X1-011 (2002/09/01)

تولد ِ کوانتم‌مکانیک ِ جدید، به زبان ِ ام‌روزی

محمد خرمی mamwad@mailaps.org

این مقاله توصیف ی از نکته‌ها یِ برجسته یِ مقاله یِ مشهور ِ هَیزِن‌بِرگ [a] در 1925 است، که نقطه یِ شروع ِ کوانتم‌مکانیک ِ جدید به حساب می‌آید. این توصیف، به زبان ِ ام‌روزی بیان می‌شود.

0 مقدمه

در ژوئن ِ 1925، وِرنِر هَیزِن‌بِرگ [a] (که آن موقع در گُتینگِن [b] دست‌یار ِ ماکس بُرن [c] بود) برا یِ معالجه یِ بیماری یِ تب‌یونجه اَش به مرخصی رفت. در بازگشت مقاله ای آماده کرده بود که شکل ِ نهایی یِ آن را در نیمه یِ اول ِ ژوئیه به بُرن [c] سپرد تا اگر بُرن [c] چیز ِ جالب ی در آن دید چاپ شود. بُرن [c] فوراً تشخیص داد که این مقاله بسیار مهم است، و نه تنها آن را برای چاپ فرستاد، بل که خود َش و دست‌یار ِ دیگر َش (پاسکوال یُردان [d]) مشغول ِ کار رو یِ آن شدند. مقاله ای که این‌جا مرور َش می‌کنیم همان مقاله است [1]، که آن را نقطه یِ شروع ِ مکانیک ِ ماتریسی می‌دانند. ترجمه یِ این مقاله در [2] آمده است. در این‌جا هدف آن است که نکته‌ها یِ اساسی یِ این مقاله به زبان ِ ام‌روزی باز شود [3].

1 سینماتیک

پرسش ی که در این‌جا مطرح است آن است که یک سیستم ِ فیزیکی را چه گونه مشخص کنیم. هَیزِن‌بِرگ [a] از این‌جا شروع می‌کند که تلاش برای ایجاد ِ یک نظریه یِ سازگار ِ کوانتمی (نَه یک مجموعه قاعده) بر اساس ِ کمیت‌ها یی که مشاهده‌پذیر نیستند، موفق نبوده است. در واقع در میانه یِ تابستان ِ 1925، هنوز کس ی نمی‌دانست جای‌گزین ِ قانون‌ها یِ نیوتُن [e] در کوانتم‌مکانیک چیست، و تصور بر این بود که این جای‌گزین باید برا یِ همان کمیت‌ها یی نوشته شود که در مکانیک ِ کلاسیک با آن‌ها آشنا ییم، مثلاً باید رابطه‌ها یی برا یِ مکان ِ الکترون در اتم پیدا شود. اولین گام ِ هَیزِن‌بِرگ [a] در این مقاله کنارگذاشتن ِ چیزها یی است که می‌گوید در آزمایش‌گاه مشاهده نشده اند. کس ی در آزمایش‌گاه مسیر ِ الکترون را ندیده است، و تلاش برای بناکردن ِ کوانتم‌مکانیک بر اساس ِ مسیر ِ الکترون ناموفق بوده است. پس به‌تر است آن را کنار بگذاریم. اما در کوانتم‌مکانیک هم، بس‌آمدها یِ گذار از یک حالت به یک حالت ِ دیگر مشاهده‌پذیر اند. اگر بخواهیم دقیق‌تر باشیم، باید بگوییم بس‌آمدها یی وجود دارند که مشاهده‌پذیر اند، و این‌ها را می‌شود به شکل ِ ν_{kn} مرتب کرد، با این ویژه‌گی که

$$\nu_{kn} + \nu_{np} = \nu_{kp}. \tag{1}$$

این یک مشاهده یِ تجربی بوده است (مثلاً در مورد ِ بس‌آمد ِ گذارها یِ اتمی). نمادگذاری یی که در این‌جا به کار رفته، اندک ی با نمادگذاری یِ مقاله یِ هَیزِن‌بِرگ [a] متفاوت است: به جا یِ $\nu(n, n-\alpha)$ در مقاله یِ اصلی، ν_{kn} به کار رفته است. این در واقع بس‌آمد ِ گذار از حالت ِ n به حالت ِ $k = n - \alpha$ است. منظور از واژه یِ حالت در این‌جا، همان چیز ی است که ام‌روز به آن ویژه‌حالت ِ انرژی (یا همیلتنی) می‌گوییم.

به‌خاطر ِ رابطه یِ (1)، بس‌آمدهایِ گذار را می‌شود این طور نوشت.

$$\nu_{kn} = \frac{1}{h}(E_n - E_k). \tag{2}$$

این‌جا هم به جا یِ W در مقاله یِ اصلی، E به کار رفته است. ضمناً توجه دارید که ورود ِ h (ثابت ِ پْلانک [f]) در این‌جا کاملاً دل‌بخواه است. می‌شد به جا یِ کمیت ی با بعد ِ انرژی (E_n)، از کمیت ی با بعد ِ بس‌آمد (مثل ِ $f_n := E_n/h$) استفاده کرد. آن چه در این‌جا حساب ِ مکانیک ِ کلاسیک را از کوانتم‌مکانیک جدا می‌کند، مانسته یِ

رابطه یِ (2) در مکانیک ـِ کلاسیک (در واقع نظریه یِ شبهِ‌کلاسیک ی که تا آن موقع وجود داشت) است. در مکانیک ـِ کلاسیک،

$$\nu_{n;\alpha} = \alpha \frac{1}{h}\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}n} =: \alpha\, \nu_n. \tag{3}$$

در این‌جا n از رابطه یِ

$$J = nh \tag{4}$$

به دست می‌آید، که J متغیر ـِ کنش است. α هم از $n - k = \alpha$ به دست می‌آید. برا یِ ساده‌گی، در کل ـِ این مقاله خود را به حرکت‌ها یِ یک‌بعدی یِ محدود (و در نتیجه دوره‌ای در مکانیک ـِ کلاسیک) محدود می‌کنیم.

چرا مانسته یِ کلاسیک ـِ (2) رابطه یِ (3) است؟ از دو جنبه می‌شود به آن نگاه کرد. اول این که اگر فرض کنیم حد ـِ کلاسیک یعنی حد ی که حالت‌ها پیوسته می‌شوند، و اگر گذارها یِ بین ـِ دو حالت ـِ نزدیک‌به‌هم را بررسی کنیم، آن وقت رابطه یِ (3) همان رابطه یِ (2) است، که در آن $E_k = E_{n-\alpha}$ را نسبت به α بسط داده ایم. این صورت ی از اصل ـِ تناظر ـِ بُر [g] است. جنبه یِ دوم این است که برا یِ یک حرکت ـِ دوره‌ای، هر نوع تابش ی هم حتماً دوره‌ای (با همان دوره یِ حرکت) است. پس اگر بس‌آمد ـِ حرکت ν_n باشد، بس‌آمدها یِ تابش هم‌آهنگ‌ها یِ ν_n اند. رابطه‌ها یِ (2) و (3)، ضمناً راه ی برا یِ رفت‌وآمد بین ـِ مکانیک ـِ کلاسیک و کوانتم‌مکانیک پیش می‌نهند:

$$\alpha \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}n} Q \leftrightarrow Q_n - Q_{n-\alpha}. \tag{5}$$

حالا بر گردیم سراغ ـِ تعیین ـِ مانسته یِ کوانتمی یِ مثلاً $X(t)$. برا یِ این کار بسط ـِ فوریه [h] یِ آن را در نظر می‌گیریم. چون حرکت دوره‌ای است،

$$X_n(t) = \sum_\alpha X_{n;\alpha} \exp(-i\alpha\omega_n t). \tag{6}$$

در این‌جا n شاخص ـِ حالت (J) است. می‌توان گفت X با مجموعه یِ کمیت‌ها یِ

$$X_{n;\alpha} \exp(-i\alpha\omega_n t) \tag{7}$$

تعیین می‌شود. در مقاله یِ اصلی، به جا یِ $X_{n;\alpha}$ نماد ـِ $\mathfrak{A}_\alpha(n)$ به کار رفته است. دقت کنید که در این مجموعه همه یِ n ها وارد می‌شوند. بنابراین، این مجموعه خاص ـِ حالت ـِ

معین ی نیست، در واقع این مجموعه متناظر است با مشاهده‌پذیر ِ X نَه مقدار ِ X برا یِ یک حالت ِ خاص ِ سیستم.

حالا می‌شود مانسته یِ (7) در کوانتم‌مکانیک را تعیین کرد، و این اولین کار ِ کلیدی یِ هَیزِن‌بِرگ [a] در مقاله است. او به جا یِ بس‌آمد ِ کلاسیک ِ $\alpha\nu_n$ بس‌آمد ِ کوانتمی یِ $\nu_n - \nu_{n-\alpha}$، و به جا یِ کمیت ِ $X_{n;\alpha}$ در مکانیک ِ کلاسیک کمیت ِ X_{kn} را می‌گذارد؛ در مقاله یِ اصلی با نماد ِ $\mathfrak{A}(n, n-\alpha)$. این کمیت و آن بس‌آمد، متناظر اند با گذار از حالت ِ n به حالت ِ $k = n - \alpha$. پس مانسته یِ (7) در کوانتم‌مکانیک می‌شود

$$X_{kn} \exp[-i(\omega_n - \omega_k)t]. \tag{8}$$

این شکل باید برا یِ آن‌ها یی که کوانتم‌مکانیک در تصویر ِ هَیزِن‌بِرگ [a] را دیده اند، کاملاً آشنا باشد. در واقع این چیز ی نیست مگر عنصر ِ ماتریسی یِ عمل‌گر ِ مکان در تصویر ِ هَیزِن‌بِرگ [a]، در پایه یِ انرژی:

$$X_{kn} \exp[-i(\omega_n - \omega_k)t] = \langle k| \exp\left(-\frac{tH}{i\hbar}\right) X \exp\left(\frac{tH}{i\hbar}\right) |n\rangle. \tag{9}$$

در این‌جا H عمل‌گر ِ همیلتنی است. البته توجه دارید که در تابستان ِ 1925 هیچ کس (حتا خود ِ هَیزِن‌بِرگ [a]) کوانتم‌مکانیک در تصویر ِ هَیزِن‌بِرگ [a] را بلد نبود. (و البته کس ی کوانتم‌مکانیک در تصویر ِ شْرُدینگِر [i] را هم بلد نبود.)

یک نکته یِ دیگر هم وجود دارد، که به حقیقی‌بودن ِ مکان مربوط است. شرط ِ این که طرف ِ چپ ِ (6) حقیقی باشد، آن است که $X_{n;\alpha}$ مزدوجِ مختلط ِ $X_{n;-\alpha}$ باشد. در واقع این شرط هم‌ارز است با این که کمیت‌ها یِ (7)، دوبه‌دو مزدوجِ مختلط ِ هم باشند. اعمال ِ شرط ِ مشابه ی بر (8)، نتیجه می‌دهد

$$X_{kn} = {X_{nk}}^*. \tag{10}$$

اما این هم برای آن‌ها یی که کوانتم‌مکانیک می‌دانند آشنا است. این یعنی ماتریس ِ X اِرمیتی است.

برا یِ تکمیل ِ نمایش ِ مشاهده‌پذیرها در کوانتم‌مکانیک، باید راه ی برا یِ نمایش ِ حاصلِ‌ضرب ِ دو مشاهده‌پذیر هم پیدا می‌شد. (نمایش ِ مجموع یک راه ِ طبیعی دارد و آن استفاده از مجموع ِ عبارت‌ها یِ نوع ِ (7) یا (8) است.) برا یِ حاصلِ‌ضرب، دوباره به تبدیل ِ فوریه [h] رو می‌آوریم. دو کمیت ِ $X(t)$ و $Y(t)$ را در نظر بگیرید. روشن است

که اگر این‌دو بسط‌ها یی مثل ِ (6) داشته باشند، آن‌گاه

$$X_n(t)Y_n(t) = \sum_{\alpha}\sum_{\beta} X_{n;\alpha-\beta}\exp[-i(\alpha-\beta)\omega_n t]Y_{n;\beta}\exp(-i\beta\omega_n t). \qquad (11)$$

پس XY را می‌شود با

$$(XY)_{n;\alpha}\exp(-i\alpha\omega_n t) := \sum_{\beta} X_{n;\alpha-\beta}\exp[-i(\alpha-\beta)\omega_n t]Y_{n;\beta}\exp(-i\beta\omega_n t) \quad (12)$$

نمایش داد. در این نمایش، در واقع عبارت‌ها یِ نمایش‌دهنده یِ X و Y را در هم ضرب کرده ایم و آن‌ها یی که بس‌آمد ِشان $\alpha\omega_n$ است را با هم جمع کرده ایم. همین کار را برا یِ کوانتم‌مکانیک انجام دهیم. $(XY)_{kn}$ باید از عنصرها یی ساخته شود که بس‌آمد ِشان $(\omega_n - \omega_k)$ است. اما

$$\omega_n - \omega_k = (\omega_n - \omega_p) + (\omega_p - \omega_k). \qquad (13)$$

پس می‌شود مانسته یِ (11) در کوانتم‌مکانیک را چنین نوشت.

$$(XY)_{kn}\exp[-i(\omega_n - \omega_k)t] := \sum_{p} X_{kp}\exp[-i(\omega_p - \omega_k)t]Y_{pn}\exp[-i(\omega_n - \omega_p)t]. \qquad (14)$$

ظاهراً کار تمام است، جز یک نکته یِ ظریف: بس‌آمد ِ $(\omega_n - \omega_p)$ را به Y مربوط کرده ایم و بس‌آمد ِ $(\omega_p - \omega_k)$ را به X. اگر نقش ِ Y و X را عوض می‌کردیم چه می‌شد؟ هیچ، جز این که نتیجه یِ متفاوت ی به دست می‌آمد. ظاهراً یک $(XY)_{kn}$ داریم و یک $(YX)_{kn}$، که با هم فرق دارند! در مکانیک ِ کلاسیک چنین نبود. اما یک بار ِ دیگر به رابطه یِ (14) نگاه کنید. این چیز ی نیست جز این که عنصر ِ ماتریسی یِ (XY) در واقع عنصر ِ ماتریسی یِ حاصلِ‌ضرب ِ ماتریس ِ X در ماتریس ِ Y است. هَیزِن‌بِرگ [a] جبر ِ ماتریس‌ها را نمی‌دانست و این برا یَش عجیب بود. اما این چیز ی نبود که فرض شده باشد؛ بر اساس ِ ملاحظه‌ها یی به دست آمده بود که ظاهراً هیچ ربط ی به ماتریس و موجودات ِ جابه‌جانشونده نداشتند. ماتریس و جبر ِ ماتریسی، بدون ِ دعوت وارد ِ کوانتم‌مکانیک شده بود. هَیزِن‌بِرگ [a] در آخرین پاراگراف‌ها یِ بخش ِ 2 در مقاله اَش به این موضوع (جابه‌جانشدن ِ مشاهده‌پذیرها) اشاره می‌کند، برا یِ موارد ی دستورالعمل‌ها یی می‌دهد، و سپس از آن می‌گذرد، چون در بقیه یِ مقاله مستقیماً به جابه‌جانشونده‌ها کار ی ندارد.

به زبان ِ ام‌روزی، آن چه تا این‌جا به دست آمده (در واقع پیش‌نهاد شده) این است که هر مشاهده‌پذیر را باید با یک ماتریس نمایش داد. به همین خاطر بعداً به این نظریه مکانیک ِ ماتریسی گفتند.

2 دینامیک

بر خلاف ِ آن چه از عنوان ِ این بخش بر می‌آید، این‌جا پرسش ِ اصلی مستقیماً به‌دست‌آوردن ِ معادله یِ تحول نیست. هدف به‌دست‌آوردن ِ نوع ی رابطه یِ کوانتش است که جا یِ رابطه‌هایِ‌کوانتش ِ قدیمی یِ بُر [g]ـ زُمِرفِلد [j] را بگیرد. نقطه یِ شروع ِ هَیزِن‌بِرگ [a] برا یِ دینامیک، رابطه یِ (4) است (همان رابطه یِ قدیمی یِ بُر [g]ـ زُمِرفِلد [j])، که البته در نظریه یِ قدیمی (یا شبهِ‌کلاسیک) به کار می‌رود. متغیر ِ کنش عبارت است از

$$J = \oint p \, \mathrm{d}q, \tag{15}$$

که در آن q متغیر ِ مکان، و p تکانه یِ مزدوج ِ آن است، و انتگرال‌گیری رو یِ یک دوره یِ حرکت انجام می‌شود. حالا به جا یِ q همان $X(t)$ در رابطه یِ (6)، و به جا یِ p هم $m\dot{X}$ می‌گذاریم. (m جرم ِ ذره است.) نتیجه می‌شود

$$J = 2\pi m \sum_{\alpha} \alpha^2 \omega_n |X_{n;\alpha}|^2. \tag{16}$$

در کوانتم‌مکانیک ِ قدیمی، طرف ِ چپ را برابر ِ nh (با n برابر ِ یک عدد ِ صحیح) می‌گرفتند و این شرط ِ کوانتش بود. هَیزِن‌بِرگ [a] می‌گوید این شرط طبیعی نیست، چون حتا بر اساس ِ اصل ِ تناظر هم لزوم ی ندارد J مضرب ِ درست ی از h باشد، کافی است تفاضل ِ مقدارها یِ مجاز ِ متغیر ِ کنش مضرب ِ درست ی از h باشد، یا

$$J_n = (n + a)h. \tag{17}$$

آن‌ها یی که با تقریب ِ WKB آشنا هستند، می‌دانند در خیل ی از موارد مقدار ِ ثابت ِ a در واقع برابر است با $1/2$. هَیزِن‌بِرگ [a] برا یِ خلاص‌شدن از این ثابت ِ نامعلوم، از رابطه یِ (16) نسبت به n مشتق می‌گیرد. (توجه دارید که اگر n عدد ِ صحیح ی باشد،

نمی‌شود نسبت به آن مشتق گرفت. هَیزِن‌بِرگ [a] اول در قالب ِ نظریه یِ شبهِ‌کلاسیک مشتق می‌گیرد، بعد مانسته یِ کوانتمی را می‌نویسد و n را صحیح می‌گیرد.) نتیجه می‌شود

$$h = 2\pi m \sum_\alpha \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}n}(\alpha^2 \omega_n |X_{n;\alpha}|^2). \tag{18}$$

البته در مقاله یِ اصلی، شکل ِ

$$h = 2\pi m \sum_\alpha \alpha \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}n}(\alpha \omega_n |X_{n;\alpha}|^2) \tag{19}$$

به کار رفته است. علت ِ آن هم روشن است. قرار است از نسخه یِ (5) و تناظر ِ (2) با (3) استفاده شود. در واقع یک مزیت ِ این عبارت به رابطه یِ (4) هم همین است که برا یِ رابطه یِ (19) به‌ساده‌گی می‌شود مانسته یِ کوانتمی به دست آورد.

استفاده از این تناظرها مقدار ی ظرافت لازم دارد. با استفاده از این‌ها، هَیزِن‌بِرگ [a] شکل ِ کوانتمی یِ رابطه یِ بالا را چنین می‌نویسد.

$$h = 2\pi m \sum_\alpha (\omega_{n,n+\alpha}|X_{n,n+\alpha}|^2 - \omega_{n-\alpha,n}|X_{n-\alpha,n}|^2). \tag{20}$$

ظرافت ی که از آن صحبت شد در این است که وقت ی دیفرانسیل را به تفاضل ِ محدود تبدیل می‌کنیم، امکان‌ها یِ مختلف ی داریم؛ می‌شود تفاضل ِ پیش‌رو گرفت، تفاضل ِ پس‌رو گرفت، یا تفاضل ِ متقارن. از رابطه یِ (10)، ضمناً معلوم است که با تبدیل ِ α به $-\alpha$، جمله یِ اول ِ درون ِ کروشه یِ بالا به جمله یِ دوم (با علامت ِ منفی یَش) تبدیل می‌شود. بنابراین در عبارت ِ بالا می‌شود فقط رو یِ α ها یِ مثبت جمع زد و نتیجه را دوبرابر کرد:

$$h = 4\pi m \sum_{\alpha>0} (\omega_{n,n+\alpha}|X_{n,n+\alpha}|^2 - \omega_{n-\alpha,n}|X_{n-\alpha,n}|^2). \tag{21}$$

این در واقع همان رابطه یِ (16) در مقاله یِ اصلی است، جز این که چون هَیزِن‌بِرگ [a] بس‌آمدها را مثبت می‌گیرد، شاخص‌ها یِ ω در جمله یِ دوم جابه‌جا هستند.

این رابطه هم که با تعمیم و حدس و $\cdots$ به دست آمد، در واقع یک رابطه یِ دقیق ِ کوانتمی است. برا یِ این که این را به‌تر ببینید، از همان شکل ِ (20) استفاده کنیم و آن را چنین بنویسیم.

$$h = 2\pi m \sum_k (\omega_{nk}|X_{nk}|^2 - \omega_{kn}|X_{kn}|^2). \tag{22}$$

برا یِ به‌دست‌آوردن ِ این رابطه با کوانتم‌مکانیک ِ جدید، کافی است عبارت ِ $\langle n|[X,[X,H]]|n\rangle$ را به دو طریق حساب کنیم. یک ی با استفاده از

$$[X,[X,H]] = \frac{i\hbar}{m}[X,P] = \frac{(i\hbar)^2}{m}, \tag{23}$$

و یک ی با گنجاندن ِ

$$1 = \sum_k |k\rangle\langle k| \tag{24}$$

بین ِ عامل‌ها یِ X و $[X,H]$، و استفاده از

$$\langle k|[X,H]|n\rangle = (E_n - E_k)X_{kn}. \tag{25}$$

هَیزن‌بِرگ [a] به این رابطه یِ دینامیکی یک شرط ِ مرزی هم می‌افزاید، و آن این که اگر حالت ِ (یا تراز ِ) n_0 حالت ِ پایه باشد، آن‌گاه دامنه یِ گذار از آن به حالت‌ها یِ $n_0 - \alpha$ (با $\alpha > 0$) صفر است، چون این حالت‌ها یِ اخیر در واقع وجود ندارند.

3 مثال ِ نوسان‌گر ِ هم‌آهنگ

هَیزن‌بِرگ [a] در واقع خود َش را به نوسان‌گر ِ هم‌آهنگ محدود نمی‌کند؛ نوسان‌گرها یِ ناهم‌آهنگ را هم بررسی می‌کند، البته به طور ِ اختلالی، و سراغ ِ مسئله یِ چرخنده هم می‌رود. اما برای ساده‌شدن ِ بحث، فقط نوسان‌گر ِ هم‌آهنگ را در نظر می‌گیریم. از معادله‌یِ حرکت ِ

$$\ddot{X} + \omega^2 X = 0 \tag{26}$$

نتیجه می‌شود

$$X_n(t) = A\exp(-i\omega t) + A^* \exp(i\omega t). \tag{27}$$

دیده می‌شود در این حالت فقط یک بس‌آمد در X وجود دارد. یعنی فقط $X_{n;\pm 1}$ مخالف ِ صفر است. ترجمه یِ این به زبان ِ کوانتمی یعنی فقط $X_{n\mp 1,n}$ مخالف ِ صفر است.

معادله یِ (26) برا یِ عنصرها یِ ماتریسی یِ X در کوانتم‌مکانیک هم برقرار است. پس معلوم می‌شود بس‌آمد ِ آن‌ها هم $\pm\omega$ است. یعنی مشاهده‌پذیرها عبارت اند از

$$X_{n\mp 1,n}\exp(\mp i\omega t). \tag{28}$$

حالا این‌ها را در رابطه یِ (21) می‌گذاریم. فقط یک جمله از این سری غیرِصفر است، جمله یِ $\alpha = 1$. نتیجه می‌شود

$$|X_{n,n+1}|^2 - |X_{n-1,n}|^2 = \frac{\hbar}{2m\omega}. \tag{29}$$

با این رابطه یِ بازگشتی، عنصرها یِ ماتریسی به‌ساده‌گی به‌دست می آیند:

$$|X_{n-1,n}|^2 = \frac{(n+a)\hbar}{2m\omega}, \tag{30}$$

که در آن a یک ثابت ِ نامعلوم است. این ثابت از این‌جا به دست می آید که

$$X_{n_0-1,n_0} = 0. \tag{31}$$

که در آن حالت ِ n_0 حالت ِ پایه است. اگر قرارداد کنیم $n_0 = 0$، معلوم می‌شود ثابت ِ a در (30) برابر ِ صفر است. پس

$$|X_{n-1,n}|^2 = \frac{n\hbar}{2m\omega}. \tag{32}$$

این رابطه برا یِ آن‌ها یی که مسئله یِ نوسان‌گر ِ هم‌آهنگ در کوانتم‌مکانیک را دیده اند، کاملاً آشنا است. اما از این‌جا ضمناً می‌شود عنصرها یِ ماتریسی یِ انرژی (همیلتنی) را هم به دست آورد. داریم

$$\begin{aligned} H_{kn} &= \frac{m}{2}\sum_p \dot{X}_{kp}\dot{X}_{pn} + \frac{m\omega^2}{2}\sum_p X_{kp}A_{pn}, \\ &= \frac{m}{2}\sum_p (\omega^2 - \omega_{kp}\omega_{pn})X_{kp}X_{pn}. \end{aligned} \tag{33}$$

حالا توجه کنید که $X_{kp} = 0$، مگر آن که $|k-p| = 1$. از این‌جا نتیجه می‌شود $H_{kn} = 0$، مگر این که $k = n$، یا $|k-n| = 2$. اما در حالت ِ اخیر، تنها به ازای $p = (k+n)/2$ است که X_{kp} و X_{pn} هر دو غیرِصفر اند، و در این صورت $\omega_{mp}\omega_{pn} = \omega^2$، و این نتیجه می‌دهد در این حالت هم $H_{kn} = 0$. پس فقط جمله‌ها یِ قطری یِ ماتریس ِ H غیرِصفر اند. برا یِ این‌ها،

$$H_{nn} = m\omega^2(X_{n,n+1}X_{n+1,n} + X_{n,n-1}X_{n-1,n}),$$
$$= m\omega^2(|X_{n,n+1}|^2 + |X_{n-1,n}|^2), \quad (34)$$

یا با استفاده از (32)،

$$H_{kn} = \left(n + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega\delta_{kn}. \quad (35)$$

این دقیقاً همان چیز ی است که از کوانتم‌مکانیک ِ جدید می آید. انتظار می‌رود انرژی در پایه یِ انرژی قطری باشد، این چیز ی است که به زبان ِ هَیزِن‌بِرگ [a] می‌شود صفرشدن ِ جمله‌ها یِ وابسته‌به‌زمان، یا پایسته‌گی یِ انرژی. توجه دارید که در کوانتم‌مکانیک ِ جدید هم، ماتریس ِ متناظر با انرژی، در تصویر ِ هَیزِن‌بِرگ [a] هم به زمان بسته‌گی ندارد. عنصرها یِ قطری یِ ماتریس انرژی‌ها یِ ترازها هستند:

$$E_n = \left(n + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega, \quad (36)$$

و توجه کنید که انرژی یِ حالتِ‌صفر هم درست به دست آمده است.

4 تولد ِ کوانتم‌مکانیک ِ جدید

چه قدر از کوانتم‌مکانیک ِ جدید در این مقاله هَیزِن‌بِرگ [a] وجود دارد؟ این که مشاهده‌پذیرها با ماتریس‌ها (یا عمل‌گرها) یِ اِرمیتی نمایانده می‌شوند، در این مقاله آمده است. این که مشاهده در کوانتم‌مکانیک یعنی چه، هیچ صحبت ی از آن نیست. در مورد ِ دینامیک هم راه ِ شسته‌رفته ای پیش‌نهاد نشده. رابطه یِ (22) یک رابطه یِ دقیق ِ کوانتمی است، اما هنوز هیچ نشانه ای از تحول ِ زمانی با استفاده از همیلتنی (معادله یِ هَیزِن‌بِرگ [a]) دیده نمی‌شود. با این وجود، همین که مشاهده‌پذیرها ماتریس شدند و به جا یِ رابطه یِ بین ِ کمیت‌ها یِ عددی رابطه یِ بین ِ کمیت‌ها یِ ماتریسی نوشته شد، راه ی باز کرد که تکلیف ِ کوانتم‌مکانیک را طی ِ فقط چند ماه پس از آن روشن کرد.

5 مرجع‌ها و یادداشت‌ها

[1] W. Heisenberg; Zeitschrift für Physik **33** (1925) 879–893

[۲] وِرنِر هَیزِن‌بِرگ؛ گاما، ۲ (بهار ـِ ۱۳۸۳) ۲۵ تا ۴۰

[۳] در سراسر ـِ این متن، منظور از کوانتم‌مکانیک ـِ جدید همان کوانتم‌مکانیک ـِ پس از 1925 است. منظور از کوانتم‌مکانیک ـِ قدیمی هم مجموعه یِ قاعده‌ها یی است که پیش از این تاریخ وجود داشت و برا یِ توصیف ـِ بعض ی از سیستم‌ها به کار می‌رفت، از جمله قاعده‌هایِ کوانتش ـِ بُر [g]ـ زُمِرفِلد [j].

6 اسم‌ها یِ خاص

[a] Werner Heisenberg

[b] Göttingen

[c] Max Born

[d] Pascual Jordan

[e] Newton

[f] Planck

[g] Bohr

[h] Fourier

[i] Schrödinger

[j] Sommerfeld