارد. چون پتانسیل ِ الکتریکی در بی‌نهایت به صفر می‌گراید، کمینه و

بیشینه ي مطلق ـ آن رو يِ رساناها رخ می‌دهد. در نتیجه در هر نقطه ای در فضا يِ بین ـ رساناها، پتانسیل ـ الکتریکی بین ـ 0 و Φ است. از این‌جا نتیجه می‌شود

$$\Phi\frac{\partial\phi}{\partial n}\Big|_{S_k} \le 0, \qquad k \ne j, \tag{42}$$

و از آن،

$$\Phi Q_k \le 0, \qquad k \ne j. \tag{43}$$

ثابت می‌کنیم نامساوی يِ بالا اکید است. برا يِ این کار، توجه کنید که از (42) نتیجه می‌شود Q_k صفر است اگر و تنها اگر مشتق ـ عمودی يِ پتانسیل ـ الکتریکی رو يِ S_k صفر باشد. اما در این صورت در کل ـ ناحیه يِ $V\cup V_k$ بار ی نیست و پتانسیل ـ الکتریکی در یک نقطه از درون ـ این ناحیه (یک نقطه از V_k) کمینه یا بیشینه يِ مطلق (صفر) پیدا کرده است. پس، بر اساس ـ قضیه يِ 7، پتانسیل ـ الکتریکی در کل ـ $V\cup V_k$ ثابت است، که این با فرض ـ ناصفربودن ـ پتانسیل ـ الکتریکی رو يِ S_j ناسازگار است. به این‌ترتیب،

$$\phi Q_k < 0, \qquad k \ne j, \tag{44}$$

و از این‌جا نتیجه می‌شود

$$C_{kj} < 0, \qquad k \ne j, \tag{45}$$

که همان حکم ـ قضیه است.

■

قضیه يِ 20: دو رسانا يِ متناهی يِ بیرونِ‌هم را در نظر بگیرید. قدرِمطلق ـ عنصرها يِ غیرِقطری يِ ماتریس ـ ظرفیت ـ این سیستم، از هر یک از عنصرها يِ قطری يِ آن کوچک‌تر است.

اثبات: ماتریس ـ ضریب‌هايِ‌پتانسیل ـ این سیستم را p می‌گیریم. بنا بر قضیه‌ها يِ 9، 11، 13، و 15،

$$0 < p^{12} = p^{21} < p^{11}, p^{22}. \tag{46}$$

ماتریسِ ظرفیتِ این سیستم (C) وارون ـ p است. پس

$$C_{11} = p^{22}/\Delta,$$

$$C_{12} = C_{21} = -p^{12}/\Delta = -p^{21}/\Delta,$$
$$C_{22} = p^{11}/\Delta, \tag{47}$$

که در آن

$$\Delta := p^{11}p^{22} - p^{12}p^{21} > 0. \tag{48}$$

پس

$$0 < -C_{12} = -C_{21} < C_{11}, C_{22}, \tag{49}$$

که همان حکم ِ قضیه است.

■

قضیه یِ 21: N رسانا یِ متناهی در نظر بگیرید، که هیچ کدام درون ِ دیگری نیست. فرض کنید M تا از این رساناها هم‌پتانسیل اند. این M رسانا را مثل ِ یک رسانا در نظر می‌گیریم، که بار ِ آن مجموع ِ بارها یِ M رسانا است. ماتریس ِ ظرفیت ِ این سیستم به این ترتیب به دست می‌آید که در ماتریسِ‌ظرفیت ِ اولیه، ستون‌ها یِ متناظر با این M رسانا را با هم، و سطرها یِ متناظر با این M رسانا را هم با هم جمع کنیم.

اثبات: بدون ِ کاستن از کلیت ِ مسئله، می‌شود فرض کرد M رسانا یِ هم‌پتانسیل رساناها یِ آخر (از $N-M+1$ تا N) اند. داریم

$$\begin{aligned} Q_i &= \sum_{j=1}^{N-M} C_{ij}\phi^j + \left(\sum_{j=N-M+1}^{N} C_{ij}\right)\phi^0, \qquad 1 \le i \le N-M, \\ Q_0 &= \sum_{j=1}^{N-M}\left(\sum_{i=N-M+1}^{N} C_{ij}\right)\phi^j + \left(\sum_{j=1}^{N-M}\sum_{i=1}^{N-M} C_{ij}\right)\phi^0, \end{aligned} \tag{50}$$

که در آن ϕ^0 پتانسیل ِ هر یک از M رسانا یِ هم‌پتانسیل، و Q_0 مجموع ِ بارها یِ این رساناها است. روشن است که با تعریف ِ

$$\begin{aligned} \tilde{C}_{ij} &= C_{ij}, \qquad 1 \le i, j \le N-M \\ \tilde{C}_{i0} &= \sum_{j=N-M+1}^{N} C_{ij}, \qquad 1 \le i \le N-M \\ \tilde{C}_{0j} &= \sum_{i=N-M+1}^{N} C_{ij}, \qquad 1 \le j \le N-M \end{aligned}$$

$$\tilde{C}_{00} = \sum_{i=N-M+1}^{N} \sum_{j=N-M+1}^{N} C_{ij} \tag{51}$$

خواهیم داشت

$$Q_i = \sum_{j=0}^{N-M} \tilde{C}_{ij} \phi^j, \qquad 0 \le i \le N-M. \tag{52}$$

پس این سیستم مثل ِ مجموعه ای از $N-M+1$ رسانا است، که ماتریسِ‌ظرفیت ِ آن $\tilde{C}$ است. این همان حکم ِ قضیه است.

■

قضیه یِ 22: مجموع ِ عنصرها یِ هر ستون ِ ماتریس ِ ظرفیت مثبت است.

اثبات: حالت ی را در نظر بگیرید که همه یِ رساناها جز رسانا یِ j هم‌پتانسیل اند. بر اساس ِ قضیه یِ 21، این سیستم مثل ِ یک سیستم ِ با دو رسانا عمل می‌کند، که ماتریسِ‌ظرفیت ِ آن $\tilde{C}$ است، که

$$\begin{aligned} \tilde{C}_{jj} &= C_{jj}, \\ \tilde{C}_{j0} = \tilde{C}_{0j} &= \sum_{i\neq j} C_{ij}. \end{aligned} \tag{53}$$

بر اساس ِ قضیه یِ 20، مجموع ِ عنصرها یِ هر ستون ِ $\tilde{C}$ مثبت است. از این‌جا نتیجه می‌شود

$$\sum_i C_{ij} > 0, \tag{54}$$

که همان حکم ِ قضیه است.

■

یک نتیجه یِ این قضیه آن است که اگر یک ی از رساناها را به یک پتانسیل ِ غیرِصفر و بقیه را به زمین وصل کنیم، آن‌گاه قدرِمطلق ِ بار ِ القاشده رو یِ رسانا یِ اول از قدرِمطلق ِ کل ِ بارها یِ القاشده رو یِ رساناها یِ دیگر (برابر با مجموع ِ قدرِمطلق ِ بارها یِ القاشده رو یِ هر یک از رساناها یِ دیگر) بیش‌تر است.

4 پیوست: اثبات ِ قضیه یِ 3

شاید در این‌جا رجوع به یک کتاب ِ آنالیزریاضی مثل ِ کتاب ِ رودین [4]، مفید باشد.
قضیه یِ 3: فرض کنید در مجموعه یِ باز ِ هم‌بند ِ V بار ی نباشد. اگر پتانسیل ِ الکتریکی در یک زیرمجموعه یِ باز ِ ناتهی از V ثابت باشد، آن‌گاه پتانسیل در کل ِ V ثابت است.
اثبات: مقدارِثابت ِ صورت ِ قضیه را با Φ نشان می‌دهیم. این مجموعه‌ها را در نظر بگیرید.

$$\begin{aligned} V_1 &= \{\mathbf{r}\in V|\phi(\mathbf{r})=\Phi\},\\ V_1' &:= \operatorname{int}(V_1),\\ V_2 &:= \{\mathbf{r}\in V|\phi(\mathbf{r})\neq\Phi\},\\ V_2' &:= V-\operatorname{clos}(V_1'). \end{aligned} \tag{55}$$

در این‌جا $\operatorname{int}(\cdot)$ یعنی درون ِ مجموعه: مجموعه یِ نقطه‌ها یی که یک هم‌سایه‌گی حول ِ آن‌ها هست که تماماً در مجموعه است. $\operatorname{clos}(\cdot)$ یعنی بستار ِ مجموعه: مجموعه یِ نقطه‌ها یی که در هر هم‌سایه‌گی از آن‌ها دستِ‌کم یک نقطه از مجموعه وجود دارد. به‌ساده‌گی دیده می‌شود V_2' باز است، چون V_2' اشتراک ِ دو مجموعه یِ باز است: V و متمم ِ $\operatorname{clos}(V_1')$. ضمناً از پی‌وسته‌گی یِ پتانسیل در V (که نتیجه یِ تحلیلی‌بودن ِ آن است) نتیجه می‌شود V_2 هم باز است. در واقع V_2 تصویرِوارون ِ مجموعه یِ $\mathbb{R}-\{\Phi\}$ است. به این‌ترتیب، به‌ساده‌گی نتیجه می‌شود

$$V_2\cap\operatorname{clos}(V_1')=\emptyset, \tag{56}$$

و از این‌جا

$$V_2\subseteq V_2'. \tag{57}$$

نکته یِ بعدی این است که اشتراک ِ $\operatorname{clos}(V_2')$ با V_1' هم تهی است. برا یِ اثبات ِ این نکته فرض کنید $\mathbf{r}\in\operatorname{clos}(V_2')$. در این صورت هر هم‌سایه‌گی از $\mathbf{r}$ دستِ‌کم یک نقطه از V_2' را در بر دارد. آن نقطه در $\operatorname{clos}(V_1')$ نیست، پس در V_1' هم نیست. یعنی در هم‌سایه‌گی یِ

$\mathbf{r}$، نقطه ای وجود دارد که در V_1' نیست. اما V_1' باز است. از این‌جا نتیجه می‌شود $\mathbf{r}$ در V_1' نیست. پس

$$\mathrm{clos}(V_2') \cap V_1' = \emptyset. \tag{58}$$

حالا فرض کنید V_2' تهی نباشد. V هم‌بند است، پس نمی‌تواند اجتماع ِ دو مجموعه ی ِ باز ِ ناتهی ی ِ بدون ِاشتراک باشد:

$$V \neq V_1' \cup V_2'. \tag{59}$$

این یعنی نقطه ای مثل ِ $V \ni \mathbf{r}$ وجود دارد که نه در V_1' است و نه در V_2'. از این‌که $\mathbf{r} \notin V_2'$ نتیجه می‌شود

$$\mathbf{r} \in \mathrm{clos}(V_1'). \tag{60}$$

این یعنی در هر هم‌سایه‌گی ی ِ $\mathbf{r}$ نقطه ای در V_1' وجود دارد. چون پتانسیل ِ ϕ در مجموعه ی باز ِ V_1' ثابت است، در همه ی ِ نقطه‌ها ی ِ این مجموعه همه ی ِ مشتق‌ها ی ِ پتانسیل صفر اند. حالا یک ی از مشتق‌ها ی ِ پتانسیل را در نظر بگیرید. دیدیم در هر هم‌سایه‌گی ی ِ $\mathbf{r}$ نقطه ای وجود دارد که این مشتق ِ پتانسیل صفر است. پتانسیل در $\mathbf{r}$ تحلیلی است، پس این مشتق ِ آن پی‌وسته است. از این‌جا نتیجه می‌شود این مشتق ِ پتانسیل در $\mathbf{r}$ صفر است. خود ِ پتانسیل هم پی‌وسته است، پس مقدار ِ آن در $\mathbf{r}$ برابر ِ Φ است. پس در $\mathbf{r}$ پتانسیل برابر ِ Φ، و همه ی ِ مشتق‌ها ی ِ پتانسیل صفر اند. از تحلیلی‌بودن ِ پتانسیل در این نقطه نتیجه می‌شود پتانسیل در یک هم‌سایه‌گی ی ِ این نقطه ثابت است. این یعنی $\mathbf{r}$ عضو ِ V_1' است، که تناقض است. پس فرض ِ ناتهی‌بودن ی ِ V_2' نادرست است. از این‌جا نتیجه می‌شود V_2' و در نتیجه V_2 تهی است. پس پتانسیل در V ثابت است. ■

5 مرجع‌ها

[1] John R. Reitz, Frederick J. Milford, Robert W. Christy; "Foundations of electromagnetic theory", (Addison-Wesley, 1979)

[2] Henri Cartan; “Elementary theory of analytic functions of one or several complex variables”, (Dover Publications, 1995)

[3] John David Jackson; “Classical electrodynamics”, 3rd edition (John Wiley & Sons, 1998)

[4] Walter Rudin; “Principles of mathematical analysis”, 3rd edition (Mc Graw Hill, 1984)

6 اسم‌ها یِ خاص

[a] Coulomb

[b] Taylor

[c] Laplace

[d] Heaviside