X1-008 (2002/03/21)

زمین چه قدر پخ است؟

محمد خرمی

mamwad@mailaps.org

مقدار ِ پخی یِ زمین، بر این اساس به دست می‌آید که این پخی ناشی از چرخش ِ زمین در زمان ی است که زمین مذاب بوده است.

0 مقدمه

یک توده یِ مذاب، تحت ِ گرانش ِ خود به شکل ِ کره در می‌آید، چون با این شکل انرژی یِ پتانسیل ِ گرانشی یِ آن کمینه می‌شود. چنین‌توده ای، اگر بچرخد پخ می‌شود، چون به ذره‌ها یِ آن نیرو یِ مرکزگریز وارد می‌شود و این نیرو در جاها یِ دورتر از محور ِ چرخش بزرگ‌تر است. برا یِ محاسبه یِ مقدار ِ این پخی، دو راه ِ هم‌ارز هست. در هر دو راه، ساده‌تر این است که محاسبه در چارچوب ِ چرخان ی انجام شود که توده نسبت به آن ساکن است. یک راه این است که انرژی یِ پتانسیل ِ گرانشی یِ این توده، به اضافه یِ انرژی یِ پتانسیل مرکزگریز ِ آن را حساب کنیم. نتیجه تابع ِ شکل ِ توده است. شکل ِ تعادلی یِ توده آن شکل ی است که این مجموع را کمینه می‌کند. راه ِ دیگر این است که تابع ِ پتانسیل ِ کل را در سطح ِ توده حساب کنیم. در حالت ِ تعادل، مقدار ِ این تابع باید رو یِ این سطح ثابت باشد. انجام ِ دقیق ِ هر دومحاسبه دشوار است. اما اگر سرعت ِ زاویه‌ای یِ چرخش زیاد نباشد، می‌شود این محاسبه‌ها را تا اولین مرتبه یِ غیرِصفر نسبت

به این سرعت انجام داد، و تغییرِشکل ِ تقریبی یِ توده نسبت به کره را به دست آورد.

فرض کنید توده از یک مایع ِ تراکم‌ناپذیر به جرم ِ M ساخته شده، شعاع َ ش در حالت ِ کروی R است، و با سرعت ِ زاویه‌ای یِ ω می‌چرخد. با یک تحلیل ِ ابعادی می‌شود مرتبه یِ تغییر ِ فاصله یِ نقطه‌ها یِ مختلف ِ سطح ِ توده از مرکز (نسبت به R) را برآورد کرد:

$$\delta R \sim \frac{R^4\,\omega^2}{G\,M}, \tag{1}$$

که در آن δR تغییرِفاصله، و G ثابت ِ نیرو یِ گرانش است. کوچک‌بودن ِ ω یعنی $(\delta R)/R$ کوچک باشد، یا

$$\frac{R^3\,\omega^2}{G\,M} \ll 1. \tag{2}$$

در بخش ِ 1، δR را با کمینه‌کردن ِ انرژی یِ پتانسیل ِ کل به دست می‌آوریم. در بخش ِ 2، همین کمیت را با این روش به دست می‌آوریم که تابع ِ پتانسیل ِ کل رو یِ سطح ِ توده کمینه شود. در بخش ِ 3 هم مقدارها یِ عددی را برا یِ زمین حساب می‌کنیم.

1 انرژی یِ پتانسیل ِ کل ِ توده یِ چرخان

انرژی یِ پتانسیل ِ گرانشی یِ یک توده

$$U_G = -\frac{G}{2}\int \mathrm{d}^3r\;\mathrm{d}^3r'\;\frac{\rho(\mathbf{r})\,\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \tag{3}$$

است، که در آن ρ چگالی یِ جرمی یِ توده است. اگر ρ تغییر کند، انرژی یِ پتانسیل ِ گرانشی هم تغییر می‌کند، و داریم

$$\delta U_G = -G\int \mathrm{d}^3r\;\mathrm{d}^3r'\;\frac{\delta\rho(\mathbf{r})\,\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} - \frac{G}{2}\int \mathrm{d}^3r\;\mathrm{d}^3r'\;\frac{\delta\rho(\mathbf{r})\,\delta\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}. \tag{4}$$

در جمله یِ اول ِ طرف ِ راست، انتگرال‌گیری رو یِ $\mathbf{r}'$ پتانسیل ِ گرانشی یِ اولیه را می‌دهد. بنابراین،

$$\delta U_G = \int \mathrm{d}^3r\;\delta\rho(\mathbf{r})\,\phi_G(\mathbf{r}) - \frac{G}{2}\int \mathrm{d}^3r\;\mathrm{d}^3r'\;\frac{\delta\rho(\mathbf{r})\,\delta\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|},$$

$$=: \delta U_1 + \delta U_2, \tag{5}$$

که در آن ϕ_G پتانسیل ِ گرانشی یِ ناشی از ρ است. در مسئله یِ ما،

$$\rho(\mathbf{r}) = \begin{cases} \rho_0, & r < R \\ 0, & r > R \end{cases}, \tag{6}$$

که در آن

$$\rho_0 := \frac{M}{4\pi\, R^3/3}, \tag{7}$$

و

$$\rho(\mathbf{r}) + \delta\rho(\mathbf{r}) = \begin{cases} \rho_0, & r < R + \delta R(\hat{\mathbf{r}}) \\ 0, & r > R + \delta R(\hat{\mathbf{r}}) \end{cases}, \tag{8}$$

که در آن

$$r(\hat{\mathbf{r}}) = R + \delta R(\hat{\mathbf{r}}) \tag{9}$$

معادله یِ سطح ِ توده، و $\hat{\mathbf{r}}$ بردار ِ یکه یِ شعاعی است.

در نقطه‌ها یِ بیرون ِ کره یِ به شعاع ِ R، پتانسیل ِ ϕ_G می‌شود

$$\phi_G(\mathbf{r}) = -\frac{G\,M}{r}. \tag{10}$$

چون مشتق ِ این پتانسیل در $r = R$ پیوسته است، برا یِ $r < R$ هم این رابطه تا مرتبه یِ یک نسبت به $R - r$ درست است. ناحیه یِ انتگرال‌گیری در جمله یِ اول ِ طرف ِ راست ِ (5) از مرتبه یِ δR است. پس اگر برا یِ ϕ_G از (10) استفاده کنیم، جمله یِ اول ِ طرف ِ راست ِ (5) تا مرتبه یِ دو نسبت به δR درست است. به این ترتیب، این جمله می‌شود

$$\begin{aligned} \delta U_1 &= -G\,M \int \mathrm{d}^3 r\; \frac{\delta\rho(\mathbf{r})}{r}, \\ &= -G\,M \int \mathrm{d}\Omega \int_R^{R+\delta R} \mathrm{d}r\; r\,\rho_0, \\ &= -G\,M\,\rho_0 \int \mathrm{d}\Omega\; \frac{(R+\delta R)^2 - R^2}{2}, \end{aligned}$$

$$= -\frac{G\,M\,\rho_0}{2}\int \mathrm{d}\Omega\;[2R\,\delta R + (\delta R)^2]. \tag{11}$$

به نظر می‌رسد در طرف ِ راست ِ این رابطه دو جمله با مرتبه‌ها یِ متفاوت هست، جمله یِ اول از مرتبه یِ یک و جمله یِ دوم از مرتبه یِ دو. اما چنین نیست. δR باید این قید را بر آورد که حجم ِ توده یِ ماده عوض نشود، چون توده تراکم‌ناپذیر است. پس

$$\int \mathrm{d}\Omega \int_0^{R+\delta R} \mathrm{d}r\; r^2 = \int \mathrm{d}\Omega \int_0^{R} \mathrm{d}r\; r^2, \tag{12}$$

یا

$$\begin{aligned} 0 &= \int \mathrm{d}\Omega \int_R^{R+\delta R} \mathrm{d}r\; r^2,\\ &= \int \mathrm{d}\Omega\;[R^2\,\delta R + R\,(\delta R)^2], \end{aligned} \tag{13}$$

که در آن تساوی یِ دوم تا مرتبه یِ دو نسبت به δR درست است. از این‌جا نتیجه می‌شود

$$\int \mathrm{d}\Omega\; R\,\delta R = -\int \mathrm{d}\Omega\;(\delta R)^2, \tag{14}$$

و با جاگذاری یِ این در (11)،

$$\delta U_1 = \frac{G\,M\,\rho_0}{2}\int \mathrm{d}\Omega\;(\delta R)^2. \tag{15}$$

برا یِ محاسبه یِ δU_2، توجه می‌کنیم که ناحیه یِ انتگرال‌گیری از مرتبه یِ $(\delta R)^2$ است. بنابراین اگر در انتگرال‌ده به جا یِ r و r' بگذاریم R، نتیجه تا مرتبه یِ دو نسبت به δR درست است. داریم

$$\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} = \sum_{l,m}\frac{4\pi}{2l+1}\,\frac{r_<^l}{r_>^{l+1}}\,\mathrm{Y}_{lm}(\hat{\mathbf{r}})\,\mathrm{Y}^*_{lm}(\hat{\mathbf{r}}'), \tag{16}$$

[1]، که در آن Y_{lm} ها هم‌آهنگ‌ها یِ کروی اند و $r_<$ و $r_>$، به ترتیب کمینه و بیشینه یِ $\{r, r'\}$ اند. نتیجه می‌شود δU_2 تا مرتبه یِ دو نسبت به δR چنین است.

$$\begin{aligned} \delta U_2 &= -\frac{G}{2R}\int \mathrm{d}^3r\;\mathrm{d}^3r'\sum_{l,m}\frac{4\pi}{2l+1}\,\delta\rho(\mathbf{r})\,\delta\rho(\mathbf{r}')\,\mathrm{Y}_{lm}(\hat{\mathbf{r}})\,\mathrm{Y}^*_{lm}(\hat{\mathbf{r}}'),\\ &= -\frac{G\,\rho_0^2}{2R}\sum_{l,m}\frac{4\pi\,R^4}{2l+1}\left|\int \mathrm{d}\Omega\;\mathrm{Y}^*_{lm}(\hat{\mathbf{r}})\int_R^{R+\delta R}\mathrm{d}r\right|^2, \end{aligned}$$

$$= -\frac{3G\,M\,\rho_0}{2}\sum_{l,m}\frac{1}{2l+1}\left|\int \mathrm{d}\Omega\;\delta R(\hat{\mathbf{r}})\,\mathrm{Y}^*_{lm}(\hat{\mathbf{r}})\right|^2. \tag{17}$$

تابع ِ δR را می‌شود بر حسب ِ هم‌آهنگ‌ها یِ کروی بسط داد:

$$\delta R = \sum_{l,m} a_{lm}\,\mathrm{Y}_{lm}(\hat{\mathbf{r}}). \tag{18}$$

در این‌جا $a_{0\,0}$ تا مرتبه یِ یک نسبت به δR صفر است؛ چون از (14) نتیجه می‌شود تا مرتبه یِ یک نسبت به δR،

$$\int \mathrm{d}\Omega\;\delta R(\hat{\mathbf{r}}) = 0. \tag{19}$$

طرف ِ چپ ِ رابطه یِ بالا برابر ِ $\sqrt{4\pi}\,a_{0\,0}$ است [1]. پس تا مرتبه یِ یک نسبت به δR،

$$a_{0\,0} = 0. \tag{20}$$

حالا می‌شود δU_1 و δU_2 را بر حسب ِ a_{lm} ها نوشت. با استفاده از

$$a_{lm} = \int \mathrm{d}\Omega\;\delta R(\hat{\mathbf{r}})\,\mathrm{Y}^*_{lm}(\hat{\mathbf{r}}), \tag{21}$$

[1]، نتیجه می‌شود

$$\delta U_1 = \frac{G\,M\,\rho_0}{2}\sum_{l=1}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l}|a_{lm}|^2, \tag{22}$$

و

$$\delta U_2 = -\frac{G\,M\,\rho_0}{2}\sum_{l=1}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l}\frac{3}{2l+1}|a_{lm}|^2, \tag{23}$$

که نتیجه می‌دهد

$$\delta U_G = \frac{G\,M\,\rho_0}{2}\sum_{l=1}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l}\left(1-\frac{3}{2l+1}\right)|a_{lm}|^2. \tag{24}$$

دیده می‌شود همه یِ این جمله‌ها مثبت اند، جز جمله‌ها یِ $l = 1$، که صفر اند. پس اگر انرژی یِ دیگر یِ در کار نمی‌بود، کمینه یِ پتانسیل متناظر با این بود که همه یِ a_{lm} ها صفر باشند، جز a_{1m} ها. اما a_{1m} ها متناظر با انتقال ِ صلب ِ توده اند (تا مرتبه یِ اول)

که البته انرژی ِ پتانسیل ِ گرانشی را عوض نمی‌کنند. اگر این شرط را می‌گذاشتیم که مرکزِجرم ِ توده در مبدأ باشد، a_{1m} ها صفر می‌شدند.

حالا به انرژی ِ پتانسیل ِ مرکزگریز بپردازیم. در چارچوب ِ چرخان با سرعت ِ زاویه‌ای ِ ω، باید یک نیرو ِ مرکزگریز اضافه کنیم:

$$\mathbf{F}_{\rm cf} = m\,\omega^2\,\mathbf{s}, \tag{25}$$

[2]، که در آن $\mathbf{s}$ بردار ِ شعاع ِ استوانه‌ای است، که محور ِ آن محور ِ چرخش است. m هم جرم ِ ذره ای که این نیرو به آن وارد می‌شود. چون در چارچوب ی که هم‌راه ِ توده می‌چرخد خود ِ توده ساکن است، نیرو ِ لختی ِ دیگر ی لازم نیست [2]. از این‌جا برا ِ ذره انرژی ِ پتانسیل ِ مرکزگریز ِ

$$U_{\rm cf} = -\frac{m\,\omega^2\,s^2}{2} \tag{26}$$

نتیجه می‌شود، که در آن s فاصله تا محور ِ چرخش است:

$$s = r\,\sin\theta. \tag{27}$$

در این‌جا زاویه ِ θ نسبت به محور ِ چرخش است. انرژی ِ پتانسیل ِ مرکزگریز ِ توده ِ چرخان می‌شود

$$\begin{aligned} U_{\rm cf} + \delta U_{\rm cf} &= -\frac{\rho_0\,\omega^2}{2}\int \mathrm{d}\Omega\ \sin^2\theta \int_0^{R+\delta R} \mathrm{d}r\ r^4, \\ &= -\frac{\rho_0\,\omega^2}{2}\int \mathrm{d}\Omega\ \sin^2\theta \left[\frac{R^5}{5} + R^4\,\delta R(\hat{\mathbf{r}})\right]. \end{aligned} \tag{28}$$

در تساوی ِ آخر فقط اولین جمله ِ شامل ِ δR را نگه داشته ایم. با استفاده از

$$\mathrm{P}_2(\cos\theta) = \frac{3\cos^2\theta - 1}{2}, \tag{29}$$

و با استفاده از (19) (تا مرتبه ِ یک نسبت به δR) نتیجه می‌شود

$$\begin{aligned} \delta U_{\rm cf} &= \frac{\rho_0\,\omega^2\,R^4}{3}\int \mathrm{d}\Omega\ \mathrm{P}_2(\cos\theta)\,\delta R(\hat{\mathbf{r}}), \\ &= \frac{\rho_0\,\omega^2\,R^4}{3}\sqrt{\frac{4\pi}{5}}\,a_{2\,0}. \end{aligned} \tag{30}$$

در این‌جا از این استفاده شده که

$$\mathrm{P}_2(\cos\theta) = \sqrt{\frac{4\pi}{5}}\, \mathrm{Y}_{2\,0}(\hat{\mathbf{r}}), \tag{31}$$

[1]. به این ترتیب، تغییرِ انرژیِ پتانسیلِ کل می‌شود

$$\delta U := \delta U_G + \delta U_{\rm cf},$$

$$= \frac{G\,M\,\rho_0}{2} \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{m=-l}^{l} \left(1 - \frac{3}{2l+1}\right) |a_{lm}|^2 + \frac{\rho_0\,\omega^2\,R^4}{3} \sqrt{\frac{4\pi}{5}}\, a_{2\,0}. \tag{32}$$

حالتِ تعادل این انرژیِ‌پتانسیل را کمینه می‌کند (نسبت به a_{lm} ها). دیده می‌شود در این حالت a_{lm} ها همه صفر اند جز a_{1m} ها و $a_{2\,0}$. a_{1m} ها متناظر با انتقال اند و با گذاشتنِ مرکزِجرم در مبدئ صفر می‌شوند. پس فقط $a_{2\,0}$ غیرِصفر می‌شود. چون δR حقیقی است، $a_{2\,0}$ هم حقیقی است. در نتیجه $a_{2\,0}$ این رابطه را بر می‌آورد.

$$G\,M\,\rho_0 \left(1 - \frac{3}{5}\right) a_{2\,0} + \frac{\rho_0\,\omega^2\,R^4}{3} \sqrt{\frac{4\pi}{5}} = 0. \tag{33}$$

(این رابطه با مشتق‌گیری از δU نسبت به $a_{2\,0}$ به دست می‌آید.) به این ترتیب،

$$a_{2\,0} = -\frac{5}{6} \sqrt{\frac{4\pi}{5}}\, \frac{\omega^2\,R^4}{G\,M}, \tag{34}$$

و از آن‌جا

$$\delta R(\hat{\mathbf{r}}) = -\frac{5}{6}\, \frac{\omega^2\,R^4}{G\,M}\, \mathrm{P}_2(\cos\theta),$$

$$= -\frac{5}{6}\, \frac{\omega^2\,R^2}{g}\, \mathrm{P}_2(\cos\theta), \tag{35}$$

که در آن g شتابِ گرانش در سطحِ توده است.

2 پتانسیلِ کل در سطحِ توده‌ی چرخان

پتانسیلِ گرانشی در بیرونِ کره ای به مرکزِ مبدئ که توده را در بگیرد، از بسطِ چندقطبی‌ها به دست می‌آید. از (16) با $r_> = r$ و $r_< = r'$ نتیجه می‌شود

$$\phi_G(\mathbf{r}) + \delta\phi_G(\mathbf{r}) = -4\pi\, G \sum_{l,m} \frac{q_{lm}}{2l+1}\, \frac{\mathrm{Y}_{lm}(\hat{\mathbf{r}})}{r^{l+1}}, \tag{36}$$

که در آن

$$q_{lm} := \int \mathrm{d}^3 r\ \mathrm{Y}^*_{lm}(\hat{\mathbf{r}})\, r^l\, \rho(\mathbf{r}). \tag{37}$$

q_{lm} ها چندقطبی‌ها یِ جرمی یِ توده اند. با توجه به $Y_{0\,0} = (4\pi)^{-1/2}$ نتیجه می‌شود

$$q_{0\,0} = \frac{M}{\sqrt{4\pi}}, \tag{38}$$

که مستقل از شکل ِ توده است. در مورد ِ بقیه یِ چندقطبی‌ها،

$$\begin{aligned} q_{lm} &= \rho_0 \int \mathrm{d}\Omega\ \mathrm{Y}^*_{lm}(\hat{\mathbf{r}}) \int_0^{R+\delta R} \mathrm{d}r\ r^{l+2}, \\ &= \rho_0 \int \mathrm{d}\Omega\ \mathrm{Y}^*_{lm}(\hat{\mathbf{r}}) \left(\frac{R^{l+3}}{l+3} + R^{l+2}\,\delta R\right), \\ &= \rho_0\, R^{l+2}\, a_{lm}, \qquad l \neq 0. \end{aligned} \tag{39}$$

در تساوی یِ سوم فقط اولین جمله یِ شامل ِ δR در نظر گرفته شده، و در تساوی یِ آخر از این استفاده شده که انتگرال ِ Y_{lm} ها صفر است، مگر برا یِ $l = 0$. به این ترتیب، نتیجه می‌شود بیرون ِ کره یِ دربرگیرنده یِ توده،

$$\phi_G(\mathbf{r}) + \delta\phi_G(\mathbf{r}) = -\frac{G\,M}{r} - \frac{G\,M}{R^2} \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{m=-l}^{l} \frac{3a_{lm}\,\mathrm{Y}_{lm}(\hat{\mathbf{r}})}{2l+1} \left(\frac{R}{r}\right)^{l+1}. \tag{40}$$

رو یِ سطح ِ توده، $r = R + \delta R$. شعاع ِ کوچک‌ترین کره یِ دربرگیرنده یِ توده $R + \max(\delta R)$ است. بنابراین تا مرتبه یِ یک نسبت به δR، مقدار ِ $\delta\phi_G$ رو یِ سطح ِ توده برابر است با جمله یِ دوم ِ طرف ِ راست ِ (40) به ازا یِ $r = R$. خود ِ ϕ_G رو یِ سطح ِ توده هم تا مرتبه یِ یک نسبت به δR می‌شود

$$\phi_G = -\frac{G\,M}{R + \delta R},$$

$$= -\frac{G\,M}{R} + \frac{G\,M}{R^2}\,\delta R,$$

$$= -\frac{G\,M}{R} + \frac{G\,M}{R^2}\sum_{l=1}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l} a_{lm}\,\mathrm{Y}_{lm}(\hat{\mathbf{r}}). \tag{41}$$

در این‌جا از این استفاده شده که $a_{0\,0}$ تا مرتبه یِ اول نسبت به δR صفر است. به این ترتیب، پتانسیل ـِ گرانشی رو یِ سطح ـِ توده می‌شود

$$\phi_G + \delta\phi_G = -\frac{G\,M}{R} + \frac{G\,M}{R^2}\sum_{l=1}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l}\left(1 - \frac{3}{2l+1}\right) a_{lm}\,\mathrm{Y}_{lm}(\hat{\mathbf{r}}). \tag{42}$$

توجه کنید که $\delta\phi_G$ رو یِ سطح ـِ توده دو بخش دارد. یک بخش ناشی از آن است که پتانسیل ـِ گرانشی رو یِ سطح ـِ کره حساب نمی‌شود، متناظر با ضریب ـِ 1 در پرانتز. بخش ـِ دیگر ناشی از این است که به خاطر ـِ تغییرِشکل ـِ توده، مقدار ـِ پتانسیل در $r = R$ عوض شده است، متناظر با ضریب ـِ $-3/(2l+1)$ در پرانتز. اگر این بخش ـِ دوم را در نظر نمی‌گرفتیم، ضریب ـِ جمله‌ها یِ $l = 2$ به جا یِ $2/5$ می‌شد 1.

پتانسیل ـِ مرکزگریز، همان انرژیِ‌پتانسیل ـِ مرکزگریز در (26) است، تقسیم بر m:

$$\phi_{\mathrm{cf}}(\mathbf{r}) = -\frac{1}{2}\omega^2\,r^2\,\sin^2\theta. \tag{43}$$

رو یِ سطح ـِ توده، $r = R + \delta R$. به این ترتیب، این کمیت رو یِ سطح ـِ توده و در پایین‌ترین مرتبه می‌شود

$$\phi_{\mathrm{cf}} = -\frac{1}{2}\omega^2\,R^2\,\sin^2\theta,$$

$$= -\frac{1}{3}\omega^2\,R^2 + \frac{1}{3}\omega^2\,R^2\,\mathrm{P}_2(\cos\theta). \tag{44}$$

پتانسیل ـِ کل رو یِ سطح ـِ توده، برابر است با جمع ـِ این عبارت با پتانسیل ـِ گرانشی رو یِ سطح ـِ توده، (42):

$$\phi + \delta\phi = -\frac{G\,M}{R} - \frac{1}{3}\omega^2\,R^2 + \frac{1}{3}\omega^2\,R^2\,\mathrm{P}_2(\cos\theta)$$

$$+\frac{G\,M}{R^2}\sum_{l=1}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l}\left(1 - \frac{3}{2l+1}\right) a_{lm}\,\mathrm{Y}_{lm}(\hat{\mathbf{r}}), \tag{45}$$

که باید ثابت (مستقل از $\hat{\mathbf{r}}$) باشد. دوجمله یِ اول ـِ طرف ـِ راست ثابت اند. P_2 هم متناسب با $\mathrm{Y}_{2\,0}$ است. پس چون Y_{lm} ها خطی‌مستقل اند، همه یِ a_{lm} ها صفر اند جز $a_{2\,0}$، و

$$\left(1-\frac{3}{5}\right)\frac{G\,M}{R^2}a_{2\,0}\,\mathrm{Y}_{2\,0}(\hat{\mathbf{r}})+\frac{1}{3}\omega^2\,R^2\,\mathrm{P}_2(\cos\theta)=0. \tag{46}$$

البته ضریب ـِ a_{1m} ها صفر است و آن‌ها را نمی‌شود از این‌جا حساب کرد. اما مرکزِجرم ـِ توده باید رو یِ محور ـِ چرخش باشد، در غیر ـِ این صورت یک نیرو یِ خارجی برا یِ چرخاندن ـِ مرکزِجرم لازم است. پس مبدئ را می‌شود خود ـِ مرکزِجرم گرفت، و در این صورت a_{1m} ها صفر می‌شوند. با محاسبه یِ $a_{2\,0}$ از (46)، به همان عبارت ـِ (35) می‌رسیم.

3 مقدار ـِ پخی یِ زمین

با توجه به (35) و با استفاده از (29)، δR در قطب‌ها $(\theta=0)$ می‌شود

$$\delta R_{\mathrm{p}}=-\frac{5}{6}\,\frac{\omega^2\,R^2}{g}, \tag{47}$$

و در استوا $(\theta=\pi/2)$ می‌شود

$$\delta R_{\mathrm{e}}=\frac{5}{12}\,\frac{\omega^2\,R^2}{g}. \tag{48}$$

از این‌جا تفاضل ـِ شعاع در قطب‌ها و استوا می‌شود

$$\Delta R=\frac{5}{4}\,\frac{\omega^2\,R^2}{g}. \tag{49}$$

برا یِ زمین،

$$g=9.8\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2},$$

$$R=6.4\times10^6\ \mathrm{m}, \tag{50}$$

[3]. ضمناً

$$\omega = \frac{2\pi}{T},$$

$$= 7.3 \times 10^{-5}\ \mathrm{s}, \tag{51}$$

که در آن T دوره یِ چرخش ِ زمین (24 ساعت) است. از این‌جا نتیجه می‌شود

$$\Delta R = 28\ \mathrm{km}. \tag{52}$$

مقدار ِ سنجیده‌شده یِ این کمیت $21\ \mathrm{km}$ است [3].

البته توجه داریم که زمین هم‌گن نیست: چگالی به طرف ِ مرکز ِ زمین زیاد می‌شود. بنابراین چگالی یی که برا یِ محاسبه یِ چندقطبی‌ها یِ گرانشی در (39) ظاهر می‌شود، کم‌تر از چگالی یِ متوسط (ρ_0) است. در واقع در حالت ِ حدی یی که زمین مثل ِ یک جرم ِ نقطه‌ای باشد، همه یِ چندقطبی‌ها صفر می‌شوند جز تک‌قطبی. پس برا یِ زمین ِ واقعی، نسبت ِ q_{lm} به a_{lm} کم‌تر از آن ی است که (39) می‌گوید. این یعنی در (41)، به جا یِ $3/(2l+1)$ باید گذاشت $3\alpha_l/(2l+1)$، که در آن α_l بین ِ صفر و یک است. بنابراین ضریب ِ a_{lm} در (45) بزرگ‌تر می‌شود، و خود ِ $a_{2\,0}$ ِ حالت ِ تعادل کم‌تر می‌شود. یعنی پخی یِ زمین واقعاً هم باید کم‌تر از مقدار ِ محاسبه‌شده برا یِ زمین ِ هم‌گن ($28\ \mathrm{km}$) باشد.

با یک مدل ِ ساده برا یِ چگالی یِ زمین، می‌شود مقدار ِ محاسبه‌شده برا یِ پخی یِ زمین را به‌تر کرد. فرض کنید چگالی یِ زمین به این شکل است.

$$\rho(\mathbf{r}) = \rho_0\, f\left(\frac{r}{R+\delta R}\right), \tag{53}$$

که در آن f تابع یِ است که میان‌گین ِ حجمی یِ آن رو یِ زمین یک است. معنی یِ عبارت ِ بالا آن است که چگالی یِ یک نقطه درون ِ زمین، فقط به فاصله یِ آن نقطه تا مرکز ِ زمین تقسیم بر طول ِ شعاع ی از زمین که از آن نقطه می‌گذرد بسته‌گی دارد، یعنی سطح‌ها یِ هم‌چگالی متشابه اند. در این صورت (39) چنین اصلاح می‌شود.

$$q_{lm} = \rho_0 \int \mathrm{d}\Omega\ \mathrm{Y}^*_{lm}(\hat{\mathbf{r}}) \int_0^{R+\delta R} \mathrm{d}r\ r^{l+2}\, f\left(\frac{r}{R+\delta R}\right),$$

$$= \alpha_l\, \rho_0 \int \mathrm{d}\Omega\; \mathrm{Y}^*_{lm}(\hat{\mathbf{r}}) \left(\frac{R^{l+3}}{l+3} + R^{l+2}\, \delta R \right),$$

$$= \alpha_l\, \rho_0\, R^{l+2}\, a_{lm}, \qquad l \neq 0, \tag{54}$$

که در آن

$$\alpha_l := \frac{\displaystyle\int_0^1 \mathrm{d}x\; x^{l+2}\, f(x)}{\displaystyle\int_0^1 \mathrm{d}x\; x^{l+2}}. \tag{55}$$

از این که میان‌گین ِ f رو یِ کل ِ توده یک است، نتیجه می‌شود α_0 یک است. ضمناً دیده می‌شود اگر f نزولی باشد (که در مورد ِ زمین چنین است) بقیه یِ α_l ها کوچک‌تر از یک اند. در این‌جا هدف محاسبه یِ α_2 است. این کمیت را می‌شود از رو یِ لختی یِ چرخشی یِ زمین حول ِ محور ِ چرخش َش به دست آورد:

$$I = \rho_0 \int \mathrm{d}\Omega\; \sin^2\theta \int_0^{R+\delta R} \mathrm{d}r\; r^4\, f\left(\frac{r}{R+\delta R} \right),$$

$$= \alpha_2\, \rho_0 \int \mathrm{d}\Omega\; \sin^2\theta \int_0^{R+\delta R} \mathrm{d}r\; r^4,$$

$$= \alpha_2\, I_0, \tag{56}$$

که در آن I لختی یِ چرخشی یِ توده حول ِ محور ِ چرخش ِ آن است، و I_0 لختی یِ چرخشی یِ توده ای با همان شکل و اندازه و جرم اما با چگالی یِ یک‌نواخت، حول ِ همان محور. برا یِ زمین،

$$I = 8.1 \times 10^{37}\ \mathrm{kg\, m^2}, \tag{57}$$

[3]. اما لختی یِ چرخشی یِ یک کره یِ یک‌نواخت حول ِ یک قطر َش

$$I_0 = \frac{2}{5}\, M\, R^2 \tag{58}$$

است. برا یِ زمین، با توجه به

$$M = 6.0 \times 10^{24}\ \mathrm{kg}, \tag{59}$$

[3]، نتیجه می‌شود

$$I_0 = 9.8 \times 10^{37}\ \mathrm{kg\,m^2}, \qquad (60)$$

و از این‌جا

$$\alpha_2 = \frac{I}{I_0}, \\ = 0.83. \qquad (61)$$

پس شکل ِ اصلاح‌شده یِ (46) می‌شود

$$\left(1 - 0.83 \times \frac{3}{5}\right) \frac{G\,M}{R^2} a_{2\,0}\, \mathrm{Y}_{2\,0}(\hat{\mathbf{r}}) + \frac{1}{3}\omega^2\, R^2\, \mathrm{P}_2(\cos\theta) = 0, \qquad (62)$$

و از این‌جا

$$\Delta R = \frac{1-(3/5)}{1-(0.83\times 3/5)}, \\ = 0.80 \times \frac{5}{4}\,\frac{\omega^2\, R^2}{g}, \\ = 22\ \mathrm{km}. \qquad (63)$$

با توجه به مدل ِ ساده ای که به کار رفت، توافق با مقدار ِ تجربی یِ 21 km بسیار خوب است. در شکل ِ ساده یِ این محاسبه، از فقط سه کمیت ِ g، R، و ω استفاده شد و مقدار ِ 28 km به دست آمد. با استفاده از فقط یک کمیت ِ اضافی یِ I عدد ِ 22 km به دست آمد. (جرم ِ زمین را می‌شود از رو یِ g، R، و G به دست آورد.) بد نیست توجه کنید که خود ِ خطِ‌استوا هم دایره نیست و تفاضل ِ طول ِ نیم‌قطرها یِ کوچک و بزرگ َش حدود ِ 200 m است [3].

4 مرجع‌ها

[1] John David Jackson; “Classical electrodynamics”, 3rd edition (John Wiley & Sons, 1998) chapter 3

[2] Herbert Goldstein; “Classical mechanics”, 2nd edition (Addison-Wesley, 1980) chapter 4

[3] “CRC handbook of chemistry and physics”, 80th edition (The Chemical Rubber Company, 1999) 14-6