X1-010 (2002/07/14)

مختصات ِ بیضوی در چند مسئله ی ِ الکترُمغناطیس

محمد خرمی mamwad@mailaps.org

مختصات ِ بیضوی معرفی میشود، و برا ی ِ حل ِ چند مسئله ی ِ مقدارِمرزی در الکترُستاتیک و مغناطُستاتیک به کار میرود.

0 مقدمه

در دُ بعد، مختصات ِ بیضوی ی ِ (u,v) از رو ی ِ مختصات ِ دکَرتی ی ِ (x,y) به این شکل تعریف میشود.

$$x = c\,\sinh u\,\cos v,$$
$$y = c\,\cosh u\,\sin v, \qquad (1)$$

که در آن c پارامتر ی ثابت (و مثبت) است. گستره ی ِ (u,v) را میشود $(0 \le u < \infty, v \in \mathbb{V})$ یا $((-\infty < u < \infty, (-\pi/2) \le v \le (\pi/2))$ گرفت، که $\mathbb{V}$ بازه ای به پهنا ی ِ $(2\,\pi)$ است که از یک طرف باز و از طرف ِ دیگر بسته است. در حالت ِ اول، خمها ی ِ $u =$ constant بیضی،

و خمها ی ِ $v = \text{constant}$ ربع‌هذلولی اند. در حالت ِ دوم، خمها ی ِ $u = \text{constant}$ نیم‌بیضی، و خمها ی ِ $v = \text{constant}$ نیم‌هذلولی اند. در هر دوحالت، کانونها ی ِ این خمها ی ِ مختصاتی نقطه‌ها ی ِ $(x = 0, y = \pm c)$ اند.

متریک ِ اقلیدسی میشود

$$\begin{aligned} \mathrm{d}s^2 &:= \mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2, \\ &= D^2(u, v)\,(\mathrm{d}u^2 + \mathrm{d}v^2), \end{aligned} \tag{2}$$

که در آن

$$\begin{aligned} D^2(u, v) &:= c^2\,(\cosh^2 u - \sin^2 v), \\ &= c^2\,(\sinh^2 u + \cos^2 v). \end{aligned} \tag{3}$$

از این‌جا لَپلَسی میشود

$$\begin{aligned} \nabla^2 &:= \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}, \\ &= \frac{1}{D^2(u, v)}\,\left(\frac{\partial^2}{\partial u^2} + \frac{\partial^2}{\partial v^2}\right). \end{aligned} \tag{4}$$

مختصات ِ (u, v)، نسبت به مختصات ِ دکَرتی ی ِ (x, y) همدیس است [1]؛ یعنی شکل ِ متریک بر حسب ِ این مختصات، متناسب است با شکل ِ متریک در مختصات ِ دکَرتی. در دُبعد، این نتیجه میدهد شکل ِ لَپلَسی در مختصات ِ (u, v) هم متناسب است با شکل ِ لَپلَسی در مختصات ِ دکَرتی، که از رابطه ی ِ بالا هم دیده میشود.

در سه بُعد، دُ نوع مختصات ِ بیضوی تعریف میکنند. در هر دُنوع، تعریف بر اساس ِ مختصات ِ استوانه‌ای ساده‌تر است. در نوع ِ اول (پخ)، مختصات ِ (u, ϕ, v) از رو ی ِ مختصات ِ استوانه‌ای ی ِ (ρ, ϕ, z) چنین تعریف میشود.

$$\begin{aligned} \rho &= c\,\cosh u\,\sin v, \\ z &= c\,\sinh u\,\cos v. \end{aligned} \tag{5}$$

گستره ی ِ (u, v) را میشود $(0 \le u < \infty, 0 \le v \le \pi)$، یا $(-\infty < u < \infty, 0 \le v \le (\pi/2))$ گرفت. در حالت ِ اول، رویه‌ها ی ِ $u = \text{constant}$ بیضیگونها ی ِ دوار ِ پخ اند، و رویه‌ها ی ِ $v =$

$u=\text{constant}$ نیمبیضیگونها یِ constant نیمهذلولیگونها یِ یکپارچه. در حالت ِ دوم، رویه‌ها یِ $u=\text{constant}$ نیمبیضیگونها یِ دوار ِ پخ اند، و رویه‌ها یِ $v=\text{constant}$ هذلولیگونها یِ یکپارچه. این رویه‌ها یِ مختصاتی، از دوران ِ (حُلِ‌محورِz ِ) بیضیها یا هذلولیها یی به دست می‌آیند که دورانیافته یِ کانونها یِشان دایره یِ $(\rho=c, z=0)$ است.

متریک میشود

$$
\begin{aligned}
\mathrm{d}s^2 &:= \mathrm{d}\rho^2 + \rho^2\,\mathrm{d}\phi^2 + \mathrm{d}z^2,\\
&= D^2(u,v)\,(\mathrm{d}u^2+\mathrm{d}v^2) + c^2\,\cosh^2 u\,\sin^2 v\,\mathrm{d}^2\phi,
\end{aligned}
\tag{6}
$$

و لَپلَسی میشود

$$
\begin{aligned}
\nabla^2 &:= \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2},\\
&= \frac{1}{D^2(u,v)}\,\left(\frac{1}{\cosh u}\,\frac{\partial}{\partial u}\,\cosh u\,\frac{\partial}{\partial u} + \frac{1}{\sin v}\,\frac{\partial}{\partial v}\,\sin v\,\frac{\partial}{\partial v}\right)\\
&\quad + \frac{1}{c^2\,\cosh^2 u\,\sin^2 v}\,\frac{\partial^2}{\partial\phi^2}.
\end{aligned}
\tag{7}
$$

در نُع ِ دوم (کشیده)، مختصات ِ (s,ϕ,t) از رو یِ مختصات ِ استوانه‌ای یِ (ρ,ϕ,z) چنین تعریف میشود.

$$
\begin{aligned}
\rho &= c\,\sinh s\,\sin t,\\
z &= c\,\cosh s\,\cos t.
\end{aligned}
\tag{8}
$$

گستره یِ (s,t) میشود $(0\le s<\infty, 0\le t\le\pi)$. رویه‌ها یِ $s=\text{constant}$ بیضیگونها یِ دوار ِ کشیده اند، و رویه‌ها یِ $t=\text{constant}$ نیمهذلولیگونها یِ دُپارچه. این رویه‌ها یِ مختصاتی دورانیافته یِ (حولِ‌محورِz ِ) بیضیها و هذلولیها یی با کانونها یِ $(\rho=0, z=\pm c)$ اند.

متریک میشود

$$
\begin{aligned}
\mathrm{d}s^2 &:= \mathrm{d}\rho^2 + \rho^2\,\mathrm{d}\phi^2 + \mathrm{d}z^2,\\
&= F^2(s,t)\,(\mathrm{d}s^2+\mathrm{d}t^2) + c^2\,\sinh^2 s\,\sin^2 t\,\mathrm{d}\phi^2,
\end{aligned}
\tag{9}
$$

که

$$F^2(s,t) := c^2(\cosh^2 s - \cos^2 t), \\ = c^2(\sinh^2 s + \sin^2 t). \tag{10}$$

لَپلَسی میشود

$$\nabla^2 := \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}, \\ = \frac{1}{F^2(s,t)} \left(\frac{1}{\sinh s} \frac{\partial}{\partial s} \sinh s \frac{\partial}{\partial s} + \frac{1}{\sin t} \frac{\partial}{\partial t} \sin t \frac{\partial}{\partial t} \right) \\ + \frac{1}{c^2 \sinh^2 s \sin^2 t} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2}. \tag{11}$$

معادله یِ لَپلَس [2] در سه نُع مختصات ی که تعریف کردیم جداشدنی است. به هم ین علت حل ِ بعض ی مسئله‌ها یِ الکترُستاتیک و مغناطُستاتیک با این مختصات ساده است.

1 میدان ِ الکتریکی یِ نوار ِ رسانا، میدان ِ مغناطیسی یِ نوار ِ رسانا با جریان در راستا یِ نوار

این مسئله‌ها تقارن ِ انتقالی دارند، بنابراین دُبعدی اند. ضمنَن این دُ مسئله به هم مربوط اند: میدان ِ مغناطیسی در هر نقطه در مسئله یِ دوم، دورانیافته یِ میدان ِ الکتریکی در همان نقطه در مسئله یِ اول به اندازه یِ $(\pi/2)$ در صفحه یِ عمود بر نوار است [3].

1.1 میدان ِ الکتریکی یِ نوار ِ رسانا

نوار ی رسانا به پهنا یِ $(2\,c)$، چگالی‌یِبار ِ طولی یِ λ دارد. میخواهیم میدان یا پتانسیل ِ الکتریکی را حساب کنیم.

مقطع ِ نوار را پاره‌خط ِ $(x=0, -c \le y \le c)$، و محور ِ نوار را محور ِ z میگیریم. در این صورت پتانسیل ِ الکتریکی تابع ی از x و y است، که بیرون ِ پاره‌خط ِ مقطع‌نوار معادله یِ لَپلَس [2] را بر می‌آورد:

$$\nabla^2\Phi = 0, \qquad (x \ne 0 \ \vee\ |y| > c). \tag{12}$$

پاره‌خط ِ بالا متناظر است با $u=0$. (برا یِ این مسئله، بهتر است u را نامنفی بگیریم و v را رو یِ ناحیه ای به طول ِ $(2\,\pi)$. پس پتانسیل باید شرطها یِ

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial u^2}+\frac{\partial^2}{\partial v^2}\right)\Phi=0,\qquad u>0, \tag{13}$$

و

$$\Phi(u=0,v)=\Phi_0 \tag{14}$$

را بر آورَد. به علاوه، پتانسیل باید نسبت به v دُره‌ای (با دُره یِ $(2\,\pi)$) باشد:

$$\Phi(u,v+2\,\pi)=\Phi(u,v). \tag{15}$$

این شرطها برا یِ به‌دست‌آوردن ِ پتانسیل کافی نیست، رفتار ِ پتانسیل در $u\to\infty$ هم لازم است. این را میشود از این‌جا حساب کرد که در ρ ها یِ بزرگ، نوار شبیه ِ یک میله یِ باردار به نظر میرسد. پس

$$\Phi\approx-\frac{\lambda}{2\,\pi}\,\ln\frac{\rho}{\rho_0},\qquad \rho\to\infty. \tag{16}$$

(ϵ_0 را یک گذاشته ایم.) اما $\rho\to\infty$ یعنی $u\to\infty$، و داریم

$$\rho\approx\frac{c\,e^u}{2},\qquad \rho\to\infty. \tag{17}$$

که از آن نتیجه می‌شود

$$\Phi\approx-\frac{\lambda}{2\,\pi}\,u+\text{constant},\qquad u\to\infty. \tag{18}$$

رابطه‌ها یِ (13)، (14)، (15)، و (18)، برا یِ تعیین ِ Φ کافی اند. Φ را میشود نسبت به v بسط ِ فوریه [4] داد:

$$\Phi=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\alpha_k(u)\,\exp(\mathrm{i}\,k\,v), \tag{19}$$

که از آن نتیجه میشود

$$\left(\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}u^2}-k^2\right)\alpha_k(u)=0. \tag{20}$$

جواب ِ این معادله‌ها

$$\begin{aligned}\alpha_k(u)&=\beta_k\,\exp(|k|\,u)+\gamma_k\,\exp(-|k|\,u),\qquad k\neq 0,\\ \alpha_0(u)&=\gamma_0+\beta_0\,u\end{aligned} \tag{21}$$

است. از شرطِ (18) نتیجه میشود

$$\beta_k = 0, \qquad k \neq 0, \tag{22}$$

و

$$\beta_0 = -\frac{\lambda}{2\,\pi}. \tag{23}$$

بنابراین پتانسیل میشود

$$\Phi = -\frac{\lambda}{2\,\pi}\,u + \gamma_0 + \sum_{k\neq 0}\gamma_k\,\exp(-|k|\,u)\,\exp(\mathrm{i}\,k\,v). \tag{24}$$

شرطِ مرزی یِ (14) نتیجه میدهد

$$\gamma_k = 0, \qquad k \neq 0. \tag{25}$$

از اینجا

$$\Phi = -\frac{\lambda}{2\,\pi}\,u + \gamma_0. \tag{26}$$

یک راهِ ساده‌تر برا یِ به‌دست‌آوردنِ این رابطه آن است که با توجه به شرطهایِ‌مرزی یِ (14) و (18)، و معادله یِ (13)، پتانسیل را از اول تابعِ فقط u بگیریم. اگر جواب ی پیدا شود، با توجه به قضیه یِ یک‌تایی یِ جوابِ معادله یِ لَپلَس [2] با شرطِ مرزی یِ دیریکله [5]، این همان جوابِ مُردِنظر خاهد بود (فصلِ 1 از [6]).

مقدارِ ثابتِ طرفِ راستِ (26) تعیین نمیشود، و اهمیتِ فیزیکی هم ندارد. u هم از رابطه‌ها یِ (1) بر حسبِ x و y به دست می‌آید:

$$\frac{x^2}{c^2\,\sinh^2 u} + \frac{y^2}{c^2\cosh^2 u} = 1. \tag{27}$$

با استفاده از مختصاتِ بیضوی، مسئله یِ بالا به شکلِ یک مسئله با شرطِ مرزی یِ دیریکله [5] بود. میشد این مسئله را با مختصاتِ دکَرتی هم بررسی کرد، اما در آن صورت شرایطِ مرزی یِ مسئله مخلوط میشد: رو یِ نوار و در بی‌نهایت دیریکله [5]، درصفحه یِ نوار بیرونِ نوار نُیمان [7].

میدانِ الکتریکی هم به‌ساده‌گی به دست می‌آید:

$$\mathbf{E} = \frac{\lambda}{2\,\pi}\,\nabla u. \tag{28}$$

از جمله در $u=0$ (رو یِ نوار)، E_x صفر است و چگالی یِ سطحی یِ بار میشود

$$\begin{aligned}\sigma(y) &= \mathrm{sgn}(x)\, E_x(x,y)|_{x\to 0},\\ &= \mathrm{sgn}(x)\,\frac{\lambda}{2\,\pi\,c\,\cos v},\\ &= \frac{\lambda}{2\,\pi\,\sqrt{c^2-y^2}}.\end{aligned}\tag{29}$$

توجه دارید که این چگالی‌یِ‌بار، چگالی‌یِ‌بار ِ هر طرف ِ نوار است؛ چگالی‌یِ‌بار ِ کل دُبرابر ِ این مقدار است. به‌ساده‌گی دیده میشود انتگرال ِ این عبارت رو یِ مقطع ِ نوار λ است، که باید هم باشد، چون λ چگالی یِ طولی یِ بار است.

معادله یِ (26) نشان میدهد اختلاف‌پِتانسیل ِ نوار با بینهایت، بینهایت است. پس ظرفیت ِ نوار بر طول صفر است.

1.2 میدان ِ مغناطیسی یِ نوار ِ حامل‌ِجریان

نوار ی رسانا به طول ِ $(2\,c)$ و حامل ِ جریان ِ I را در نظر بگیرید. فرض کنید رو یِ نوار، مئلفه یِ عمودبرنوار ِ میدان ِ مغناطیسی صفر است. (یک حالت ی که چنین است، وقت ی است که نوار اَبَررسانا است.) در این صورت این میدان ِ مغناطیسی از رو یِ میدان ِ الکتریکی یِ مسئله یِ قبل به دست می‌آید [3]:

$$\begin{aligned}\mathbf{B} &= \frac{I}{\lambda}\,\hat{\mathbf{z}}\times\mathbf{E},\\ &= \frac{I}{2\,\pi}\,\hat{\mathbf{z}}\times\nabla u,\end{aligned}\tag{30}$$

که $\mathbf{E}$ میدان ِ الکتریکی یِ رابطه یِ (28) است، و μ_0 را 1 گذاشته ایم.

مشابه با (29)، چگالی یِ جریان ِ سطحی به دست می‌آید:

$$\mathbf{J}_{\mathrm{s}}(y) = \hat{\mathbf{z}}\,\frac{I}{2\,\pi\,\sqrt{c^2-y^2}}.\tag{31}$$

این چگالی‌یِ‌جریان هم، چگالی‌یِ‌جریان ِ گذرنده از هر طرف ِ نوار است؛ چگالی‌یِ‌جریان ِ کل دُبرابر ِ این مقدار است.

2 صفحه یِ رسانا یی که یک نوار از آن برداشته شده

صفحه یِ رسانا یی را در نظر بگیرید که نوار ی به پهنا یِ $(2\,c)$ از آن برداشته شده. مسئله یِ الکتریکی این است که میدان ِ الکتریکی دور از نوار $E_0\,\hat{\mathbf{n}}$ است، که $\hat{\mathbf{n}}$ عمود بر صفحه به طرف ِ بیرون است. (جهت ِ این بردار در دُطرف ِ صفحه متفاوت است). مسئله یِ مغناطیسی یِ هم‌ارز آن است که میدان ِ مغناطیسی دور از نوار $B_0\,\hat{\mathbf{t}}\times\hat{\mathbf{n}}$ است، که $\hat{\mathbf{t}}$ بردار ی موازی با محور ِ نوار است. این دُمسئله هم به‌ساده‌گی به هم تبدیل می‌شوند [3].

چرا این شرطها یِ مرزی انتخاب شده اند؟ سیستم ی را در نظر بگیرید که شامل ِ این صفحه یِ شکافدار باشد، و میدان ِ الکتریکی دور از شکاف و در هر طرف ِ صفحه یکنواخت باشد. میدان ِ الکتریکی در نزدیکی یِ صفحه و دور از شکاف، در هر طرف ِ صفحه یک‌نواخت است. مئلفه یِ مماسی یِ این میدان صفر است، چون میدان ِ الکتریکی رو یِ رسانا فقط مئلفه یِ عمودی دارد. پس میدان ِ یک‌نواخت ِ دُطرف ِ صفحه (دور از شکاف) عمود بر صفحه است، و برابر است با یک میدان ِ میان‌گین (که دُطرف ِ صفحه یکی است) به اضافه یِ میدان ی که فقط مئلفه یِ عمود بر صفحه دارد، و در یک طرف قرینه یِ طرف ِ دیگر است. جواب ِ مسئله یِ شرط‌ِمرزی با میدان ِ اول ساده است: میدان ِ الکتریکی همه‌جا یکنواخت (و برابر با همان میدان است). مسئله یِ دوم چیز ی است که این‌جا بررسی می‌شود.

در مُرد ِ مسئله یِ مغناطیسی هم، فرض کنید میدان ِ مغناطیسی دور از شکاف در هر سو یِ صفحه یکنواخت باشد. با استدلال ی مشابه با استدلال ِ بالا معلوم می‌شود مئلفه یِ عمودبرصفحه یِ این میدان ِ یکنواخت، دُطرف ِ صفحه یکسان است. پس میدان ِ دورازشکاف را می‌شود به یک میدان ِ یکسان در دوطرف ِ صفحه به اضافه یِ یک میدان ِ موازی با سطح تجزیه کرد، که این میدان ِ اخیر در یک طرف ِ صفحه قرینه یِ طرف ِ دیگر است. در مسئله‌ها یِ عملَن‌دُبعدی، میدان ِ مغناطیسی ضمنَن بر محور ِ شکاف عمود است (همه‌جا، نَه فقط دور از شکاف).

2.1 میدان ِ الکتریکی یِ صفحه یِ رسانا یی که یک نوار از آن برداشته شده

نوار را به همان شکل ِ بخش ِ قبل می‌گیریم. در این صورت صفحه یِ رسانا (که به خاطر ِ نوار دُتکه شده است) در مختصات ِ بیضوی معادل است با $v=(-\pi/2)$ و $v=(\pi/2)$. (این بار بهتر است

بگیریم $-\infty < u < \infty$ و $(-\pi/2) \le v \le (\pi/2)$)). شرطها یِ مرزی این است که

$$\Phi = 0, \qquad (v = -\frac{\pi}{2} \ \vee \ v = \frac{\pi}{2}), \tag{32}$$

و

$$\Phi \approx -E_0 |x|, \qquad (x^2 + y^2) \to \infty. \tag{33}$$

شرطِ اخیر از این‌جا به دست می‌آید که

$$\hat{\mathbf{n}} = \mathrm{sgn}(x)\, \hat{\mathbf{x}}. \tag{34}$$

با استفاده از شرطِ (32)بسطِ فوریه [4] یِ Φ نسبت به v چنین میشود.

$$\Phi = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k(u) \sin\left[k\, \left(\frac{\pi}{2} - v\right)\right]. \tag{35}$$

از این که Φ باید معادله یِ لَپلَس [2] را بر آورَد، نتیجه میشود α_k باید (20) را بر آورَد، و از آنجا،

$$\alpha_k(u) = \beta_k\ \exp(k\, u) + \gamma_k\ \exp(-k\, u). \tag{36}$$

شرطِ (33) نتیجه میدهد

$$\begin{aligned} \beta_k &= 0, \qquad k \ne 1, \\ \gamma_k &= 0, \qquad k \ne 1, \end{aligned} \tag{37}$$

و

$$\begin{aligned} \beta_1 &= -\frac{c\, E_0}{2}, \\ \gamma_1 &= -\frac{c\, E_0}{2}. \end{aligned} \tag{38}$$

پس،

$$\Phi = -c\, E_0\ \cosh u\ \cos v, \tag{39}$$

که $\cosh u$ از (27) به دست می‌آید و $\cos v$ از

$$\frac{x^2}{c^2\ \cos^2 v} - \frac{y^2}{c^2\ \sin^2 v} = -1. \tag{40}$$

میدانِ الکتریکی هم میشود

$$\mathbf{E} = c\, E_0\, \nabla(\cosh u\ \cos v). \tag{41}$$

مشابه با (29)، چگالی ی ِ سطحی ی ِ بار به دست می‌آید:

$$\begin{aligned}\sigma(y) &= \mathrm{sgn}(x)\, E_x(x,y)|_{x\to 0},\\ &= \mathrm{sgn}(x)\, E_0\, \frac{\cosh u}{\sinh u},\\ &= E_0\, \frac{|y|}{\sqrt{y^2-c^2}}.\end{aligned} \tag{42}$$

به‌ساده‌گی دیده میشود اختلاف ِ انتگرال ِ این چگالی تا $|y| = R$ و انتگرال ِ یک چگالی ی ِ یکنواخت (از $y = 0$ تا $|y| = R$)، در $R \to \infty$ به صفر میگراید.

2.2 میدان ِ مغناطیسی ی ِ صفحه ی ِ رسانا یی که یک نوار از آن برداشته شده

این‌جا هم با فرض ِ این که رو ی ِ رسانا مئلفه ی ِ عمودی ی ِ میدان ِ مغناطیسی صفر است، مسئله به مسئله ی ِ قبل تبدیل میشود [3]:

$$\mathbf{B} = c\, B_0\, \hat{\mathbf{z}} \times \nabla(\cosh u\, \cos v). \tag{43}$$

توجه داریم که $\hat{\mathbf{t}} = \hat{\mathbf{z}}$. چگالی ی ِ جریان ِ سطحی هم شبیه ِ (41) به دست می‌آید:

$$\mathbf{J}_{\mathrm{s}}(x) = \hat{\mathbf{z}}\, B_0\, \frac{|y|}{\sqrt{y^2-c^2}}. \tag{44}$$

این‌جا هم دیده میشود اختلاف ِ انتگرال ِ این چگالی تا $|y| = R$ و انتگرال ِ یک چگالی ی ِ یکنواخت تا $|y| = R$، در $R \to \infty$ به صفر میگراید.

3 میدان ِ الکتریکی ی ِ یک قرص ِ رسانا

یک قرص ِ رسانا با شعاع ِ c حامل ِ بار ِ Q است. میخاهیم میدان ِ الکتریکی ی ِ آن را حساب کنیم. قرص را در صفحه ی ِ $z = 0$، و مرکز ِ آن را مبدئ ِ مختصات میگیریم. قرص در مختصات ِ بیضوی می‌شود $u = 0$. شرایط ِ مرزی ی ِ مسئله این است که

$$\Phi = \Phi_0, \qquad u = 0, \tag{45}$$

و

$$\Phi \to 0, \qquad (\rho^2 + z^2) \to \infty. \tag{46}$$

ضمنَن Φ_0 باید چنان باشد که بار ِ کل ِ قرص Q شود. بیرون ِ قرص $(u > 0)$، پتانسیل معادله یِ لَپلَس[2] را بر می‌آورد. چون شرایط ِ مرزی سمتی- متقارن اند، پتانسیل را میشود مستقل از ϕ گرفت. در این صورت،

$$\left(\frac{1}{\cosh u}\,\frac{\partial}{\partial u}\,\cosh u\,\frac{\partial}{\partial u}+\frac{1}{\sin v}\,\frac{\partial}{\partial v}\,\sin v\,\frac{\partial}{\partial v}\right)\Phi=0. \tag{47}$$

پتانسیل را میشود نسبت به مختصات ِ u و v جدا کرد. شرط ِ (46)، بر حسب ِ مختصات ِ بیضوی میشود

$$\Phi\to 0,\qquad u\to\infty. \tag{48}$$

دیده میشود که شرطها یِ مرزی تابع ِ v نیستند. پس یک نهاده یِ مستقل‌ازv برا یِ پتانسیل میگیریم:

$$\left(\frac{1}{\cosh u}\,\frac{\partial}{\partial u}\,\cosh u\,\frac{\partial}{\partial u}\right)\Phi=0. \tag{49}$$

این معادله دو جواب ِ خطی- مستقل دارد:

$$\begin{aligned}\tilde{\mathrm{P}}_0(u)&:=1,\\ \tilde{\mathrm{Q}}_0(u)&:=\tan^{-1}(\sinh u).\end{aligned} \tag{50}$$

جواب ی که شرطها یِ (45) و (48) را بر می‌آورَد،

$$\begin{aligned}\Phi&=\Phi_0\,\left[1-\frac{2}{\pi}\,\tan^{-1}(\sinh u)\right],\\ &=\frac{2\,\Phi_0}{\pi}\,\cot^{-1}(\sinh u)\end{aligned} \tag{51}$$

است. برا یِ به‌دست‌آوردن ِ Φ_0، میشود از رفتار ِ پتانسیل در فاصله‌ها یِ دور از قرص استفاده کرد:

$$\begin{aligned}\Phi&\approx\frac{2\,\Phi_0}{\pi\,\sinh u},\\ &\approx\frac{4\,\Phi_0}{\pi\,e^u}.\end{aligned} \tag{52}$$

اما چون بار ِ قرص Q است،

$$\begin{aligned}\Phi&\approx\frac{Q}{4\,\pi\,\sqrt{\rho^2+z^2}},\\ &\approx\frac{Q}{2\,\pi\,c\,e^u}.\end{aligned} \tag{53}$$

از این‌جا،

$$\Phi_0 = \frac{Q}{8\,c}, \tag{54}$$

و

$$\Phi = \frac{Q}{4\,\pi\,c}\ \cot^{-1}(\sinh u). \tag{55}$$

u از رابطه ای مشابه با (27) به دست می‌آید، که در آن (x, y) به (z, ρ) تبدیل شده است.

میدان ِ الکتریکی میشود

$$\mathbf{E} = \frac{Q}{4\,\pi\,c\,\cosh u}\,\nabla u, \tag{56}$$

و از رو ی آن چگالی ی ِ سطحی ی ِ بار میشود

$$\sigma = \frac{Q}{4\,\pi\,c\,\sqrt{c^2 - \rho^2}}. \tag{57}$$

سرانجام، از (54) ظرفیت ِ قرص به دست می‌آید:

$$C = 8\,c. \tag{58}$$

4 میدان ِ الکتریکی در نزدیکی ی ِ صفحه ی ِ رسانا یی که یک قرص از آن برداشته شده

یک صفحه ی ِ رسانا در نظر بگیرید که قرص ی به شعاع ِ c از آن برداشته شده. میدان ِ الکتریکی دور از قرص، $E_0\,\hat{\mathbf{n}}$ است، که $\hat{\mathbf{n}}$ بردار ِ یکه ی ِ عمود بر صفحه و به طرف ِ بیرون ِ صفحه است. تُجیه ِ اهمیت ِ این شرط ِ مرزی شبیه ِ بحث ِ بخش ِ 2 است. با انتخاب ِ مختصات مشابه با بخش ِ 3، دیده میشود پتانسیل باید شرطها ی ِ

$$\Phi = 0, \qquad v = \frac{\pi}{2}, \tag{59}$$

و

$$\Phi \approx -E_0\,|z|, \qquad (\rho^2 + z^2) \to \infty \tag{60}$$

را بر آورد. گستره ی ِ (u, v) را $-\infty < u < \infty$ و $0 \le v \le (\pi/2)$ گرفته ایم. ضمناً پتانسیل باید معادله ی ِ لَپلَس [2] را هم بر آورد، و چون شرایط ِ مرزی سمتی- متقارن اند، پتانسیل را میشود مستقل از

ϕ گرفت. در این صورت پتانسیل (47) را بر می‌آورد. شرط ِ مرزی ی ِ(60)، بر حسب ِ مختصات ِ بیضوی میشود

$$\Phi \approx -c\,E_0\,|\sinh u|\,\cos v, \qquad |u| \to \infty. \tag{61}$$

عملگر ِطرف ِ چپ ِ (47) مجموع ِ دُ عملگر ِ دیفرانسیل (یک ی نسبت به u و دیگری نسبت به v) است، که با هم جابه‌جا میشوند. پس پتانسیل را می‌شود بر حسب ِ ویژه‌بردارها ی ِهمزمان ِ این دُ بسط داد:

$$\Phi = \sum_\mu U_\mu(u)\,V_\mu(v), \tag{62}$$

که

$$\begin{aligned}\left(\frac{1}{\cosh u}\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u}\,\cosh u\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u}\right) U &= \mu\,U\\ \left(\frac{1}{\sin v}\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}v}\,\sin v\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}v}\right) V &= -\mu\,V.\end{aligned} \tag{63}$$

معادله ی ِدوم، با تغییرِمتغیر ِ

$$\xi := \cos v \tag{64}$$

به معادله ی ِلُژاندر [8] تبدیل میشود:

$$\left[(1-\xi^2)\,\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\xi^2} - 2\xi\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\xi}\right] V = -\mu\,V. \tag{65}$$

برا ی ِاین که این معادله جوابها ی ِخُشرفتار در ± 1 (یا خُشرفتار در 1 و صفر در صفر) داشته باشد، باید $\mu = l(l+1)$، که l عدد ی صحیح و نامنفی است (فصل ِ 3 از [6]). پس (62) را میشود به این شکل بازنویسی کرد.

$$\Phi = \sum_{l=1}^{\infty} \zeta_l(u)\,\mathrm{P}_l(\cos v), \tag{66}$$

که P_l چندجمله‌ای ی ِلُژاندر [8] است. با استفاده از

$$\mathrm{P}_1(\xi) = \xi, \tag{67}$$

و نیز استقلال ِ خطی ی ِچندجمله‌ایها ی ِلُژاندر [8]، از (61) نتیجه میشود در طرف ِ راست ِ (66) فقط جمله ی ِ$l = 1$ غیرِصفر است:

$$\Phi = \zeta_1(u)\,\cos v, \tag{68}$$

که ζ_1 باید

$$\left(\frac{1}{\cosh u}\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u}\,\cosh u\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u}\right)\zeta_1 = 2\zeta_1 \tag{69}$$

را بر آورد. معادله ی ِ بالا دُ جواب ِ خطی-مستقل دارد:

$$\begin{aligned}\tilde{\mathrm{P}}_1(u) &:= \sinh u,\\ \tilde{\mathrm{Q}}_1(u) &:= 1+\sinh u\,\tan^{-1}(\sinh u).\end{aligned} \tag{70}$$

از شرط ِ مرزی ی ِ (61) نتیجه میشود ζ_1 را باید مضرب ی از $\tilde{\mathrm{Q}}_1$ بگیریم. پس،

$$\Phi = -\frac{2\,c\,E_0}{\pi}\,[1+\sinh u\,\tan^{-1}(\sinh u)]\,\cos v. \tag{71}$$

از این‌جا میدان ِ الکتریکی میشود

$$\mathbf{E} = \frac{2\,c\,E_0}{\pi}\,\nabla\{[1+\sinh u\,\tan^{-1}(\sinh u)]\,\cos v\}, \tag{72}$$

و چگالی ی ِ سطحی ی ِ بار (یعنی $\mathbf{E}\cdot\hat{\mathbf{z}}\,\mathrm{sgn}(z)$ در $z\to 0$) میشود

$$\sigma = \frac{2\,E_0}{\pi}\,\left(\frac{c}{\sqrt{\rho^2-c^2}}+\tan^{-1}\frac{\sqrt{\rho^2-c^2}}{c}\right). \tag{73}$$

به‌ساده‌گی میشود نشان داد اختلاف ِ انتگرال ِ این چگالی‌ی ِبار با انتگرال ِ چگالی ی ِ یک‌نواخت ِ E_0 (از $\rho=0$) تا شعاع ِ R، در $R\to\infty$ به صفر میگراید.

5 میدان ِ مغناطیسی در نزدیکی ی ِ صفحه ی ِ رسانا یی که یک قرص از آن برداشته شده

همان هندسه ی ِ مسئله ی ِ بخش ِ قبل را در نظر بگیرید، و فرض کنید میدان ِ مغناطیسی دور از قرص $B_0\,\mathrm{sgn}(z)\,\hat{\mathbf{x}}$ است، و رو ی ِ سطح مثلفه ی ِ عمودبرسطح ِ میدان صفر میشود. ناحیه ی ِ بیرون ِ صفحه ساده‌همبند است. پس آنجا میشود میدان ِ مغناطیسی را مشتق ِ یک پتانسیل ِ اسکالر گرفت:

$$\mathbf{B} = -\nabla\Phi^{\mathrm{M}}, \qquad v\neq\frac{\pi}{2}. \tag{74}$$

این پتانسیل معادله ی ِ لَپلَس [2]، وشرطها ی ِ مرزی ی ِ

$$\Phi^{\mathrm{M}} \approx -c\,B_0\,\cosh u\,\sin v\,\cos\phi\,\mathrm{sgn}(z), \qquad |u|\to\infty, \tag{75}$$

و

$$\left.\frac{\partial \Phi^{\rm M}}{\partial v}\right|_{v=(\pi/2)} = 0 \qquad (76)$$

را بر می‌آورد. میشود پتانسیل را نسبت به ϕ بسط ِ فوریه[4] داد. در این صورت از شرط ِ مرزی ی ِ (75) نتیجه میشود پتانسیل با $\cos\phi$ متناسب است:

$$\Phi^{\rm M} = \Psi(u,v)\ \cos\phi. \qquad (77)$$

$\Phi^{\rm M}$ باید معادله ی ِ لَپلَس[2] را بر آورد. از اینجا

$$\left(\frac{1}{\cosh u}\,\frac{\partial}{\partial u}\ \cosh u\,\frac{\partial}{\partial u} + \frac{1}{\sin v}\,\frac{\partial}{\partial v}\ \sin v\,\frac{\partial}{\partial v} - \frac{\cosh^2 u - \sin^2 v}{\cosh^2 u\,\sin^2 v}\right)\Psi = 0. \qquad (78)$$

یا

$$\left(\frac{1}{\cosh u}\,\frac{\partial}{\partial u}\ \cosh u\,\frac{\partial}{\partial u} + \frac{1}{\cosh^2 u} + \frac{1}{\sin v}\,\frac{\partial}{\partial v}\ \sin v\,\frac{\partial}{\partial v} - \frac{1}{\sin^2 v}\right)\Psi = 0. \qquad (79)$$

این‌جا هم عملگر ِ طرف ِ چپ مجموع ِ دُ عملگر ِ دیفرانسیل است، که با هم جابه‌جا میشوند. پس Ψ را میشود بر حسب ِ ویژه‌حالتها ی ِ همزمان ِ این دُعملگر بسط داد:

$$\Psi = \sum_\mu X_\mu(u)\,Y_\mu(v), \qquad (80)$$

که

$$\begin{aligned}\left(\frac{1}{\cosh u}\,\frac{\rm d}{{\rm d}u}\ \cosh u\,\frac{\rm d}{{\rm d}u} + \frac{1}{\cosh^2 u}\right) X &= \mu\,X\\ \left(\frac{1}{\sin v}\,\frac{\rm d}{{\rm d}v}\ \sin v\,\frac{\rm d}{{\rm d}v} - \frac{1}{\sin^2 v}\right) Y &= -\mu\,Y.\end{aligned} \qquad (81)$$

با تغییرِمتغیر ِ (64)، معادله ی ِ دوم به معادله ی ِ وابسته ی ِ مرتبه‌ی ِیک ِ لُژاندر [8] تبدیل میشود:

$$\left[(1-\xi^2)\,\frac{{\rm d}^2}{{\rm d}\xi^2} - 2\,\xi\,\frac{\rm d}{{\rm d}\xi} - \frac{1}{1-\xi^2}\right] Y = -\mu\,Y. \qquad (82)$$

برا ی ِ این که این معادله جواب ِ خُشرفتار در $\xi = \pm 1$ (یا جواب ِ خُشرفتار در $\xi = 1$ و زُج نسبت به ξ) داشته باشد، باید $\mu = l(l+1)$، که l صحیح و نامنفی است (فصل ِ 3 از [6]. در این صورت (80) را میشود چنین نوشت.

$$\Psi = \sum_{l=1}^\infty \eta_l(u)\,{\rm P}_l^1(\cos v), \qquad (83)$$

که ${\rm P}_l^1$ تابع ِ وابسته ی ِ لُژاندر [8] از مرتبه ی ِ 1 است. با استفاده از

$${\rm P}_1^1(\xi) = \sqrt{1-\xi^2}, \qquad (84)$$

و نیز استقلال ِ خطی یِ تابعهایِلُژاندر [8] ِ از مرتبه یِ m (از جمله $m=1$)، از (75) نتیجه میشود در طرف ِ راست ِ (83) فقط جمله یِ $l=1$ غیرِصفر است:

$$\Psi = \eta_1(u)\,\sin v, \tag{85}$$

که η_1 باید

$$\left(\frac{1}{\cosh u}\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u}\,\cosh u\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u}+\frac{1}{\cosh^2 u}\right)\eta_1 = 2\,\eta_1 \tag{86}$$

را بر آورد. معادله یِ بالا دو جواب ِ خطی-مستقل دارد:

$$\begin{aligned}\tilde{\mathrm{P}}_1^1(u) &:= \cosh u,\\ \tilde{\mathrm{Q}}_1^1(u) &:= \tanh u + \cosh u\,\tan^{-1}(\sinh u).\end{aligned} \tag{87}$$

از شرط ِ مرزی یِ (75) نتیجه میشود η_1 را باید مضرب ی از $\tilde{\mathrm{Q}}_1^1$ بگیریم. پس،

$$\Psi = -\frac{2\,c\,B_0}{\pi}\,[\tanh u + \cosh u\,\tan^{-1}(\sinh u)]\,\sin v, \tag{88}$$

و از آنجا

$$\Phi^{\mathrm{M}} = -\frac{2\,c\,B_0}{\pi}\,[\tanh u + \cosh u\,\tan^{-1}(\sinh u)]\,\sin v\,\cos\phi. \tag{89}$$

به این ترتیب میدان ِ مغناطیسی میشود

$$\mathbf{B} = \frac{2\,c\,B_0}{\pi}\,\nabla\{[\tanh u + \cosh u\,\tan^{-1}(\sinh u)]\,\sin v\,\cos\phi\}. \tag{90}$$

چگالی یِ جریان ِ سطحی هم میشود

$$\mathbf{J}_s = \hat{\mathbf{z}}\times\mathbf{B}\,\mathrm{sgn}(z)|_{z\to 0}, \tag{91}$$

که میشود آن را مشابه با (73) ساده کرد.

6 پانوشتها

[1] James Ward Brown & Ruel V. Churchill; “Complex variables and applications”, 6th edition (Mc Graw-Hill, 1996) chapter 9

[2] Laplace

[3] محمد خرمی؛ «میدان ِ الکترُمغناطیسی یِ دُبعدی (عرضی) و تقارن ِ آن»؛ مجله یِ فیزیک **15**، 4 (1376) 242 تا 244

[4] Fourier

[5] Dirichlet

[6] John David Jackson; “Classical electrodynamics”, 3rd edition (John Wiley & Sons, 1998)

[7] Neumann

[8] Legendre