X1-006 (2001/12/21)

فرآیندها یِ تصادفی

محمد خرمی mamwad@mailaps.org

فریناز روشنی farinazz@yahoo.com

فرآیندها یِ تصادفی و تحول ـِ آن‌ها معرفی می‌شود، و قضیه‌ها یی در این زمینه بیان و ثابت می‌شود.

1 تعریف ـِ فرآیندها یِ تصادفی

یک متغیر ـِ تصادفی (مثلاً X) متغیر ی است که حالت ـِ آن معین نیست، بل که هر حالت ی را با یک احتمال می‌پذیرد. مثلاً سکه یِ سالم ی که پرتاب می‌شود، با احتمال ـِ $1/2$ شیر و با احتمال ـِ $1/2$ خط می‌آید. اگر شیر را با H و خط را با T نشان دهیم، این متغیر ـِ تصادفی با احتمال ـِ $1/2$ حالت ـِ H، و با احتمال ـِ $1/2$ حالت T را می‌گیرد. این احتمال‌ها را با $P_X(H)$ و $P_X(T)$ نشان می‌دهیم. $P_X(x)$ یعنی احتمال ـِ این که متغیر ـِ تصادفی یِ X در حالت ـِ x باشد:

$$P_X(x) := P(X = x). \tag{1}$$

جا یی که خود ـِ متغیر (X) معین باشد، می‌شود شاخص ـِ X را از عبارت حذف کرد.

یک فرآیند ـِ تصادفی (مثلاً $X(t)$) عبارت است از تابع ی (از زمان) که مقدار ـِ آن در هر زمان یک متغیر ـِ تصادفی است. اگر متغیر ـِ زمان ـِ این تابع پیوسته باشد، می‌گویند این

فرآیند ـِ تصادفی زمان‌پیوسته است؛ اگر متغیر ـِ زمان ـِ این تابع گسسته باشد، می‌گویند این فرآیند ـِ تصادفی زمان‌گسسته است. در هر حالت، احتمال این که فرآیندِ تصادفیِ X، در زمان t حالتِ x را بگیرد، را با $P_X(t,x)$ نمایش می دهیم:

$$P_X(t,x) := P[X(t)=x]. \tag{2}$$

این‌جا هم، اگر ابهام ی پیش نیاید می‌شود شاخص ـِ X را حذف کرد.

2 فرمول‌بندی یِ فضایِ‌برداری

فرض کنید حالت‌ها یِ ممکن ـِ متغیر ـِ تصادفی یِ X عبارت اند از $\{X^i \mid i\}$. (عبارت ـِ بالا یعنی مجموعه یِ همه یِ X^i ها، نه یک X^i ـِ مشخص. این دوم ی را با $\{X^i\}$ نشان می‌دهیم.) مجموعه یِ شاخص ـِ i، علی‌الاصول ممکن است باپایان یا بی‌پایان، و شمارا یا ناشمارا باشد. برا یِ ساده‌شدن ـِ بحث، در کل ـِ این مقاله خود را به حالت ی محدود می‌کنیم که این مجموعه باپایان است. احتمال ـِ این که X در حالت ـِ X^i باشد را با P^i نشان می‌دهیم:

$$P^i := P_X(X^i). \tag{3}$$

با این کمیت‌ها می‌شود یک بردار ساخت، بردار ی که P^i ها مئلفه‌ها یِ آن اند. به بیان ی فنی‌تر، به هر حالت ـِ X^i یک $\mathbf{e}_i$ نظیر می‌کنیم و فضا یِ برداری یِ $\mathbb{V}$ را پهنه یِ $\{\mathbf{e}_i \mid i\}$ تعریف می‌کنیم:

$$\mathbb{V} := \mathrm{span}\ \{\mathbf{e}_i \mid i\}. \tag{4}$$

بردار ی که P^i ها مئلفه‌ها یِ آن اند، عبارت است از

$$\mathbf{P} := \sum_i P^i \mathbf{e}_i. \tag{5}$$

از این پس قرارداد ـِ جمع را هم به کار می‌بریم: وجود ـِ یک شاخص ـِ تکراری (یک بار به شکل ـِ زیرنویس و یک بار به شکل ـِ بالانویس) به معنی یِ جمع‌خوردن رو یِ آن شاخص است.

مجموعه یِ $B := \{\mathbf{e}_i \mid i\}$ یک پایه برا یِ فضا یِ برداری یِ $\mathbb{V}$ است، و به آن پایه یِ تعریف‌کننده یِ $\mathbb{V}$ می‌گوییم. پایه یِ $B^* := \{\mathbf{e}^i \mid i\}$ برا یِ $\mathbb{V}^*$ (دوگان ِ فضا یِ برداری یِ $\mathbb{V}$) را دوگان ِ پایه یِ B می‌گیریم:

$$\mathbb{V}^* = \mathrm{span}\,\{\mathbf{e}^i \mid i\}, \qquad \mathbf{e}^i\mathbf{e}_j = \delta^i_j. \tag{6}$$

می‌شود بردارها یِ فضا یِ $\mathbb{V}$ را ماتریس‌ها یِ ستونی، و بردارها یِ فضا یِ $\mathbb{V}^*$ را ماتریس‌ها یِ سطری گرفت. با استفاده از (6) معلوم می‌شود

$$P^i = \mathbf{e}^i\mathbf{P}. \tag{7}$$

چون P^i ها احتمال اند، مجموع ِشان یک است. با تعریف ِ

$$\mathbf{S} := \sum_i \mathbf{e}^i. \tag{8}$$

معلوم می‌شود

$$\mathbf{S}\mathbf{P} = 1. \tag{9}$$

اگر مجموع ِ مئلفه‌ها یِ بردار ی یک شود، می‌گوییم آن بردار بهنجار است. تعریف ِ (8)، یعنی $\mathbf{S}$ یک ماتریس ِ سطری است که همه یِ مئلفه‌ها یِ آن یک اند. شرط ِ (9) هم یعنی مجموع ِ مئلفه‌ها یِ ماتریس ِ ستونی یِ $\mathbf{P}$ یک است.

P^iها احتمال اند، بنابراین نامنفی اند. پس،

$$\forall i \ :\ P^i = \mathbf{e}^i\mathbf{P} \geq 0. \tag{10}$$

اگر همه یِ مئلفه‌ها یِ یک بردار حقیقی و نامنفی باشند، می‌گوییم آن بردار نامنفی است. روشن است که نامنفی‌بودن و بهنجاربودن ِ بردارها به پایه بسته‌گی دارد. اگر پایه ذکر نشود، منظور نسبت به همان پایه یِ تعریف‌کننده یِ $\mathbb{V}$ است. به این ترتیب، شرط ِ لازم و کافی برا یِ این که یک بردار ِ فضا یِ $\mathbb{V}$ احتمال ِ قرارگرفتن ِ یک سیستم در حالت‌ها یِ مختلف را توصیف کند، آن است که این بردار بهنجار و نامنفی باشد. به بردار ی که چنین‌شرط ی را بر آورد یک بردار ِ فیزیکی می‌گوییم. (توجه دارید که مجموعه یِ بردارها یِ فیزیکی یِ فضا یِ $\mathbb{V}$، زیرفضا یِ $\mathbb{V}$ نیست.)

پایه یِ یک فضا یِ برداری یک‌تا نیست؛ هر مجموعه یِ خطی‌مستقل ِ شامل ِ تعداد ِ کافی بردار (به اندازه یِ بعد ِ فضا یِ برداری) یک پایه است. حالا یک پایه یِ

دیگر برا یِ $\mathbb{V}$ در نظر بگیرید، با این قید که فیزیکی‌بودن ِ هر بردار نسبت به این پایه، با فیزیکی‌بودن ِ آن بردار بر حسب ِ پایه یِ تعریف‌کننده یِ فضا هم‌ارز باشد. به این پایه یک پایه یِ فیزیکی می‌گوییم.

قضیه یِ 1: پایه یِ فیزیکی یک‌تا است.

اثبات: فرض کنید $B' := \{\mathbf{e}'_i \mid i\}$ یک پایه یِ فیزیکی باشد. چون این مجموعه پایه است، یک تبدیل ِ خطی یِ وارون‌پذیر مثل ِ $M : \mathbb{V} \to \mathbb{V}$ وجود دارد که

$$\mathbf{e}'_i = M\mathbf{e}_i. \tag{11}$$

چون B' و B، هردو فیزیکی اند، اثر ِ M و M^{-1} رو یِ هر بردار ِ فیزیکی یی یک بردار ِ فیزیکی است. بنابراین همه یِ عنصرها یِ ماتریس‌ها یِ M و M^{-1} نامنفی اند. از این‌جا معلوم می‌شود نامنفی‌بودن ِ یک بردار نسبت به پایه یِ B، با نامنفی‌بودن ِ آن بردار نسبت به پایه یِ B' هم‌ارز است، و از اثر ِ M یا M^{-1} رو یِ یک بردار ِ نامنفی، یک بردار ِ نامنفی به دست می‌آید. از فیزیکی‌بودن ِ B و B'، ضمناً نتیجه می‌شود هر یک از اعضا یِ این دومجموعه یک بردار ِ فیزیکی است. $\mathbf{e}'_i$ یک بردار ِ فیزیکی است، پس ضریب‌ها یِ بسط ِ آن بر حسب ِ پایه یِ B نامنفی، و دستِ‌کم یک ی از آن‌ها مثبت است. فرض کنید

$$\mathbf{e}'_i = \alpha\mathbf{e}_j + \mathbf{v}, \tag{12}$$

که در آن α یک عدد ِ مثبت، و $\mathbf{v}$ یک بردار ِ نامنفی است. M^{-1} را از چپ رو یِ دوطرف ِ رابطه یِ بالا اثر می‌دهیم:

$$\mathbf{e}_i = \alpha M^{-1}\mathbf{e}_j + M^{-1}\mathbf{v}. \tag{13}$$

از این‌جا نتیجه می‌شود

$$\delta_i^k = \alpha\mathbf{e}^k M^{-1}\mathbf{e}_j + \mathbf{e}^k M^{-1}\mathbf{v}. \tag{14}$$

اما دوبردار ِ طرف ِ راست ِ (13) نامنفی اند، پس جمله‌ها یِ طرف ِ راست ِ رابطه یِ بالا نامنفی اند. از این‌جا نتیجه می‌شود

$$\mathbf{e}^k M^{-1}\mathbf{e}_j = \beta\delta_i^k, \tag{15}$$

یا

$$M^{-1}\mathbf{e}_j = \beta\mathbf{e}_i. \tag{16}$$

حالا فرض کنید در بسط ـِ $\mathbf{e}'_i$ بر حسب ـِ پایه یِ B، ضریب ـِ $\mathbf{e}_l$ هم غیرِصفر باشد. نتیجه می‌شود

$$M^{-1}\mathbf{e}_l = \gamma\mathbf{e}_i. \tag{17}$$

β و γ غیرِصفر اند، چون M^{-1} وارون‌پذیر است. اما این یعنی بردار ـِ غیرِصفر ی مثل ـِ $(\beta^{-1}\mathbf{e}_j - \gamma^{-1}\mathbf{e}_l)$ وجود دارد که اثر ـِ M^{-1} رو یِ آن صفر است، که با وارون‌پذیربودن ـِ M^{-1} ناسازگار است. پس در بسط ـِ $\mathbf{e}'_i$ در پایه یِ B، یک و تنها یک ضریب ـِ مثبت وجود دارد و بقیه یِ ضریب‌ها صفر اند. آن ضریب ـِ مثبت هم باید یک باشد، چون $\mathbf{e}'_i$ بهنجار است. پس،

$$\forall i\ :\ (\exists j \mid \mathbf{e}'_i = \mathbf{e}_j). \tag{18}$$

پس B' زیرمجموعه یِ B است. اما B و B'، هردو پایه اند. پس

$$B' = B. \tag{19}$$

■

معنی یِ این قضیه آن است که حالت‌ها یِ قطعی (غیرِاحتمالی) یِ هر سیستم منحصربه‌فرد اند: یک سکه ممکن است شیر بیاید یا خط؛ حالت ـِ مخلوط ی وجود ندارد.

3 مشاهده‌پذیرها

یک مشاهده‌پذیر عبارت است از تابع ی از مجموعه یِ حالت‌ها یِ مجاز ـِ سیستم به اعداد ـِ حقیقی. برا یِ مشاهده‌پذیر ـِ Q، روشن است که

$$P_Q(q) := P(Q = q) = \sum_{x\in Q^{-1}(q)} P(X = x). \tag{20}$$

مجموعه یِ $Q^{-1}(q)$، یعنی مجموعه یِ همه یِ اعضا یی که اثر ـِ Q رو یِ‌شان q است. میان‌گین ـِ (یا مقدارِچشم‌داشتی یِ) Q می‌شود

$$\mathrm{E}(Q) := \langle Q\rangle := \sum_q q\; P(Q=q),$$

$$= \sum_i Q(X^i)P_X(X^i). \tag{21}$$

با استفاده از فرمول‌بندی یِ فضایِ‌برداری، این رابطه را می‌شود به شکل ِ دیگر ی هم نوشت. ماتریس ِ $M(Q)$ را یک ماتریس ِ قطری (در پایه یِ فیزیکی) می‌گیریم که

$$\mathbf{e}^i M(Q) = Q(X^i)\mathbf{e}^i \tag{22}$$

را بر آورد. در این صورت روشن است که

$$Q(X^i)P_X(X^i) = \mathbf{e}^i M(Q)\mathbf{P}, \tag{23}$$

و از این‌جا معلوم می‌شود

$$\langle Q\rangle = \mathbf{S}M(Q)\mathbf{P}. \tag{24}$$

از این پس، برا یِ ساده‌گی $M(Q)$ را با خود ِ Q نشان می‌دهیم. با استفاده از رابطه یِ (20)، و با تعریف ِ

$$\mathbf{e}^q := \sum_{i\;|\;Q(X^i)=q} \mathbf{e}^i \tag{25}$$

روشن است که

$$P_Q(q) = \mathbf{e}^q\mathbf{P}. \tag{26}$$

$\mathbf{e}^q$ ها این رابطه‌ها را بر می آورند.

$$\sum_q \mathbf{e}^q = \mathbf{S}, \tag{27}$$

و

$$\mathbf{e}^q Q = q\mathbf{e}^q. \tag{28}$$

4 فرآیندها یِ مارکُف و تحول ـِ آن‌ها

می‌گوییم فرآیند ـِ تصادفی یِ $X(t)$ یک فرآیند ـِ مارکُف [a] است، اگر

$$\begin{aligned} &P[X(t_{n+1}) = x_{n+1}|X(t_n) = x_n, \cdots, X(t_1) = x_1], \\ &= P[X(t_{n+1}) = x_{n+1}|X(t_n) = x_n], \qquad t_{n+1} \geq \cdots \geq t_1, \end{aligned} \qquad (29)$$

و احتمال‌ها یِ شرطی یِ بالا به حالت ـِ سیستم بسته‌گی نداشته باشند، یعنی با تغییردادن ـِ مثلاً $P[X(t_1) = x^1]$، عوض نشوند. در این صورت به احتمال ـِ شرطی یِ

$$P(t_2, x_2|t_1, x_1) = P[X(t_2) = x_2|X(t_1) = x_1] \qquad (30)$$

انتشارگر ـِ فرآیند ـِ تصادفی می‌گویند.

ماتریس ـِ تحول (یا انتقال) ـِ فرآیند ـِ تصادفی را ماتریس ی تعریف می‌کنیم که عنصرها یِ آن انتشارگرها باشند:

$$\mathbf{e}^i U(t_2, t_1)\mathbf{e}_j := P(t_2, X^i|t_1, X^j), \qquad t_2 \geq t_1. \qquad (31)$$

از رابطه یِ

$$P(t_2, X^i) = \sum_j P(t_2, X^i|t_1, X^j)P(t_1, X^j), \qquad (32)$$

دیده می‌شود

$$\mathbf{P}(t_2) = U(t_2, t_1)\mathbf{P}(t_1), \qquad t_2 \geq t_1. \qquad (33)$$

حالا سه زمان ـِ $t_3 \geq t_2 \geq t_1$ را در نظر می‌گیریم. نتیجه می‌شود

$$U(t_3, t_1)\mathbf{P}(t_1) = U(t_3, t_2)U(t_2, t_1)\mathbf{P}(t_1), \qquad (34)$$

و از این‌جا، چون بردار ـِ $\mathbf{P}(t_1)$ را می‌شود هر عضو ـِ دل‌بخواه ـِ پایه یِ فیزیکی گرفت، نتیجه می‌شود

$$U(t_3, t_1) = U(t_3, t_2)U(t_2, t_1), \qquad t_3 \geq t_2 \geq t_1. \qquad (35)$$

ضمناً از رابطه یِ (33) معلوم می‌شود

$$U(t,t) = 1. \tag{36}$$

دوطرف ِ رابطه یِ (33) را از راست در $\mathbf{S}$ ضرب می‌کنیم، و به جا یِ $\mathbf{P}(t_1)$ می‌گذاریم $\mathbf{e}_i$. با توجه به (9)،

$$\mathbf{S}U(t_2,t_1)\mathbf{e}_i = 1. \tag{37}$$

اما این رابطه به ازا یِ هر i برقرار است. پس

$$\mathbf{S}U(t_2,t_1) = \mathbf{S}. \tag{38}$$

این رابطه یعنی جمع ِ هر ستون ِ ماتریس ِتحول ِ U یک است. ضمناً عنصرها یِ ماتریس ِ U احتمال‌ها یِ شرطی اند، که نامنفی اند:

$${U^i}_j(t_2,t_1) \geq 0. \tag{39}$$

رابطه‌ها یِ (35)، (36)، (38)، و (39)، شرط‌ها یِ لازم و کافی برا یِ آن اند که ماتریس‌ها یی مثلِ $U(t_2,t_1)$ (با $t_2 \geq t_1$) ماتریسِ‌تحول‌ها یِ یک سیستم باشند. توجه کنید که شرط‌ها یِ (38) و (39)، شرط برا یِ یک ماتریس اند، در حال ی که شرط‌ها یِ (35) و (36)، شرط‌ها یی برا یِ خانواده یِ ماتریس‌ها هستند.

برا یِ فرآیندها یِ زمان‌گسسته، با استفاده از رابطه یِ (35) نتیجه می‌شود

$$U(n,0) = U(n,n-1)\cdots U(1,0), \tag{40}$$

یعنی برا یِ تعیین ِ تابع ِ دومتغیره یِ $U(n,m)$، دانستن ِ یک تابع ِ یک‌متغیره یِ $U(n,n-1)$ کافی است. به این‌ها ماتریسِ‌تحول ِ تک‌گام می‌گوییم.

برا یِ فرآیندها یِ زمان‌پیوسته، از عبارت ِ $U(t',t)$ نسبت به t' مشتق می‌گیریم. نتیجه می‌شود

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t'}U(t',t) &= \Big[\frac{\partial}{\partial s}U(t'+s,t)\Big]\Big|_{s=0^+}, \\ &= \Big[\frac{\partial}{\partial s}U(t'+s,t')\Big]\Big|_{s=0^+}U(t',t), \end{aligned} \tag{41}$$

و با تعریف ِ

$$H(t') := \Big[\frac{\partial}{\partial s}U(t'+s,t')\Big]\Big|_{s=0^+}, \tag{42}$$

نتیجه می‌شود

$$\frac{\partial}{\partial t'}U(t',t) = H(t')U(t',t). \tag{43}$$

به ماتریس ِ H ماتریس ِ همیلتنی (یا مولد ِ انتقالِ‌زمان) می‌گویند. معادله‌یِ‌دیفرانسیل ِ بالا هم‌راه با شرط ِ اولیه یِ (36)، ماتریسِ‌تحول ِ U را مشخص می‌کند. ضمناً از تعریف ِ (42)، و رابطه‌ها یِ (38) و (39)، برا یِ H به دست می‌آید

$$\mathbf{S}H = 0, \tag{44}$$

و

$$H^i{}_j \geq 0, \qquad i \neq j. \tag{45}$$

یعنی عنصرها یِ غیرِقطری یِ H نامنفی اند، و مجموع ِ عنصرها یِ هر ستون ِ H صفر است. هم‌چنین، دیده می‌شود که اگر H رابطه‌ها یِ (44) و (45) را بر آورد، آن‌گاه U با شرط ِ (43) و (36)، رابطه‌ها یِ (35)، (38)، و (39) را بر می‌آورد. رابطه یِ (35) با یک جاگذاری یِ ساده دیده می‌شود. برا یِ به‌دست‌آوردن ِ رابطه یِ (39) هم کافی است نشان دهیم مشتق ِ آن نسبت به متغیر ِ اول U صفر است، که این از (43) و (44) دیده می‌شود. برا یِ تحقیق ِ نامساوی یِ (38)، توجه کنید که جواب ِ (43) با شرط ِ مرزی یِ (36) را می‌شود چنین نوشت

$$U(t',t) = \lim_{\Delta t\to 0}[1+\Delta t\ H(t_n)]\cdots[1+\Delta t\ H(t_1)], \quad t_k := t+k\Delta t, \quad \Delta t := \frac{t'-t}{n}. \tag{46}$$

روشن است که با انتخاب ِ Δt یِ به‌حدِکافی‌کوچک، می‌شود کار ی کرد که همه یِ عنصرها یِ ماتریسی یِ همه یِ کروشه‌ها یِ بالا نامنفی شود، و در نتیجه عنصرها یِ ماتریسی یِ حاصلِ‌ضرب هم نامنفی می‌شوند. به این ترتیب، برا یِ فرآیندها یِ زمان‌پیوسته هم می‌شود به جای تابع ِ دومتغیره یِ $U(t',t)$ از تابع ِ یک‌متغیره یِ $H(t)$ استفاده کرد. $H^i{}_j$ (برا یِ $i \neq j$) عبارت است از آهنگ ِ گذار ِ سیستم از حالت ِ j به حالت ِ i. عنصر ِ قطری یِ i ُم ِ H هم برابر است با منفی یِ مجموع ِ آهنگ‌ها یِ گذار

از حالت ـِ i به حالت‌ها یِ دیگر.ضمناً از معادله یِ (43) می‌شود معادله‌یِ‌دیفرانسیل ی برا یِ تحول ـِ بردار ـِ احتمال به دست آورد:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathbf{P}(t) = H(t)\mathbf{P}(t). \tag{47}$$

می‌گوییم فرآیند مستقل‌اززمان است اگر

$$U(t', t) = U(t' - t). \tag{48}$$

در حالت ـِ زمان‌گسسته، این یعنی همه یِ ماتریسِ‌تحول‌ها یِ تک‌گام برابر اند. همه را می‌شود با U نشان داد. بنابراین،

$$U(n, 0) = U^n. \tag{49}$$

در حالت ـِ زمان‌پیوسته، نتیجه می‌شود H به زمان بسته‌گی ندارد. پس جواب ـِ معادله یِ (43) با شرط ـِ مرزی یِ (36) می‌شود

$$U(t', t) = \exp[(t' - t)H]. \tag{50}$$

5 ویژه‌گی‌ها یِ طیفی یِ ماتریس ـِ تحول

یک ماتریس ـِ تحول ماتریس ی است که رابطه‌ها یِ (38) و (39) را بر می‌آورد. در سراسر ـِ این بخش، پایه ای که به کار می‌رود پایه یِ فیزیکی است، مگر آن که صریحاً خلاف ـِ آن گفته شود. در فضا یِ برداری یِ $\mathbb{V}$، طول (نرم) ـِ بردارها را چنین تعریف می‌کنیم.

$$\mathrm{norm}(\mathbf{v}) := \sum_i |v^i|, \tag{51}$$

که در آن، مئلفه‌ها نسبت به پایه یِ فیزیکی اند. دیده می‌شود که طول ـِ بردارها یِ فیزیکی یک است. نرم ـِ ماتریس ـِ M برابر است با بیشینه یِ $\mathrm{norm}(M\mathbf{v})$ به ازا یِ بردارها یِ

$\mathbf{v}$ ی با طول ِ واحد، یا بیشینه ی نسبت ِ $\mathrm{norm}(M\mathbf{v})$ به $\mathrm{norm}(\mathbf{v})$، به ازا ی همه ی بردارها ی غیرِصفر:

$$\mathrm{norm}(M) := \max_{\mathbf{v}\neq 0}\Big[\frac{\mathrm{norm}(M\mathbf{v})}{\mathrm{norm}(\mathbf{v})}\Big]. \tag{52}$$

قضیه ی 2: نرم ِ هر ماتریس ِ تحول یک است، قدرِمطلق ِ هر ویژه‌مقدار ِ یک ماتریس ِ تحول نابزرگ‌تر از یک است، و هر ماتریس ِ تحول حتماً یک ویژه‌مقدار ِ یک دارد.

اثبات: ماتریسِ‌تحول ِ U و بردار ِ دل‌بخواه ِ $\mathbf{v}$ (احیاناً با مئلفه‌ها ی مختلط) را در نظر بگیرید. داریم

$$\begin{aligned}\sum_i |(U\mathbf{v})^i| &= \sum_i \Big|\sum_j U^i{}_j v^j\Big|,\\ &\leq \sum_i\sum_j |U^i{}_j v^j|,\\ &= \sum_j\Big(\sum_i U^i{}_j\Big)|v^j|,\\ &= \sum_j |v^j|.\end{aligned} \tag{53}$$

بنابراین نرم ِ $U\mathbf{v}$ کوچک‌تر از یا مساوی با نرم ِ $\mathbf{v}$ است. از این‌جا نتیجه می‌شود نرم ِ U بزرگ‌تر از یک نیست، و این نتیجه می‌دهد قدرِمطلق ِ همه ی ویژه‌مقدارها ی U نابزرگ‌تر از یک است. اما U یک ویژه‌مقدار ِ یک دارد: $\mathbf{S}$ یک ویژه‌بردار ِ چپ ِ آن با ویژه‌مقدار ِ یک است. پس نرم ِ U ناکوچک‌تر از یک هم هست. بنابراین

$$\mathrm{norm}(U) = 1. \tag{54}$$

■

قضیه ی 3: هر ماتریس ِ تحول، بردارها ی بهنجار را به بردارها ی بهنجار، و بردارها ی نامنفی را به بردارها ی نامنفی می‌نگارد؛ در نتیجه بردارها ی فیزیکی را هم به بردارها ی فیزیکی می‌نگارد.
اثبات با یک جاگذاری ی ساده انجام می‌شود.

قضیه یِ 4: هر ماتریس ی که همه یِ بردارهای فیزیکی را به بردارها یِ فیزیکی بنگارد، یک ماتریس ِ تحول است.
اثبات: از اثر ِ این ماتریس بر بردارها یِ پایه، معلوم می‌شود مئلفه‌ها یِ آن نامنفی اند، و مجموع ِ مئلفه‌ها یِ هر ستون یک است.
■

قضیه یِ 5: حاصلِ‌ضرب ِ دو ماتریس ِ تحول یک ماتریس ِ تحول است. ترکیب ِ خطی یِ دو ماتریس ِ تحول با ضریب‌ها یِ نامنفی یی که مجموع ِشان یک است، یک ماتریس ِ تحول است.
اثبات: به‌ساده‌گی می‌شود نشان داد اثر ِ حاصلِ‌ضرب یا ترکیبِ‌خطی رو یِ بردارها یِ فیزیکی، یک بردار ِ فیزیکی است. به این ترتیب، حکم از قضیه یِ 4 نتیجه می‌شود.
■

می‌گویند بردار ِ غیرِصفر ی مثل ِ $\mathbf{v}$ یک ویژه‌بردار ِ تعمیم‌یافته یِ ماتریس ِ M متناظر با ویژه‌مقدار ِ λ است، اگر اثر ِ توان ی از $(M-\lambda)$ بر این بردار صفر باشد. ویژه‌بردار حالت ِ خاص ی از ویژه‌بردار ِ تعمیم‌یافته است، که برا یِ آن این توان یک است.
قضیه یِ 6: همه یِ ویژه‌بردارها یِ تعمیم‌یافته یِ متناظر با یک ویژه‌مقدار ِ به‌طولِ‌واحد ِ یک ماتریس ِ تحول، ویژه‌بردار ِ آن اند.
اثبات: فرض کنید برا یِ ماتریسِ‌تحول ِ U بردار ِ غیرِصفر ی مثل ِ $\mathbf{v}$ وجود دارد که

$$(U-\lambda)^2\mathbf{v}=0. \tag{55}$$

از این‌جا نتیجه می‌شود

$$(U-\lambda)\mathbf{v}=\mathbf{u}, \tag{56}$$

که در آن اثر ِ $(U-\lambda)$ رو یِ $\mathbf{u}$ صفر است. نتیجه می‌شود

$$U^n\mathbf{v}=\lambda^n\mathbf{v}+n\lambda^{n-1}\mathbf{u}, \tag{57}$$

و از این‌جا

$$\mathrm{norm}(U^n\mathbf{v})\geq n|\lambda^{n-1}|\mathrm{norm}(\mathbf{u})-|\lambda^n|\mathrm{norm}(\mathbf{v}). \tag{58}$$

حالا فرض کنید $|\lambda| = 1$. در این صورت با افزایش ِ n می‌شود عبارت ِ طرف ِ راست ِ نامساوی ِ بالا را از نرم ِ $\mathbf{v}$ بزرگ‌تر کرد، مگر آن که $\mathbf{u} = 0$. اما طرف ِ چپ ِ نامساوی ِی بالا نابزرگ‌تر از نرم ِ $\mathbf{v}$ است، چون U^n یک ماتریس ِ تحول است. پس $\mathbf{u}$ باید صفر باشد. از این‌جا معلوم می‌شود $\mathbf{v}$ ویژه‌بردار ِ U است. اثبات برا ی وقت ی که اثر ِ توان ِ k ُم ِ $(U - \lambda)$ بر $\mathbf{v}$ صفر می‌شود هم با یک استقرا ی ساده انجام می‌شود.
■

معنی ِ قضیه ی بالا این است که اگر ماتریس ِ U را به شکل ِ ژُردَن [b] بنویسیم [1]، بخش‌ها ی متناظر با ویژه‌مقدارها ی به‌طول‌ِیک به شکل ِ قطری اند.

قضیه ی 7: هر ماتریس ِ تحول، حتماً یک ویژه‌بردار ِ فیزیکی متناظر با ویژه‌مقدار ِ یک دارد.

اثبات: متناظر با ماتریسِ‌تحولِ U، ماتریس ِ U' را چنین تعریف می‌کنیم.

$$U' := \alpha U + (1 - \alpha), \tag{59}$$

که در آن $0 < \alpha < 1$. به خاطر ِ قضیه ی 5، U' هم یک ماتریس ِ تحول است. توجه داریم که ویژه‌بردارها و ویژه‌بردارها ی تعمیم‌یافته ی U و U' یک‌سان اند، و λ ویژه‌مقدار ِ U است، اگر و تنها اگر $\lambda' := \alpha\lambda + (1 - \alpha)$ ویژه‌مقدار ِ U' باشد. ویژه‌مقدارها ی ماتریس ِ U در قرص ی به مرکز ِ مبدأ و شعاع ِ واحد اند. پس ویژه‌مقدارها ی U' در قرص ی به مرکز ِ $(1 - \alpha)$ و شعاع ِ α هستند. از جمله نتیجه می‌شود تنها‌ویژه‌مقدار ِ U' که قدرِمطلق ِ آن یک است، خود ِ یک است؛ قدرِمطلق ِ بقیه ی ویژه‌مقدارها ی U' کوچک‌تر از یک است. حالا یک بردار ِ فیزیکی مثل ِ $\mathbf{P}$ را در نظر بگیرید. این بردار را می‌شود بر حسب ِ ویژه‌بردارها ی تعمیم‌یافته ِی U' بسط داد:

$$\mathbf{P} = \mathbf{P}' + \mathbf{P}'', \tag{60}$$

که در آن $\mathbf{P}'$ یک‌ویژه‌بردار ِ تعمیم‌یافته با ویژه‌مقدار ِ یک است (که طبق ِ قضیه ی 6 ویژه‌بردار ِ U' است) و $\mathbf{P}''$ یک ترکیب ِ خطی از ویژه‌بردارها ی تعمیم‌یافته ی متناظر با بقیه ی ویژه‌مقدارها ی U' است؛ که قدرِمطلق ِ همه کوچک‌تر از یک است. بنابراین، اثر ِ U'^n رو ی $\mathbf{P}''$، در حد ِ $n \to \infty$ صفر می‌شود. ضمناً داریم

$$U'\mathbf{P}' = \mathbf{P}'. \tag{61}$$

در نتیجه

$$\lim_{n\to\infty}(U'^n\mathbf{P}) = \mathbf{P}'. \tag{62}$$

اما طرف ـِ چپ ـِ رابطه یِ بالا یک بردار ـِ فیزیکی است. پس $\mathbf{P}'$ هم فیزیکی است. بنابراین U' یک ویژه‌بردار ـِ فیزیکی متناظر با ویژه‌مقدار ـِ یک دارد، که البته ویژه‌بردار ـِ U (با همان ویژه‌مقدار ـِ یک) هم هست.

■

قضیه یِ 8: اگر تنهاویژه‌مقدار ـِ باطولِ‌واحد ـِ ماتریسِ‌تحول ـِ U خود ـِ یک باشد، آن‌گاه $\lim_{n\to\infty} U^n$ وجود دارد.

اثبات: طبق ـِ قضیه یِ شکل ـِ ژُردَن [b] برا یِ ماتریس‌ها، U را می‌شود به شکل ـِ تبدیلِ‌تشابهی‌یافته یِ یک ماتریس ـِ بلُکی‌ـ قطری نوشت، که هر بلُک متناظر است با یک ی از ویژه‌مقدارها یِ متمایز ـِ U، عنصرها یِ قطری یِ هر بلُک برابر اند با آن ویژه‌مقدار، عنصرها یِ قطر ـِ فرعی یِ یک‌ی‌بالاترازقطرِاصلی صفر یا یک اند، و بقیه یِ عنصرها صفر اند [1]. از این‌جا معلوم می‌شود در توان ـِ n اُم ـِ این ماتریس ـِ بلُکی‌ـ قطری، در حد ـِ n ها یِ بزرگ فقط بلُک‌ها یِ متناظر با ویژه‌مقدارها یِ با طول ـِبزرگ‌ تر از یک یا مساوی با یک باقی‌می‌مانند. چون U ماتریس ـِ تحول است، طول ـِ ویژه‌مقدارها یِ آن بزرگ‌تر از یک نیست. ضمناً طبق ـِ فرض ـِ قضیه، تنهاویژه‌مقدار ـِ باطولِ‌یک ـِ آن هم خود ـِ یک است. بنابراین، برا یِ n ها یِ بزرگ فقط بلُک ـِ متناظر با ویژه‌مقدار ـِ یک ـِ آن باقی می‌ماند. اما طبق ـِ قضیه یِ 6، این بلُک قطری است، پس برابر ـِ ماتریس ـِ یک است. بنابراین توان ـِ n اُم ـِ آن هم یک است. به این ترتیب، اگر ویژه‌بردارها یِ تعمیم‌یافته یِ U را ستون‌ها یِ ماتریس ی مثل ـِ E بگیریم، چنان که ویژه‌بردارها یِ متناظر با ویژه‌مقدار ـِ یک را در ستون‌ها یِ اول بگذاریم، آن‌گاه

$$\lim_{n\to\infty} U^n = E\ \mathrm{diag}\ (\underbrace{1,\cdots,1}_{m},0,\cdots,0)E^{-1}, \tag{63}$$

که در آن m بعد ـِ ویژه‌فضا یِ U متناظر با ویژه‌مقدار ـِ یک است. به‌ویژه، اگر $m=1$، آن گاه

$$\lim_{n\to\infty} U^n = \mathbf{uS}, \tag{64}$$

که در آن $\mathbf{u}$ ویژه‌بردار ِ متناظرباویژه‌مقدارِیک ِ U است، که بهنجار شده است.

■

معنی یِ قضیه یِ بالا آن است که در فرآیندها یِ تصادفی یی که با چنین ماتریس‌هایِ‌تحول ی مشخص می‌شوند، سیستم با گذشت ِ زمان حالت ِ مانا پیدا می‌کند (که البته این حالت ممکن است به حالت ِ اولیه یِ سیستم هم بسته‌گی داشته باشد.

قضیه یِ 9: یک ویژه‌بردار ِ تعمیم‌یافته یِ یک ماتریس ِ تحول را در نظر بگیرید، که ویژه‌مقدار ِ متناظر با آن یک نباشد. این بردار نه نامنفی است و نه بهنجار.

اثبات: ماتریسِ‌تحول ِ U را در نظر بگیرید و فرض کنید $\mathbf{v}$ یک ویژه‌بردار ِ تعمیم‌یافته یِ آن متناظر با ویژه‌مقدار ِ $\lambda \neq 1$ باشد. در این صورت اثر ِ توان ی از $(U - \lambda)$ بر $\mathbf{v}$ صفر می‌شود. فرض کنید این توان n باشد. داریم

$$\mathbf{S}(U - \lambda)^n \mathbf{v} = 0. \tag{65}$$

با استفاده از (38)،

$$(1 - \lambda)^n \mathbf{S}\mathbf{v} = 0. \tag{66}$$

از این‌جا نتیجه می‌شود اثر ِ $\mathbf{S}$ رو یِ $\mathbf{v}$ صفر است. یعنی مجموع ِ مئلفه‌ها یِ $\mathbf{v}$ صفر است. پس $\mathbf{v}$ بهنجار نیست. ضمناً چون مجموع ِ مئلفه‌ها یِ $\mathbf{v}$ صفر است، نمی‌شود همه یِ مئلفه‌ها یِ آن حقیقی و نامنفی باشند (چون $\mathbf{v} \neq 0$). پس $\mathbf{v}$ نامنفی هم نیست.

■

قضیه یِ 10: اگر همه یِ عنصرها یِ قطری یِ یک ماتریس ِ تحول مثبت باشند، آن‌گاه تنهاویژه‌مقدار ِ باطولِ‌یک ِ آن ماتریسِ‌تحول خود ِ یک است.

اثبات: فرض کنید همه یِ عنصرها یِ قطری یِ ماتریسِ‌تحول ِ U مثبت باشند. کمینه یِ این عنصرها یِ قطری را با α نشان می‌دهیم، که عدد ی مثبت است. دیده می‌شود که ماتریس ِ U' به شکل ِ

$$U' := \frac{1}{1 - \alpha} U - \frac{\alpha}{1 - \alpha} \tag{67}$$

هم یک ماتریس ِ تحول است. λ یک ویژه‌مقدار ِ U است، اگر و تنها اگر $\lambda' := (1 - \alpha)^{-1}(\lambda - \alpha)$ یک ویژه‌مقدار ِ U' باشد. به این ترتیب، هر ویژه‌مقدار ِ λ یِ ماتریسِ‌تحول ِ U به شکل ِ

$$\lambda = (1-\alpha)\lambda' + \alpha \qquad (68)$$

است، که در آن λ' در قرص ی به مرکز ِ مبدأ و شعاع ِ واحد است. اما این یعنی λ در قرص ی به مرکز ِ α و شعاع ِ $(1-\alpha)$ است. تنهانقطه یِ این قرص که طول َش یک است، خود ِ نقطه یِ یک است. پس تنهاویژه‌مقدار ِ باطولِ‌یک ِ U، خود ِ یک است.
■

یعنی سیستم‌ها یِ تصادفی یی که در آن‌ها احتمال ِ باقی‌ماندن ِ سیستم در هیچ حالت ی صفر نیست، با گذشت ِ زمان به حالت ِ مانا می‌رسند.

می‌گوییم ماتریسِ‌تحول ِ U حالت ِ فیزیکی یِ X^j را به طور ِ غیرِمستقیم به حالت ِ فیزیکی یِ X^i تبدیل می‌کند، اگر عدد ِ مثبت ی مثل ِ n وجود داشته باشد که $(U^n)^i{}_j \neq 0$. اگر این رابطه به ازا یِ $n = 1$ درست باشد، می‌گوییم U حالت ِ X^j را مستقیماً به حالت ِ X^i تبدیل می‌کند. معنی یِ تبدیل ِ غیرِمستقیم آن است که یک زنجیره حالت ِ X^{i_0} تا X^{i_n} وجود دارد که

$$U^{i_k}{}_{i_{k-1}} > 0, \quad 1 \leq k \leq n, \quad i_0 := j, \quad i_n := i. \qquad (69)$$

یعنی ممکن است سیستم طی ِ n مرحله از حالت ِ X^j به حالت ِ X^i برود.

قضیه یِ 11: فرض کنید پایه یِ فیزیکی یِ B اجتماع ِ دو زیرمجموعه یِ بدونِ‌اشتراک ِ B' و B'' باشد، و ماتریسِ‌تحول ِ U هر حالت ِ فیزیکی یِ متناظر با یک ی از اعضا یِ B'' را به طور ِ غیرِمستقیم به حالت ِ فیزیکی یِ متناظر با دستِ‌کم یک ی از اعضا یِ B' مربوط کند. در این صورت، اگر $\mathbf{v}$ یک ویژه‌بردار ِ U متناظر با ویژه‌مقدار ی با طول ِ یک باشد، آن‌گاه $\mathbf{v} \notin \mathrm{span}\,(B'')$.

اثبات: تعریف می‌کنیم

$$\begin{aligned} I' &:= \{i |\ \mathbf{e}_i \in B'\}, \\ I'' &:= \{i |\ \mathbf{e}_i \in B''\}. \end{aligned} \qquad (70)$$

جمع‌بندی رو یِ مجموعه‌ها یِ I' و I'' را، به ترتیب با $\sum'$ و $\sum''$ نمایش می‌دهیم.

فرض کنید $\mathbf{v}$ یک ویژه‌بردار ِ U متناظر با ویژه‌مقدار ِ λ با $|\lambda| = 1$ باشد، و

$$\mathbf{v} = {\sum_i}'' v^i \mathbf{e}_i, \tag{71}$$

یعنی $\mathbf{v} \in \mathrm{span}\ (B'')$. داریم

$$\begin{aligned} {\sum_i}'' |v^i| &= {\sum_i}'' |(\lambda)^n v^i|, \\ &= {\sum_i}'' \Big| \sum_j (U^n)^i{}_j v^j \Big|, \\ &= {\sum_i}'' \Big| {\sum_j}'' (U^n)^i{}_j v^j \Big|, \\ &\le {\sum_{i,j}}'' (U^n)^i{}_j |v^j|, \\ &\le {\sum_j}'' |v^j|. \end{aligned} \tag{72}$$

در تساوی ِ سوم، از رابطه‌ی (71) استفاده شده. حالا توجه کنید که نامساوی ِ دوم زمان ی تساوی می‌شود که به ازا ی ِ هر $j \in I''$، یا $v^j = 0$ یا $\sum_i''(U^n)^i{}_j = 1$. ضمناً این رابطه باید برا یِ همه ی ِ n درست باشد. اما طبق ِ فرض ِ قضیه، به ازا یِ هر $j \in B''$ می‌شود یک n و یک $k \in B'$ پیدا کرد که $(U^n)^k{}_j \ne 0$، و در نتیجه $\sum_i''(U^n)^i{}_j < 1$. پس به ازا یِ هر $j \in B''$، v^j باید صفر باشد. بنابراین خود ِ $\mathbf{v}$ صفر می‌شود و فرض ِ ویژه‌برداربودن ِ آن نادرست است. یعنی فرض ِ (71) به تناقض منجر می‌شود.

■

قضیه ی ِ 12: فرض کنید پایه یِ فیزیکی یِ B اجتماع ِ دو زیرمجموعه یِ بدونِ‌اشتراک ِ B' B'' باشد، و ماتریسِ‌تحول ِ U هر حالت ِ فیزیکی یِ متناظر با یک ی از اعضا یِ B'' را به طور ِ غیرِمستقیم به حالت ِ فیزیکی یِ متناظر با دستِ‌کم یک ی از اعضا یِ B' تبدیل کند، و هیچ حالت ِ فیزیکی یی را که متناظر با یک ی از اعضا یِ B' باشد به طور ِ غیرِمستقیم به حالتِ فیزیکیِ متناظر با هیچ یک از اعضا یِ B'' تبدیل نکند. در این صورت، اگر $\mathbf{v}$ یک ویژه‌بردار ِ U متناظر با ویژه‌مقدار ی با طول ِ یک باشد، آن‌گاه $\mathbf{v} \in \mathrm{span}\ (B')$.

اثبات: فرض کنید $\mathbf{v}$ یک ویژه‌بردار ِ U متناظر با ویژه‌مقدار ِ λ با $|\lambda| = 1$ باشد. داریم

$$\begin{aligned}\sum_i{}''|v^i| &= \sum_i{}''|(\lambda)^n v^i|,\\ &= \sum_i{}''\Big|\sum_j (U^n)^i{}_j v^j\Big|,\\ &= \sum_i{}''\Big|\sum_j{}''(U^n)^i{}_j v^j\Big|,\\ &\le \sum_{i,j}{}''(U^n)^i{}_j|v^j|,\\ &\le \sum_j{}''|v^j|. \end{aligned} \tag{73}$$

در تساوی یِ سوم، این بار از این استفاده شده که به ازا یِ هر $i \in I''$، هر $j \in I'$، و هر n، $(U^n)^i{}_j = 0$. نامساوی یِ دوم زمان ی تساوی می‌شود که به ازا یِ هر $j \in B''$، یا $v^j = 0$ یا $\sum_i''(U^n)^i{}_j = 1$. ضمناً این رابطه باید برا یِ همه یِ n ها درست باشد. اما طبق ِ فرض ِ قضیه، به ازا یِ هر $j \in B''$ می‌شود یک n و یک $k \in B'$ پیدا کرد که $(U^n)^k{}_j \ne 0$، و در نتیجه $\sum_i''(U^n)^i{}_j < 1$. پس به ازا یِ هر $j \in B''$، v^j باید صفر باشد.
■

قضیه یِ 13: فرض کنید به ازا یِ هر دوعدد ِ متمایز ِ i و j، ماتریسِ‌تحول ِ U حالت ِ X^i را به طور ِ غیرِمستقیم به حالت ِ X^j تبدیل کند. در این صورت ویژه‌مقدارها یِ باطولِ‌یک چندگانه نیستند و همه یِ مئلفه‌ها یِ ویژه‌بردار ِ متناظر با هر یک از این ویژه‌مقدارها غیرِصفر اند. به‌ویژه، همه یِ مئلفه‌ها یِ ویژه‌بردار ِ متناظر با ویژه‌مقدار ِ یک را می‌شود مثبت کرد.

اثبات: بگیرید $B' := \{\mathrm{e}_i\}$ و $B'' := B - B'$. فرض کنید $\mathbf{v}$ یک ویژه‌بردار ِ متناظر با ویژه‌مقدار ِ λ با $|\lambda| = 1$ باشد. با استفاده از قضیه یِ 11، نتیجه می‌شود $v^i \ne 0$. اما این برا یِ هر i درست است. پس همه یِ مئلفه‌ها یِ $\mathbf{v}$ غیرِصفر اند. حالا توجه کنید که اگر λ چندگانه باشد، به خاطر ِ قضیه یِ 6، به تعداد ِ چندگانه‌گی یِ λ ویژه‌بردار ِ خطی‌مستقل ِ متناظر با ویژه‌مقدار ِ λ وجود دارد. اما اگر دو ویژه‌بردار ِ مستقل ِ متناظر با یک ویژه‌مقدار وجود داشته باشد، هر ترکیب ِ خطی از آن‌ها هم ویژه‌بردار ی متناظر با

همان ویژه‌مقدار است، و ضریب‌ها ی ترکیب ِ خطی را می‌شود چنان گرفت که دستِ‌کم یک ی از مئلفه‌ها یِ بردار ِ غیرِصفر ِ حاصل صفر شود. در ابتدا یِ اثبات نشان دادیم چنین‌چیز ی ممکن نیست. پس دو ویژه‌بردار ِ خطی‌مستقل ِ متناظر با λ وجود ندارد، و در نتیجه λ چندگانه نیست. قسمت ِ آخر ِ حکم هم از قضیه یِ 7 نتیجه می‌شود.

■

6 ویژه‌گی‌ها یِ طیفی یِ ماتریسِ‌همیلتنی و ماتریسِ‌تحول ِ فرآیندها یِ زمان‌پیوسته

قضیه‌ها یِ بخش ِ قبل، هم برا یِ فرآیندها یِ زمان‌گسسته و هم برا یِ فرآیندها یِ زمان‌پیوسته بودند. قضیه‌ها یی که به دنبال می‌آید، تنها برا یِ فرآیندها یِ زمان‌پیوسته اند. در این‌جا از ماتریس ِ همیلتنی هم استفاده می‌کنیم. یک ماتریس ِ همیلتنی ماتریس ی است که رابطه‌ها یِ (44) و (45) را بر می‌آورد. در این بخش هم، پایه ای که به کار می‌رود پایه یِ فیزیکی است.

قضیه یِ 14: عنصرها یِ قطری یِ ماتریسِ‌تحول ِ U، که با رابطه‌ها یِ (36) و (43) از همیلتنی یِ تکه‌ای‌ـ پیوسته یِ H به دست می‌آید، مثبت اند.

اثبات: جواب ِ رابطه‌ها یِ (36) و (43) به شکل ِ (46) است. چون H تکه‌ای‌ـ پیوسته است، کمینه یِ عنصرها یِ قطری یِ آن رو یِ $[t,t']$ وجود دارد. این کمینه را $-R$ می‌گیریم (R عدد ی نامنفی) است. حالا می‌گیریم

$$N := 2R(t'-t). \tag{74}$$

روشن است که اگر در رابطه یِ (46) بگیریم $n>N$، آن‌گاه همه یِ عنصرها یِ قطری یِ $1+\Delta t\ H(t_k)$ (با تعریف ِ Δt طبق ِ رابطه یِ (46)) مثبت و ناکوچک‌تر از $F_n := 1-(t'-t)R/n$ اند. به علاوه، چون همه یِ عنصرها یِ عامل‌ها یِ عبارت ِ طرفِ‌راست ِ تساوی یِ

$$U_n := [1+\Delta t\ H(t_n)]\cdots[1+\Delta t\ H(t_1)] \tag{75}$$

نامنفی اند، نتیجه می‌شود عنصرها يِ قطری يِ ماتریس ـِ U_n ناکوچک‌تر از $(F_n)^n$ اند. اما

$$\lim_{n\to\infty}(F_n)^n = \exp[-(t'-t)R], \qquad (76)$$

و از این‌جا نتیجه می‌شود حد ـِ عنصرها يِ قطری ـِ U_n ناکوچک‌تر از عبارت ـِ بالا است، یعنی عنصرها يِ قطری يِ U بزرگ‌تر از یا مساوی با عدد ـِ مثبت ـِ $\exp[-(t'-t)R]$ اند.
■

قضیه يِ 15: تنهاویژه‌مقدار ـِ باطولِ‌واحد ـِ ماتریسِ‌تحول ی که از یک همیلتنی می آید، خود ـِ یک است.
اثبات: این قضیه نتیجه يِ مستقیم ـِ قضیه‌ها يِ 10 و 14 است.
■

قضیه يِ 16: برا يِ یک ماتریسِ‌همیلتنی، جزئ ـِ حقیقی يِ ویژه‌مقدارها نامثبت است، تنهاویژه‌مقدار ی که جزئ ـِ حقیقی يِ آن صفر است خود ـِ صفر است، و همه يِ ویژه‌بردارها يِ تعمیم‌یافته يِ متناظر با ویژه‌مقدار ـِ صفر ویژه‌بردار اند.
اثبات: اگر H یک ماتریس ـِ همیلتنی، و کمینه يِ عنصرها يِ قطری يِ آن $-R$ باشد، (R عدد ی نامنفی است)، آن‌گاه $U := 1 + (2R)^{-1}H$ یک ماتریس ـِ تحول است؛ ویژه‌بردارها يِ تعمیم‌یافته يِ H و U یک‌سان اند؛ و h یک ویژه‌مقدار ـِ H است، اگر و تنها اگر $\lambda := 1 + (2R)^{-1}h$ یک ویژه‌مقدار ـِ U باشد. طبق ـِ قضیه يِ 2، λ باید در قرص ی به مرکز ـِ مبدئ و شعاع ـِ یک باشد. پس h باید در قرص ی به مرکز ـِ $(-2R)$ و شعاعِ $(2R)$ باشد. جزئ ـِ حقیقی يِ همه يِ نقطه‌ها يِ این قرص نامثبت است، و تنهانقطه يِ این قرص با جزئ ـِ حقیقی يِ صفر، مبدئ است.

سرانجام، ویژه‌بردارها يِ تعمیم‌یافته يِ H متناظر با ویژه‌مقدار ـِ صفر، همان ویژه‌بردارها يِ تعمیم‌یافته يِ U متناظر با ویژه‌مقدار ـِ یک اند، که طبق ـِ قضیه يِ 6 ویژه‌بردار ـِ U اند، پس ویژه‌بردار ـِ H هم هستند.
■

قضیه يِ 17: ماتریسِ‌تحول ـِ یک سیستم ـِ تصادفی يِ زمان‌پیوسته وارون‌پذیر است.
اثبات: ماتریسِ‌تحول ـِ $U(t',t)$ از رابطه يِ (46) به دست می آید. به‌ساده‌گی دیده می‌شود که U^{-1} با

$$U^{-1}(t',t) = \lim_{\Delta t\to 0}[1-\Delta t\, H(t_1)]\cdots[1-\Delta t\, H(t_n)], \quad t_k := t+k\Delta t, \quad \Delta t := \frac{t'-t}{n} \tag{77}$$

وارون ـِ این ماتریس است.

■

7 تصویر ـِ هَیزِنبِرگ

فرض کنید حالت ـِ یک سیستم ـِ تصادفی در زمان ـِ صفر $\mathbf{P}(0)$ است. می‌خواهیم احتمال ـِ این که کمیت ـِ Q در زمان ـِ t مقدار ـِ q بگیرد را حساب کنیم. داریم

$$\begin{aligned} P_Q(t,q) &= \mathbf{e}^q\mathbf{P}(t), \\ &= \mathbf{e}^q U(t,0)\mathbf{P}(0). \end{aligned} \tag{78}$$

با تعریف ـِ

$$\mathbf{e}^q(t) := \mathbf{e}^q U(t,0), \tag{79}$$

معلوم می‌شود که می‌شود تحول را از بردارِاحتمال ـِ سیستم برداشت و به ویژه‌بردارها یِ چپ ـِ کمیت‌ها منتقل کرد:

$$P_Q(t,q) = \mathbf{e}^q(t)\mathbf{P}(0). \tag{80}$$

چون $\mathbf{S}$ ویژه‌بردار ـِ چپ ـِ U با ویژه‌مقدار ـِ یک است، داریم

$$\sum_q \mathbf{e}^q(t) = \mathbf{S}. \tag{81}$$

اگر U وارون‌پذیر باشد، می‌شود ماتریس ـِ $Q(t)$ را چنان تعریف کرد که $\mathbf{e}^q(t)$ ویژه‌بردار ـِ چپ ـِ آن با ویژه‌مقدار ـِ q باشد:

$$Q(t) := U^{-1}(t,0)QU(t,0). \tag{82}$$

در این صورت مقدارِچشم‌داشتی یِ Q در زمان ـِ t می‌شود

$$\langle Q\rangle(t) = \mathbf{S}Q(t)\mathbf{P}(0). \tag{83}$$

در این‌جا از این استفاده شده که U^{-1} بردار ـِ $\mathbf{S}$ را تغییر نمی‌دهد. طبق ـِ قضیه یِ 17، ماتریس‌های‌ِتحول ـِ متناظر با فرآیندها یِ زمان‌پیوسته وارون‌پذیر اند. پس برا یِ این‌ها همیشه می‌شود رابطه‌ها یِ (82) و (83) را نوشت. اگر از (82) نسبت به زمان مشتق بگیریم، نتیجه می‌شود

$$\frac{\mathrm{d}Q(t)}{\mathrm{d}t} = [Q(t), H^{\mathrm{H}}(t)], \tag{84}$$

که در آن،

$$H^{\mathrm{H}}(t) := U^{-1}(t,0)H(t)U(t,0). \tag{85}$$

به جا یِ (43) یا (47)، می‌شود (84) را به کار برد. دیده می‌شود که اگر $Q(t)$ با $H^{\mathrm{H}}(t)$ جابه‌جا شود، آن‌گاه $Q(t)$ ثابت خواهد بود. به‌ویژه، اگر سیستم مستقل‌اززمان باشد، آن‌گاه H^{H} همان H می‌شود و شرط ـِ لازم و کافی برا یِ جابه‌جاشدن ـِ $Q(t)$ با $H^{\mathrm{H}}(t)$ آن است که Q و H با هم جابه‌جا شوند.

به این که تحول ـِ سیستم را از بردار ـِ احتمال برداریم و به ویژه‌بردارها یِ مشاهده‌پذیرها یا خود ـِ مشاهده‌پذیرها منتقل کنیم، تصویر ـِ هَیزِن‌بِرگ [c] می‌گوییم.

8 مقایسه با کوانتم‌مکانیک

در کوانتم‌مکانیک هم حالت ـِ سیستم با یک بردار در یک فضا یِ برداری مشخص می‌شود. اما این فضا یِ برداری، با فضا یِ برداری یِ متناظر با سیستم‌ها یِ تصادفی تفاوت‌ها یی دارد. این تفاوت‌ها عبارت اند از

- در فضا یِ برداری یِ متناظر با یک فرآیند ـِ تصادفی، یک پایه یِ ممتاز وجود دارد؛ همان پایه یِ فیزیکی. در فضا یِ برداری یِ متناظر با یک سیستم ـِ کوانتمی، چنین‌پایه ای وجود ندارد. به همین علت در سیستم‌ها یِ کوانتمی برهم‌نهش ـِ خطی یِ حالت‌ها یِ سیستم هم یک حالت ـِ مجاز است. مثلاً برهم‌نهش ـِ خطی یِ حالت ـِ زنده و حالت ـِ مرده برا یِ گربه یِ شْرُدینگِر [d] یک حالت ـِ ممکن ـِ گربه

است. در مقابل، فضا ي برداری يِ متناظر با یک سیستم ِ کوانتمی، به یک ضربِداخلی مجهز است.

- در فرآیندها يِ تصادفی، بردارها يِ فیزیکی بردارها یی اند که مئلفه‌ها پشان (در پایه يِ فیزیکی) نامنفی، و مجموع ِ مئلفه‌ها پشان یک است. در کوانتم‌مکانیک رو يِ تک‌تک ِ مئلفه‌ها يِ بردار شرط ی وجود ندارد و بهنجارِش به معنی يِ آن است که مجموع ِ مجذور ِ قدرِمطلق ِ مئلفه‌ها (در یک پایه يِ راست‌هنجار) یک است.

- در فرآیندها ي تصادفی، ضریب‌ها يِ بسط ِ بردار ِ توصیف‌کننده يِ حالت ِ سیستم (نسبت به پایه يِ فیزیکی) احتمال اند. در کوانتم‌مکانیک، مجذور ِ قدرِمطلق ِ این ضریب‌ها (در یک پایه يِ راست‌هنجار) احتمال است.

- در فرآیندها يِ تصادفی، اگر سیستم در یک حالت ِ تعینی باشد، یعنی اگر بردار ِ توصیف‌کننده يِ آن برابر با یک ی از اعضا يِ پایه يِ ممتاز ِ فضا باشد، همه يِ مشاهده‌پذیرها معین اند. در کوانتم‌مکانیک پایه يِ راست‌هنجار ِ ممتاز ی وجود ندارد: هر پایه يِ راست‌هنجار متناظر با یک دسته مشاهده‌پذیر ِ سازگار با هم است، و حالت ی وجود ندارد که در آن همه يِ مشاهده‌پذیرها معین باشند.

- ماتریس ِ تحول باید ساختارها يِ فضايِبرداری را حفظ کند، چه در فرآیندها يِ تصادفی يِ مارکُف [a] و چه در کوانتم‌مکانیک. در فرآیندها يِ تصادفی، این یعنی ماتریس ِ تحول باید بردارها يِ فیزیکی را به بردارها يِ فیزیکی تبدیل کند، که یعنی همه يِ مئلفه‌ها يِ آن باید نامنفی باشند و $\mathbf{S}$ باید ویژه‌بردار ِ چپ ِ آن با ویژه‌مقدار ِ یک باشد. در کوانتم‌مکانیک، این یعنی ماتریس ِ تحول باید ضربِداخلی را حفظ کند، یعنی باید یکانی باشد.

- به زبان ِ همیلتنی، عنصرهايِغیرِقطری يِ همیلتنی يِ متناظر با یک فرآیند ِ تصادفی يِ مارکُف [a] ِ زمان‌پیوسته باید نامنفی باشند، و $\mathbf{S}$ باید یک ویژه‌بردار ِ چپ ِ همیلتنی با ویژه‌مقدار ِ صفر باشد. همیلتنی يِ متناظر با یک سیستم ِ کوانتمی باید یک ماتریس ِ اِرمیتی باشد.

9 کاهش ـ فضا یِ حالت‌ها یِ ممکن

فرض کنید مجموعه یِ حالت‌ها یِ ممکن ـ $\{X^i \mid i\}$ برابر است با اجتماع ـ تعداد ی زیرمجموعه یِ بدونِ‌اشتراک:

$$\begin{aligned}&\{X^i \mid i\} = \cup_a Y^a,\\ &Y^a \cap Y^b = \emptyset, \quad a \neq b.\end{aligned} \tag{86}$$

می‌شود احتمال‌ها یِ جدید ی تعریف کرد که عبارت اند از احتمال ـ این که سیستم در یک ی از حالت‌ها یِ هر یک از زیرمجموعه‌ها یِ بالا باشد:

$$\begin{aligned}P^a &:= \sum_{i \mid X^i \in Y^a} P^i,\\ &=: \sum_i{}^a P^i.\end{aligned} \tag{87}$$

مثلاً فرض کنید از کیسه ای مهره ای بیرون می‌آوریم و ممکن است این مهره سفید، سبز، یا قرمز باشد. اگر برا یِمان مهم نباشد که مهره سبز است یا قرمز، می‌شود حالت‌ها یِ سفید و رنگی را در نظر گرفت. حالت ـ رنگی یعنی سبز یا قرمز. از رابطه یِ بالا معلوم می‌شود

$$P^a = \sum_i{}^a \mathbf{e}^i \mathbf{P}. \tag{88}$$

بنابراین می‌شود هم‌بردارها یِ جدید ی مثل ـ $\mathbf{e}^a$ تعریف کرد که

$$\mathbf{e}^a := \sum_i{}^a \mathbf{e}^i. \tag{89}$$

در این صورت،

$$P^a = \mathbf{e}^a \mathbf{P}. \tag{90}$$

توجه کنید که

$$\mathbf{S} = \sum_i \mathbf{e}^i,$$

$$= \sum_a \sum_i^a \mathbf{e}^i,$$

$$= \sum_a \mathbf{e}^a, \tag{91}$$

و

$$\sum_a P^a = 1. \tag{92}$$

ضمناً P^a ها نامنفی اند (چون مجموع ِ تعداد ی عدد ِ نامنفی اند).

دانستن ِ P^a ها برا یِ تعیین ِ $\mathbf{P}$ کافی نیست. اما اگر فقط خود ِ P^a ها موردِنظر باشند، دانستن ِ $\mathbf{P}$ مهم نیست. می‌شود از P^a ها بردار ی ساخت که فقط اطلاعات ِ P^a ها را در بر داشته باشد. برا یِ این کار فضا یِ $\tilde{\mathbb{V}}$ را به شکل ِ

$$\tilde{\mathbb{V}} := \text{span}\,\{\mathbf{e}_a \mid a\} \tag{93}$$

تعریف می‌کنیم، و متناظر با بردار ِ $\mathbf{P}$ بردار ِ دیگر ِ $\tilde{\mathbf{P}}$ را تعریف می‌کنیم که

$$\tilde{\mathbf{P}} := P^a \mathbf{e}_a. \tag{94}$$

اگر اثر ِ $\mathbf{e}^a$ رو یِ $\mathbf{e}_b$ را به شکل ِ

$$\mathbf{e}^a \mathbf{e}_b := \delta^a_b, \tag{95}$$

تعریف کنیم، معلوم می‌شود

$$P^a = \mathbf{e}^a \tilde{\mathbf{P}}. \tag{96}$$

در واقع کار ی که کرده ایم این است که یک رابطه یِ هم‌ارزی در $\mathbb{V}$ تعریف کرده ایم:

$$\mathbf{e}_i \sim \mathbf{e}_j \quad \Leftrightarrow \quad (\exists a \mid X^i, X^j \in Y^a). \tag{97}$$

$\tilde{\mathbb{V}}$ خارجِ‌قسمت ِ $\mathbb{V}$ به این رابطه یِ هم‌ارزی است، و

$$\tilde{\mathbf{P}} := [\mathbf{P}]. \tag{98}$$

به این کار کاهش ِ فضا یِ حالت‌ها، و به $\tilde{\mathbb{V}}$ فضا یِ کاسته می‌گوییم.

گام ـِ بعدی فرمول‌بندی یِ مشاهده‌پذیرها است. با استفاده از رابطه یِ (26) می‌شود احتمال ـِ این که مشاهده‌پذیر ـِ Q مقدار ـِ q داشته باشد را حساب کرد. اما قرار است همه‌چیز را بر حسب ـِ P^a ها (یا بر حسب ـِ $\tilde{\mathbf{P}}$) حساب کنیم. این کار به شرط ی ممکن است که در طرف ـِ راست ـِ رابطه یِ (26) فقط عبارت‌ها یی به شکل ـِ $\sum^a P^i$ ظاهر شود، یعنی به شرط ی که

$$\forall a\ :\ [X^i, X^j \in Y^a \quad \Rightarrow \quad Q(X^i) = Q(X^j)]. \tag{99}$$

معنی یِ این شرط هم روشن است. اگر در مثال ـِ بالا، Q برا یِ حالت ـِ سبز یک و برا یِ حالت ـِ قرمز صفر باشد، با دانستن ـِ صرفاً این که مهره رنگی است معلوم نمی‌شود Q چه قدر است.

حالا فرض کنید Q شرط ـِ (99) را بر می‌آورد. از این‌جا مشاهده‌پذیر ـِ $\tilde{Q}$ را به این شکل تعریف می‌کنیم که

$$\tilde{Q}(Y^a) := Q(X^i), \quad X^i \in Y^a. \tag{100}$$

به خاطر ـِ رابطه یِ (99)، مشاهده‌پذیر ـِ $\tilde{Q}$ خوش‌تعریف است. به‌ساده‌گی دیده می‌شود شرط ـِ (99) هم‌ارز است با این که

$$\begin{aligned} \mathbf{e}^b Q &=: \tilde{Q}^b{}_a \mathbf{e}^a, \\ &= \tilde{Q}(Y^b)\mathbf{e}^b. \end{aligned} \tag{101}$$

یعنی به شرط ی می‌شود مانسته یِ مشاهده‌پذیر ـِ Q برا یِ فضا یِ کاسته را تعریف کرد که ماتریس ـِ متناظر با Q اعضا یِ $\tilde{\mathbb{V}}^*$ را در خود ـِ $\tilde{\mathbb{V}}^*$ نگه دارد. در این صورت یک ماتریس ـِ $\tilde{Q}$ تعریف می‌کنیم که

$$\mathbf{e}^b \tilde{Q} \mathbf{e}_a := \mathbf{e}^b Q \mathbf{e}_i, \quad X^i \in Y^a, \tag{102}$$

و دیده می‌شود که همه یِ عملیات ـِ بخش ـِ 3 با این ماتریس و بردار ـِ $\tilde{\mathbf{P}}$ قابلِ‌تکرار است.

سرانجام، کاهش ـِ فضایِ‌حالت ـِ فرآیندها یِ تصادفی را در نظر بگیرید. این کاهش ممکن است، اگر احتمال ـِ گذار از حالت ـِ Y^a به حالت ـِ Y^b معلوم باشد. احتمال ـِ رفتن ـِ سیستم به حالت ـِ Y^b از حالت ـِ X^i برابر است با

$$P(Y^b|X^i) = \sum_j^b P(X^j|X^i),$$
$$= \sum_j^b U^j{}_i,$$
$$= \mathbf{e}^b U \mathbf{e}_i. \tag{103}$$

اگر این احتمال، برا یِ همه یِ i ها یِ با $X^i \in Y^a$ یک‌سان باشد،

$$\forall a,b\ :\ [X^i, X^j \in Y^a \quad \Rightarrow \quad P(Y^b|X^i) = P(Y^b|X^j)], \tag{104}$$

آن‌گاه می‌شود تعریف کرد

$$P(Y^b|Y^a) := P(Y^b|X^i), \quad X^i \in Y^a. \tag{105}$$

شرط ِ (104) یعنی مجموع ِ احتمال‌ها یِ رفتن ِ سیستم از زیرحالت ِ i در حالت ِ a، به زیرحالت‌ها یِ حالت ِ b، نباید به i بسته‌گی داشته باشد. با استفاده از این که $\mathbf{S}$ ویژه‌بردار ِ چپ ِ U با ویژه‌مقدار ِ یک است، به‌ساده‌گی می‌شود ثابت کرد اگر شرط ِ (104) برا یِ هر a و b یِ متمایز برقرار باشد، آن‌گاه این شرط برا یِ $a=b$ هم برقرار است.

شرط ِ (104) بر حسب ِ ماتریس ِ تحول به این شکل است.

$$\forall a,b\ :\ (X^i, X^j \in Y^a \quad \Rightarrow \quad U^b{}_i = U^b{}_j), \tag{106}$$

که هم‌ارز است با

$$\mathbf{e}^b U \ = \ \sum_a P(Y^b|Y^a)\mathbf{e}^a,$$
$$=: \tilde{U}^b{}_a \mathbf{e}^a. \tag{107}$$

بنابراین سیستم ِ کاسته هم یک فرآیند ِ تصادفی یِ مارکُف [a] است، اگر و تنها اگر ماتریسِ‌تحول ِ U بردارها یِ فضا یِ $\tilde{\mathbb{V}}^*$ را در خود ِ $\tilde{\mathbb{V}}^*$ نگه دارد. در این صورت عمل‌گرِتحول ِ $\tilde{U}$ را به این شکل تعریف می‌کنیم

$$\mathbf{e}^b\tilde{U}\mathbf{e}_a := \tilde{U}^b{}_a. \tag{108}$$

به‌ساده‌گی می‌شود نشان داد عنصرها یِ غیرِقطری یِ این عمل‌گر نامنفی اند، و $\mathbf{S}$ هم ویژه‌بردار ِ چپ ِ آن با ویژه‌مقدار ِ یک است. بنابراین $\tilde{U}$ واقعاً عمل‌گر ِ تحول است.

فرض کنید فرآیند ِ تصادفی زمان‌پیوسته باشد. در این صورت از رابطه یِ (42) نتیجه می‌شود برا یِ این که اثر ِ U بر $\tilde{\mathbb{V}}^*$ در $\tilde{\mathbb{V}}^*$ بماند لازم است اثر ِ H بر $\tilde{\mathbb{V}}^*$ در خود ِ $\tilde{\mathbb{V}}^*$ بماند. بر عکس، اگر اثر ِ H بر $\tilde{\mathbb{V}}^*$ در خود ِ $\tilde{\mathbb{V}}^*$ بماند، آن‌گاه اثر ِ هر توان ی از H بر $\tilde{\mathbb{V}}^*$ در خود ِ $\tilde{\mathbb{V}}^*$ می‌ماند و از این‌جا معلوم می‌شود که اثر ِ U بر $\tilde{\mathbb{V}}^*$ در خود ِ $\tilde{\mathbb{V}}^*$ می‌ماند. پس شرط ِ لازم و کافی برا یِ این که فرآیند ِ زمان‌پیوسته یِ کاسته یک فرآیند ِ مارکُف [a] باشد آن است که

$$\forall a, b\ :\ (X^i, X^j \in Y^a \quad \Rightarrow \quad H^b{}_i = H^b{}_j). \tag{109}$$

این‌جا هم می‌شود نشان داد کافی است شرط ِ بالا برا یِ a و b ها یِ متمایز برقرار باشد. در این صورت تعریف می‌کنیم

$$\tilde{H}^b{}_a := H^b{}_i, \quad X^i \in Y^a, \tag{110}$$

و

$$\mathbf{e}^b\tilde{H}\mathbf{e}_a := \tilde{H}^b{}_a. \tag{111}$$

به طور ِ خلاصه، می‌شود گفت برا یِ هر عمل‌گر (چه مشاهده‌پذیر و چه عمل‌گرها یِ مربوط به تحول)، در فضا یِ کاسته مانسته ای وجود دارد، به شرط ِ آن که این عمل‌گر اعضا یِ $\tilde{\mathbb{V}}^*$ را در همین فضا نگه دارد.

10 مرجع

[1] Kenneth Hoffman & Ray Kunze; "Linear Algebra", 2nd edition (Prentice Hall, 1971) chapter 7

11 اسم‌ها یِ خاص

[a] Markov

[b] Jordan

[c] Heisenberg

[d] Schrödinger