X1-007 (2002/01/30)

نوسان‌ها یِ عرضی یِ یک ستون ـِ مایع

محمد خرمی

mamwad@mailaps.org

نوسان‌ها یِ کوچک ـِ عرضی یِ یک ستون ـِ مایع ـِ تراکم‌ناپذیر بررسی می‌شود ، و بس‌آمدها یِ طبیعی یِ این نوسان‌ها به دست می‌آید.

0 مقدمه

شلنگ ـِ آب ی را در نظر بگیرید که سر ـِ آن اندک ی فشرده شده، چنان که مقطع ـِ آن دایره نیست. مقطع ـِ جریان ـِ آب ی که از این شلنگ خارج می‌شود ثابت نیست. این مقطع سر ـِ شلنگ به شکل ـِ مقطع ـِ شلنگ است، که مثلاً در راستا یِ x فشرده و در راستا یِ y کشیده است (راستاها یِ x و y با صفحه یِ مقطع ـِ سر ـِ شلنگ موازی اند). کم ی پس از سر ـِ شلنگ، مقطع تقریباً دایره ای می‌شود. بعد مقطع ـِ جریان دوباره از حالت ـِ دایره خارج می‌شود و این بار در راستا یِ x کشیده و در راستا یِ y فشرده می‌شود. سپس مقطع ـِ جریان دوباره دایره‌ای می‌شود و سرانجام به شکل ـِ مقطع ـِ سر ـِ شلنگ در می‌آید. این روند به همین شکل تکرار می‌شود. البته پس از مسافت ی جریان از حالت ـِ منظم خارج می‌شود و به شکل ـِ قطره‌قطره در می‌آید. دیده می‌شود فاصله یِ افقی یِ دو نقطه یِ مجاور در جریان، که مقطع ـِ جریان دایره‌ای می‌شود، تقریباً ثابت است. دوبرابر ـِ این فاصله برابر است با یک دوره یِ مکانی یِ (یا طولِ‌موج ـِ) تغییرات ـِ مقطع ـِ

جریان. این طولِ‌موج متناسب است با سرعت ِ (افقی یِ) جریان ِ آب. توضیح ِ این پدیده به این شکل است که مقطع ِ دایره‌ای حالت ِ تعادل ِ (پای‌دار ِ) مقطع ِ یک ستون ِ مایع (ِ تراکم‌ناپذیر) با ارتفاع ِ ثابت است. مقطع‌ها یِ غیرِدایره‌ای، مساحتِ‌جانبی یِ بیش‌تر ی دارند و به خاطر ِ کشش ِ سطحی، انرژی یِ سطحی پشان بیش‌تر می‌شود. مقطع ِ یک ستون ِ مایع، اگر از حالت ِ دایره‌ای خارج شود، حول ِ این حالت ِ تعادل نوسان خواهد کرد. آن چه در جریان ِ آب دیده می‌شود، این نوسان‌ها بر حسب ِ مکان است، که در آن مکان ِ افقی برابر است با سرعت ِ افقی یِ جریان ِ آب ضرب در زمان. بنابراین طولِ‌موج ِ مقطع ِ جریان برابر است با دوره یِ نوسان ضرب در سرعت ِ افقی یِ جریان. دوره یِ نوسان‌ها اساساً به سرعت ِ جریان بسته‌گی ندارد. همین است که طولِ‌موج با سرعت ِ افقی متناسب می‌شود. البته نوسان‌ها یِ ستون ِ مایع بیش از یک وجه ِ طبیعی دارند. اما معمولاً وجه ِ پایه دیده می‌شود، مگر این که مقطع ِ سر ِ شلنگ چنان باشد که وجه ِ پایه برانگیخته نشود. در این‌جا می‌خواهیم بس‌آمدها یِ وجه‌ها یِ طبیعی یِ سیستم در حد ِ نوسان‌ها یِ کوچک (خطی) را به دست آوریم. روش ِ کار این است که انرژی یِ پتانسیل و انرژی یِ جنبشی یِ سیستم برا یِ انحراف‌ها یِ کوچک ِ مقطع نسبت به دایره را به دست می‌آوریم. از این‌جا می‌شود بس‌آمدها یِ طبیعی را حساب کرد.

1 انرژی یِ پتانسیل

یک ستون ِ استوانه‌ای از یک مایع ِ تراکم‌ناپذیر را در نظر بگیرید. ارتفاع ِ ستون h، و مساحت ِ مقطع ِ ستون A است، که هر دو ثابت اند. فرض کنید جز این قیدها، فقط کششِ‌سطحی یِ مایع (و البته لختی یِ مایع) است که بر حرکت ِ این ستون مئثر است. در این صورت انرژی یِ پتانسیل ِ این ستون می‌شود

$$U = \tau\, h\, p, \tag{1}$$

که در آن U انرژی یِ پتانسیل، τ کشش ِ سطحی (انرژی بر واحد ِ سطح)، و p محیط ِ مقطع ِ عرضی یِ ستون است. معادله یِ این مقطع در مختصات ِ قطبی را می‌شود چنین نوشت.

$$r_p = r_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta), \tag{2}$$

که در آن (r, θ) مختصات ِ قطبی، و r_0، a_n ها، و b_n ها مقدارها یی ثابت اند. r_p مختصه یِ شعاعی یِ نقطه ای از مرز ِ مقطع است، که زاویه اَش θ است. a_n ها و b_n ها، در واقع دامنه‌ها یِ متناظر با انحراف از حالت ِ تعادل اند، و r_0 با استفاده از تراکم‌ناپذیری (ثابت‌بودن ِ مساحت ِ مقطع) از رو یِ این دامنه و فازها به دست می آید. برا یِ به‌دست‌آوردن ِ r_0، داریم

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta\ r_p^2(\theta), \\ &= \pi\left[r_0^2 + \frac{1}{2}\sum_n (a_n^2 + b_n^2)\right]. \end{aligned} \tag{3}$$

از این‌جا دیده می‌شود

$$r_0 = \sqrt{R^2 - \frac{1}{2}\sum_n (a_n^2 + b_n^2)}, \tag{4}$$

که در آن

$$R := \sqrt{\frac{A}{\pi}}. \tag{5}$$

برا یِ به‌دست‌آوردن ِ بس‌آمد ِ نوسان‌ها یِ کوچک، کافی است انرژی یِ پتانسیل و انرژی یِ جنبشی را تا مرتبه یِ 2 نسبت به جابه‌جایی از حالت ِ تعادل حساب کنیم. به این ترتیب، کافی است r_0 را هم تا مرتبه یِ 2 نسبت به a_n ها و b_n ها حساب کنیم. در این صورت (4) می‌شود

$$r_0 = R - \frac{1}{4R}\sum_n (a_n^2 + b_n^2). \tag{6}$$

حالا باید محیط ِ مقطع را حساب کنیم:

$$\begin{aligned} p &= \int \sqrt{r_p^2 \mathrm{d}\theta^2 + \mathrm{d}r_p^2}, \\ &= \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta \sqrt{r_p^2 + \left(\frac{\mathrm{d}r_p}{\mathrm{d}\theta}\right)^2}, \end{aligned}$$

$$= \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta \sqrt{r_0^2 + 2r_0\delta r_p + (\delta r_p)^2 + \left[\frac{\mathrm{d}(\delta r_p)}{\mathrm{d}\theta}\right]^2},$$

$$= \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta \left\{ r_0 + \delta r_p + \frac{1}{2r_0}\left[\frac{\mathrm{d}(\delta r_p)}{\mathrm{d}\theta}\right]^2 \right\}, \tag{7}$$

که در آن

$$r_p =: r_0 + \delta r_p, \tag{8}$$

و تساوی يِ آخر تا مرتبه يِ دو نسبت به جابه‌جایی‌ها درست است. با استفاده از (6)، نتیجه می‌شود

$$p = 2\pi \left[R + \sum_n \frac{n^2-1}{4R}(a_n^2 + b_n^2) \right], \tag{9}$$

و از آن‌جا،

$$U = U_0 + \frac{\pi\, h\, \tau}{2R} \sum_n (n^2-1)(a_n^2 + b_n^2), \tag{10}$$

که در آن U_0 انرژی‌يِ‌پتانسیل ِ حالت ِ تعادل است. این انرژی‌يِ‌پتانسیل جمله يِ درجه‌يِ‌یک نسبت به a_n ها و b_n ها ندارد، چنان که انتظار می‌رفت. اما جمله‌ها يِ مجذوری نسبت به a_1 و b_1 هم صفر اند. برا يِ توضیح ِ این نتیجه، توجه می‌کنیم که اگر مقطع ی به شکل ِ

$$\tilde{r}_p = \tilde{r}_0 + \sum_{n=2}^{\infty}(a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta), \tag{11}$$

به اندازه يِ a_1 در جهت ِ x و b_1 در جهت ِ y انتقال یابد، معادله يِ مقطع ِ جدید به شکل ِ (2) است. (البته جمله‌ها یی دیگر هم تولید می‌شود که نسبت به a_n ها و b_n ها از درجه يِ بیش از یک اند و میان‌گین ِشان رو يِ θ هم صفر است، بنابراین در انرژی يِ پتانسیل جمله يِ تا درجه يِ دو نسبت به جابه‌جایی‌ها درست نمی‌کنند.) پس a_1 و b_1 متناظر با انتقال ِ صلب ِ مقطع اند، که البته انرژی يِ پتانسیل را عوض نمی‌کند.

2 انرژی يِ جنبشی

انرژی يِ جنبشی (K) می‌شود

$$K = \frac{1}{2}\rho\, h \int \mathrm{d}^2x\, \mathbf{v}\cdot\mathbf{v}, \tag{12}$$

که در آن ρ چگالی ي مایع، و $\mathbf{v}$ بردار ـِ سرعت ـِ حرکت ـِ عرضی ي مایع است. انتگرال‌گیری رو ي مقطع ـِ ستون ـِ مایع است. برا ي به‌دست‌آوردن ـِ انرژی ي جنبشی تا مرتبه ي دو نسبت به جابه‌جایی‌ها، کافی است سرعت را تا مرتبه ي یک نسبت به جابه‌جایی‌ها حساب کنیم. شرط ـِ مرزی برا ي بردار ـِ سرعت این است که یک نقطه در مرز ـِ ستون، همیشه در مرز ـِ ستون باقی می‌ماند. پس اگر معادله ي مرز ـِ مقطع

$$f(r,\theta,t) = 0 \tag{13}$$

باشد، شرط ـِ مرزی می‌شود

$$\left(\mathbf{v}\cdot\nabla f + \frac{\partial f}{\partial t}\right)_{f=0} = 0, \tag{14}$$

که در آن ∇ مشتق‌گیری نسبت به متغیرها ي فضایی است. طرف ـِ چپ ـِ رابطه ي بالا، در واقع مشتق ـِ هم‌رفته ي f است ([1]، بخش ـِ 2.4). f را می‌شود به شکل ـِ

$$f(r,\theta,t) = r - r_p(\theta,t) \tag{15}$$

گرفت. بسته‌گی ي r_p به t از طریق ـِ a_n ها و b_n ها است.

به این ترتیب، شکل ـِ (14) پیچیده است. اما چون به‌دست‌آوردن ـِ $\mathbf{v}$ تا مرتبه ي یک نسبت به جابه‌جایی‌ها کافی است، (14) را هم می‌شود تا همین مرتبه نوشت. نتیجه می‌شود

$$v_r(R,\theta) - \frac{\partial(\delta r_p)}{\partial t} = 0, \tag{16}$$

که در آن v_r مئلفه ي شعاعی ي سرعت است. از تراکم‌ناپذیری ي مایع نتیجه می‌شود ([1]، بخش ـِ 2.2)،

$$\nabla\cdot\mathbf{v} = 0. \tag{17}$$

(16) و (17) برا ي به‌دست‌آوردن ـِ $\mathbf{v}$ بر حسب ـِ a_n ها و b_n ها کافی نیستند. در واقع داشتن ـِ دیورژانس ـِ یک میدان ـِ برداری در یک ناحیه، و مئلفه ي عمودبرمرز ـِ آن میدان، برا ي به‌دست‌آوردن ـِ آن میدان ـِ برداری در آن ناحیه کافی نیست. کرل ـِ آن میدان ـِ

برداری هم لازم است. اگر میدان ِ سرعت را ناچرخشی بگیریم ([1]، بخش ِ 1.10)، کرل ِ $\mathbf{v}$ صفر می‌شود:

$$\nabla \times \mathbf{v} = 0. \tag{18}$$

حالا رابطه‌ها یِ (16) تا (18) برا یِ به‌دست‌آوردن ِ میدان ِ سرعت کافی اند. از (18) نتیجه می‌شود میدان ِ سرعت را می‌شود گرادیان ِ یک میدان ِ اسکالر گرفت:

$$\mathbf{v} = \nabla \psi. \tag{19}$$

به این ترتیب، از (17) نتیجه می‌شود

$$\nabla^2 \psi = 0, \qquad r < R, \tag{20}$$

و (16) می‌شود

$$\frac{\partial \psi}{\partial r}(R, \theta) = \sum_n (\dot{a}_n \cos n\theta + \dot{b}_n \sin n\theta). \tag{21}$$

(20) و (21) یک مسئله یِ لَپلَس [a] با شرط ِ مرزی یِ نُی‌مان [b] است. جواب ِ (20) می‌شود

$$\psi(r, \theta) = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (c_n \cos n\theta + d_n \sin n\theta) r^n. \tag{22}$$

با جاگذاری یِ این در (21) نتیجه می‌شود

$$\psi = c_0 + \sum_n \frac{r^n}{n\, R^{n-1}} (\dot{a}_n \cos n\theta + \dot{b}_n \sin n\theta), \tag{23}$$

و از آن‌جا

$$\begin{aligned} v_r &= \sum_n \left(\frac{r}{R}\right)^{n-1} (\dot{a}_n \cos n\theta + \dot{b}_n \sin n\theta), \\ v_\theta &= \sum_n \left(\frac{r}{R}\right)^{n-1} (-\dot{a}_n \sin n\theta + \dot{b}_n \cos n\theta). \end{aligned} \tag{24}$$

ناحیه یِ انتگرال‌گیری در (12) مقطع ِ ستون است، اما چون انتگرال‌ده از مرتبه یِ دستِ‌کم 2 (نسبت به جابه‌جایی‌ها) است، برا یِ به‌دست‌آوردن ِ K تا مرتبه یِ 2 کافی است

ناحیه یِ انتگرال‌گیری را تا مرتبه یِ صفر بگیریم، یعنی دایره ای به مرکز ِ مبدئ و شعاع ِ R. از این‌جا نتیجه می‌شود

$$K = \frac{\pi\, R^2\, h\, \rho}{2} \sum_n \frac{\dot{a}_n^2 + \dot{b}_n^2}{n}. \tag{25}$$

3 بس‌آمدها یِ طبیعی

از (10) دیده می‌شود انرژی یِ پتانسیل نسبت به a_n ها و b_n ها مجذوری است و جمله‌ها یِ غیرِقطری ندارد. از (25) هم دیده می‌شود انرژی یِ جنبشی نسبت به $\dot{a}_n$ ها و $\dot{b}_n$ ها مجذوری است و جمله‌ها یِ غیرِقطری ندارد. به این ترتیب معلوم می‌شود a_n ها و b_n ها وجه‌ها یِ طبیعی یِ نوسان اند، و نسبت ِ ضریب ِ هر جمله یِ مجذوری در انرژی یِ پتانسیل به ضریب ِ جمله یِ مجذوری یِ متناظر در انرژی یِ جنبشی، مجذور ِ یک بس‌آمدِطبیعی است [2]. این نسبت برا یِ a_n و b_n یک‌سان است:

$$\omega_n^2 = n(n^2 - 1)\frac{\tau}{\rho R^3}. \tag{26}$$

دیده می‌شود بس‌آمد ِ وجه ِ $n = 1$ صفر است، که ناشی از این است که انرژی‌یِ‌پتانسیل ِ متناظر با این وجه صفر است. بقیه یِ مجذورِبس‌آمدها مثبت اند، که نشان می‌دهد حرکت‌ها نوسانی اند.

4 وجه‌ها یِ چرخشی

در بخش ِ 2 برا یِ محاسبه یِ میدان ِ سرعت آن را غیرِچرخشی فرض کردیم. فرض کنید چنین نباشد. در این صورت سرعت را می‌شود مجموع ِ دو میدان گرفت؛ یک ی میدان ِ متناظر با رابطه‌ها یِ (24)، و دیگری یک میدان ِ $\mathbf{u}$ که این رابطه‌ها را بر می‌آورد.

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \qquad r < R, \tag{27}$$

و

$$u_r(R,\theta) = 0. \tag{28}$$

میدان ِ سرعت می‌شود

$$\mathbf{v} = \mathbf{u} + \nabla\psi, \tag{29}$$

که در آن ψ رابطه‌ها یِ (20) و (21) را بر می‌آورد. از این‌جا انرژی یِ جنبشی می‌شود

$$K = \frac{1}{2}\rho\, h \int \mathrm{d}^2x[\mathbf{u}\cdot\mathbf{u} + 2\mathbf{u}\cdot\nabla\psi + (\nabla\psi)\cdot(\nabla\psi)]. \tag{30}$$

انتگرال ِ جمله یِ دوم ِ انتگرال‌ده صفر است:

$$\begin{aligned}\int \mathrm{d}^2x\ \mathbf{u}\cdot\nabla\psi &= \oint \mathrm{d}l\ u_r\psi - \int \mathrm{d}^2x\ \psi\nabla\cdot\mathbf{u},\\ &= 0.\end{aligned} \tag{31}$$

در این‌جا ناحیه یِ انتگرال‌گیری یِ جمله یِ اول ِ طرف ِ راست ِ تساوی یِ اول رو یِ دایره ای به شعاع ِ R است. از تساوی یِ بالا نتیجه می‌شود

$$K = K_{\mathrm{nr}} + \frac{1}{2}\rho\, h \int \mathrm{d}^2x\ \mathbf{u}\cdot\mathbf{u}, \tag{32}$$

که در آن K_{nr} همان انرژی‌یِ‌جنبشی یی است که در بخش ِ قبل حساب شد، رابطه یِ (25). بنابراین انرژی یِ جنبشی مجموع ِ دو جمله است، که در یک ی فقط سرعت ِ غیرِچرخشی، و در دیگری فقط $\mathbf{u}$ ظاهر شده است. اما متغیرهایِ‌مکان ِ متناظر با میدانِ‌سرعت ِ $\mathbf{u}$ در انرژی یِ پتانسیل ظاهر نمی‌شوند. پس بس‌آمدها یِ متناظر با این متغیرها صفر است. مثلاً اگر ستون به طور ِ صلب حول ِ محورش بچرخد،

$$\begin{aligned}u_r &= 0,\\ u_\theta &= \Omega\, r,\end{aligned} \tag{33}$$

که در آن Ω ثابت است، انرژیِ جنبشی غیرِصفر است؛ اما این چرخش شکل ِ مقطع ِ ستون را دایره نگه می‌دارد، و انرژی یِ پتانسیل را تغییر نمی‌دهد. بنابراین در برابر ِ چرخشِ‌صلب ِ ستون نیرو یِ بازدارنده ای نیست.

5 مرجع‌ها

[1] T. E. Faber; "Fluid dynamics for physicists", (Cambridge University Press, 1995)

[2] Herbert Goldstein; "Classical mechanics", 2nd edition (Addison-Wesley, 1980) chapter 6

6 اسم‌ها یِ خاص

[a] Laplace

[b] Neumann