X1-012 (2002/10/04)

چندقطبیها یِ مغناطیسی در مغناطُستاتیک

محمد خرمی mamwad@mailaps.org

با بررسی یِ ساختار ِ میدانها یِ مغناطیسی یِ ایستا دور از چشمه‌ها یِ جایگزیده، چندقطبیها یِ مغناطیسی معرفی و به جریانها یِ سازنده یِ میدان ِ مغناطیسی مربوط میشوند.

0 درامد

چندقطبیها یِ الکتریکی در خیل ی از کتابها یِ درسی یِ الکترُمغناطیس بررسی شده اند، از جمله در [1] و [2]. اما در خیل ی از کتابها، در بحث ِ مغناطُستاتیک از فقط دُقطبی یِ مغناطیسی اسم میبرند. در بعض ی از کتابها (مثلَن [1]) چندقطبیها یِ مغناطیسی را بررسی میکنند، اما فقط در بحث ِ تابش، که میدانها و چشمه‌ها وابسته-به-زمان ند. بررسی یِ چندقطبیها یِ وابسته-به-زمان دشوارتر است. این‌جا میخواهم چندقطبیها یِ مغناطیسی یِ ناشی از چشمه‌ها یِ مستقل-از-زمان را بررسی کنم. در سراسر ِ این متن، چشمه‌ها و میدانها را مستقل از زمان میگیرم. ضمنَن برا یِ ساده‌گی در واحدها یی کار میکنم که μ_0 (تراوایی یِ خلئ) یک است.

1 میدان ِ مغناطیسی دور از چشمه‌ها یِ جایگزیده

تُزیع- ِ-جریان ی را در نظر بگیرید که در $r > R$ صفر باشد. (r, θ, ϕ) مختصات ِ کروی اند، و جهت ِ (θ, ϕ) را با $\hat{\boldsymbol{r}}$ نشان می‌دهم. $\boldsymbol{B}$ (میدان ِ مغناطیسی یِ این تُزیع- ِ-جریان)

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{B} = 0, \tag{1}$$

و

$$\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{B} = 0, \qquad r > R, \tag{2}$$

را بر میآورَد. ناحیه یِ $r > R$ ساده-همبند است. بنابراین از (2) نتیجه میشود میدان ِ مغناطیسی گرادیان ِ یک پتانسیل ِ اسکالر است:

$$\boldsymbol{B} = -\boldsymbol{\nabla}\phi. \tag{3}$$

به ϕ پتانسیل ِ (اسکالر ِ) مغناطیسی میگوییم. از (3) و (1) نتیجه میشود پتانسیل ِ مغناطیسی معادله یِ لَپلَس [3] را بر میآورَد:

$$\boldsymbol{\nabla}^2\phi = 0, \qquad r > R. \tag{4}$$

نتیجه یِ این معادله

$$\phi(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{4\pi}\sum_{l=0}^{\infty}\frac{\phi_l(\hat{\boldsymbol{r}})}{r^{l+1}}, \qquad r > R, \tag{5}$$

است، که

$$\boldsymbol{L} \cdot \boldsymbol{L}\,\phi_l = -l(l+1)\phi_l, \tag{6}$$

و

$$\boldsymbol{L} = \boldsymbol{r} \times (-\boldsymbol{\nabla}), \tag{7}$$

که نتیجه میدهد

$$\boldsymbol{L} \cdot \boldsymbol{L} = \frac{1}{\sin\theta}\,\frac{\partial}{\partial\theta}\,\sin\theta\,\frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{1}{\sin^2\theta}\,\frac{\partial^2}{\partial\phi^2}. \tag{8}$$

از (6) نتیجه میشود

$$\phi_l(\hat{\boldsymbol{r}}) = \sum_{m=-l}^{l} q_{lm}\,\mathrm{Y}_{lm}(\hat{\boldsymbol{r}}), \tag{9}$$

که $\mathrm{Y}_{l\,m}$ ها هماهنگ ِ کروی (فصل ِ 3 از [2])، و $q_{l\,m}$ ها ثابت اند. به $q_{l\,m}$ ها چندقطبیها ی ِ مغناطیسی میگویند: $l=0$ تکقطبی، $l=1$ دُقطبی، $l=2$ چهارقطبی، و .... (3)، (5)، و (9)، کاملَن شبیه ِ مانستهها ی ِ الکتریکی یِشان ند. بنابراین ساختار ِ میدانها ی ِ مغناطیسی دور از چشمهها، کاملَن شبیه ِ ساختار ِ میدانها ی ِ الکتریکی دور از چشمهها است. تنها یک تفاوت هست: (1) در کل ِ فضا برقرار است، پس

$$
\begin{aligned}
q_{0\,0} &= \sqrt{4\,\pi}\,\oint_{r=R'>R} \mathrm{d}S\,\hat{\boldsymbol{r}}\cdot\boldsymbol{B},\\
&= \sqrt{4\,\pi}\,\int_{r<R'} \mathrm{d}V\,\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{B},\\
&= 0, \qquad (10)
\end{aligned}
$$

یعنی تکقطبی ی ِ مغناطیسی صفر است (تکقطبی ی ِ مغناطیسی نداریم).

2 چندقطبیها ی ِ مغناطیسی بر حسب ِ تُزیع- ِ-جریان

در بخش ِ قبل، ساختار ِ کلی ی ِ میدان ِ مغناطیسی دور از چشمه بررسی شد. معادلهها ی ِ میدانها ی ِ الکتریکی و مغناطیسی، بیرون ِ چشمه یکسان ند. به همین علت هم ساختار ِ این میدانها دور از چشمه شبیه به هم است. تنهاتفاوت آن است که تکقطبی ی ِ مغناطیسی نداریم، در حال ی که تکقطبی ی ِ الکتریکی داریم. اما معادلهها ی ِ میدانها ی ِ الکتریکی و مغناطیسی، در حضور ِ چشمه با هم فرق دارند: خود ِ چشمهها هم فرق دارند. چشمه ی ِ میدان ِ الکتریکی بار است، در حال ی که چشمه ی ِ میدان ِ مغناطیسی جریان است؛ چشمه ی ِ میدان ِ الکتریکی دیورژانس ِ این میدان را ناصفر میکند، در حال ی که چشمه ی ِ میدان ِ مغناطیسی کِرل ِ آن را ناصفر میکند. چندقطبیها ی ِ الکتریکی بر حسب ِ تُزیع- ِ-بار میشوند

$$
q^{\mathrm{E}}_{l\,m} = \frac{4\,\pi}{2l+1}\int \mathrm{d}V\, r^l\,\mathrm{Y}^*_{l\,m}(\hat{\boldsymbol{r}})\,\rho(\boldsymbol{r}), \qquad (11)
$$

(فصل ِ 4 از 2)، که ρ چگالی ی ِ بار است.

برا ی ِ به-دست-آوردن ِ چندقطبیها ی ِ مغناطیسی، رابطه ی ِ پتانسیل ِ برداری ی ِ مغناطیسی با جریان را به کار میبرم. با استفاده از (1)، پتانسیل ِ برداری ی ِ $\boldsymbol{A}$ به شکل ِ

$$
\boldsymbol{B} = \boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{A} \qquad (12)
$$

تعریف میشود. این تعریف، $\boldsymbol{A}$ را به طرِ یکتا از رو یِ $\boldsymbol{B}$ تعیین نمیکند. به $\boldsymbol{A}$ می‌شود گرادیانِ هر میدانِ اسکالر ی را افزود (تبدیلِ پیمانه‌ای)، و با این کار $\boldsymbol{B}$ تغییر نمیکند (فصلِ 5 از [2]). با استفاده از

$$\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{B}=\boldsymbol{J}, \tag{13}$$

و نیز (12)، نتیجه میشود

$$-\boldsymbol{\nabla}^2\,\boldsymbol{A}+\boldsymbol{\nabla}\,\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{A}=\boldsymbol{J}. \tag{14}$$

این معادله $\boldsymbol{A}$ را به طورِ یکتا از رو یِ $\boldsymbol{J}$ تعیین نمیکند. اما با اثردادنِ $\boldsymbol{L}$ از چپ بر دُطرفِ این رابطه،

$$\boldsymbol{\nabla}^2\,(\boldsymbol{L}\cdot\boldsymbol{A})=-\boldsymbol{L}\cdot\boldsymbol{J} \tag{15}$$

نتیجه میشود. از این استفاده شده که $\boldsymbol{L}$ با لَپلَسی جابه‌جا میشود، و این که

$$\boldsymbol{L}\cdot\boldsymbol{\nabla}=0. \tag{16}$$

برخلافِ خُدِ پتانسیلِ برداری، $(\boldsymbol{L}\cdot\boldsymbol{A})$ در اثرِ تبدیلِ پیمانه‌ای تغییر نمیکند. این هم نتیجه یِ (16) است. در واقع (15) یک معادله یِ پُوَسُن [4] برا یِ $(\boldsymbol{L}\cdot\boldsymbol{A})$ است، با چشمه یِ $(\boldsymbol{L}\cdot\boldsymbol{J})$. پس (با اعمالِ شرطِ مرزی یِ مناسب، مثلَن صفرشدن در بی‌نهایت) $(\boldsymbol{L}\cdot\boldsymbol{A})$ را میشود به طُرِ یکتا از رو یِ $(\boldsymbol{L}\cdot\boldsymbol{J})$ تعیین کرد. ضمنَن از (12) نتیجه میشود

$$\boldsymbol{L}\cdot\boldsymbol{A}=-\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{B}, \tag{17}$$

که این هم نشان میدهد $(\boldsymbol{L}\cdot\boldsymbol{A})$ با تبدیلِ پیمانه‌ای تغییر نمیکند.

با استفاده از (15) و (17)، نتیجه میشود

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{B})(\boldsymbol{r})&=-(\boldsymbol{L}\cdot\boldsymbol{A})(\boldsymbol{r}),\\ &=\frac{1}{4\,\pi}\,\sum_{l=0}^{\infty}\frac{C_l(\hat{\boldsymbol{r}})}{r^{l+1}},\qquad r>R,\end{aligned} \tag{18}$$

که

$$C_l(\hat{\boldsymbol{r}})=\sum_{m=-l}^{l}q'_{l\,m}\,\mathrm{Y}_{l\,m}(\hat{\boldsymbol{r}}), \tag{19}$$

و

$$q'_{l\,m}=\frac{4\,\pi}{2l+1}\,\int \mathrm{d}V\,r^l\,\mathrm{Y}^*_{l\,m}(\hat{\boldsymbol{r}})\,(-\boldsymbol{L}\cdot\boldsymbol{J})(\boldsymbol{r}). \tag{20}$$

با استفاده از

$$\begin{aligned} q'_{0\,0} &= \sqrt{4\,\pi}\int \mathrm{d}V\,(\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{\nabla})\cdot\boldsymbol{J},\\ &= \sqrt{4\,\pi}\int \mathrm{d}V\,(\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{r})\cdot\boldsymbol{J},\\ &= 0, \end{aligned} \tag{21}$$

نتیجه میشود

$$C_0 = 0, \tag{22}$$

و جمعبندی یِ (18) در واقع از $l = 1$ شروع میشود. برا یِ رسیدن به (21)، از انتگرالگیری یِ جزیئ-به-جزئ استفاده شده، و این که چشمه جایگزیده است.

با استفاده از (3) و (5)، نتیجه میشود

$$(\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{B})(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{4\,\pi}\sum_{l=0}^{\infty}\frac{(l+1)\,\phi_l(\hat{\boldsymbol{r}})}{r^{l+1}}, \qquad r > R, \tag{23}$$

و از مقایسه یِ این با (18)،

$$C_l(\hat{\boldsymbol{r}}) = (l+1)\,\phi_l(\hat{\boldsymbol{r}}), \tag{24}$$

یا

$$q'_{l\,m} = (l+1)\,q_{l\,m}. \tag{25}$$

پس چندقطبیها یِ مغناطیسی بر حسب ِ جریان میشوند

$$q_{l\,m} = \frac{4\,\pi}{(l+1)\,(2l+1)}\int \mathrm{d}V\,r^l\,\mathrm{Y}^*_{l\,m}(\hat{\boldsymbol{r}})\,(-\boldsymbol{L}\cdot\boldsymbol{J})(\boldsymbol{r}), \tag{26}$$

و البته $q_{0\,0}$ صفر است، یعنی تکقطبی یِ مغناطیسی نداریم.

3 پتانسیل ِ برداری و چندقطبیها یِ مغناطیسی

معلوم شد (14) برا یِ $\boldsymbol{A}$ جواب ِ یکتا ندارد. اما با تبدیل ِ پیمانه‌ای یِ مناسب ی میشود دیورژانس ِ $\boldsymbol{A}$ را صفر کرد (انتخاب ِ پیمانه یِ کولُن [5]). در این صورت (14) به

$$\boldsymbol{\nabla}^2\boldsymbol{A} = -\boldsymbol{J} \tag{27}$$

تبدیل میشود، که (با شرط ِ مرزی یِ مناسب) برا یِ $\boldsymbol{A}$ جواب ِ یکتا دارد. به ویژه

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{4\pi}\sum_{l=1}^{\infty}\frac{\boldsymbol{A}_l(\hat{\boldsymbol{r}})}{r^{l+1}}, \qquad r > R, \tag{28}$$

که از آن نتیجه میشود

$$(\boldsymbol{L}\cdot\boldsymbol{A})(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{4\pi}\sum_{l=1}^{\infty}\frac{(\boldsymbol{L}\cdot\boldsymbol{A}_l)(\hat{\boldsymbol{r}})}{r^{l+1}}, \qquad r > R. \tag{29}$$

از مقایسه یِ این با (18) و (24) نتیجه میشود

$$(\boldsymbol{L}\cdot\boldsymbol{A}_l)(\hat{\boldsymbol{r}}) = -(l+1)\phi_l(\hat{\boldsymbol{r}}). \tag{30}$$

یک نهاده برا یِ $\boldsymbol{A}_l$، اثر ِ $\boldsymbol{L}$ رو یِ یک اسکالر است:

$$\boldsymbol{A}_l^0(\hat{\boldsymbol{r}}) = (\boldsymbol{L}\,a_l)(\hat{\boldsymbol{r}}). \tag{31}$$

با جاگذاری یِ این نهاده در (30)، نتیجه میشود

$$\begin{aligned}(l+1)\phi_l &= -\boldsymbol{L}\cdot\boldsymbol{L}\,a_l,\\ &= l\,(l+1)a_l,\end{aligned} \tag{32}$$

و از آنجا،

$$a_l = \frac{1}{l}\,\phi_l, \tag{33}$$

یا

$$\boldsymbol{A}_l^0 = \frac{1}{l}\,\boldsymbol{L}\,\phi_l. \tag{34}$$

از اینجا،

$$\begin{aligned}\boldsymbol{A}^0(\boldsymbol{r}) &= \frac{1}{4\,\pi}\sum_{l=1}^{\infty}\frac{(\boldsymbol{L}\,\phi_l)(\hat{\boldsymbol{r}})}{l\,r^{l+1}}, \qquad r > R,\\ &= \boldsymbol{L}\left[\frac{1}{4\,\pi}\sum_{l=1}^{\infty}\frac{\phi_l(\hat{\boldsymbol{r}})}{l\,r^{l+1}}\right], \qquad r > R.\end{aligned} \tag{35}$$

از

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{L} = 0, \tag{36}$$

نتیجه میشود

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{A}^0 = 0. \tag{37}$$

از

$$\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{L}=2\,\boldsymbol{\nabla}-\boldsymbol{r}\,\boldsymbol{\nabla}^2+\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{\nabla}\,\boldsymbol{\nabla} \tag{38}$$

هم نتیجه میشود

$$\begin{aligned}
(\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{A}^0)(\boldsymbol{r})&=(2\,\boldsymbol{\nabla}-\boldsymbol{r}\,\boldsymbol{\nabla}^2+\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{\nabla}\,\boldsymbol{\nabla})\,\left[\frac{1}{4\,\pi}\,\sum_{l=1}^{\infty}\frac{\phi_l(\hat{\boldsymbol{r}})}{l\,r^{l+1}}\right],\\
&=\left[\frac{1}{4\,\pi}\,\sum_{l=1}^{\infty}(2\,\boldsymbol{\nabla}+\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{\nabla}\,\boldsymbol{\nabla})\,\frac{\phi_l(\hat{\boldsymbol{r}})}{l\,r^{l+1}}\right],\\
&=\left\{\frac{1}{4\,\pi}\,\sum_{l=1}^{\infty}[2\,\boldsymbol{\nabla}-(l+2)\,\boldsymbol{\nabla}]\,\frac{\phi_l(\hat{\boldsymbol{r}})}{l\,r^{l+1}}\right\},\\
&=-\boldsymbol{\nabla}\,\left[\frac{1}{4\,\pi}\,\sum_{l=1}^{\infty}\frac{\phi_l(\hat{\boldsymbol{r}})}{r^{l+1}}\right],\\
&=\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}),\qquad r>R.
\end{aligned}\tag{39}$$

در تساوی یِ دوم از این استفاده شده که لَپلَسی یِ تکتک ِ جمله‌ها یِ سری صفر است.

بنابراین تفاضل ِ $\boldsymbol{A}$ و $\boldsymbol{A}^0$، میدان ی است که دیورژانس ِ آن صفر است، و کرل ِ آن هم در $r>R$ صفر است. چنین‌میدان ی، در $r>R$ گرادیان ِ یک میدان ِ اسکالر است که لَپلَسی یِ این میدان ِ اسکالر، در $r>R$ صفر است. پس

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})=\boldsymbol{A}^0(\boldsymbol{r})-\boldsymbol{\nabla}\,\left[\sum_{l=1}^{\infty}\frac{D_l(\hat{\boldsymbol{r}})}{r^{l+1}}\right], \tag{40}$$

که

$$\boldsymbol{L}\cdot\boldsymbol{L}\,D_l=-l\,(l+1)\,D_l. \tag{41}$$

4 پانوشتها

[1] John R. Reitz, Frederick J. Milford, Robert W. Christy; "Foundations of electromagnetic theory", (Addison-Wesley, 1979)

[2] John David Jackson; "Classical electrodynamics", 3rd edition (John Wiley & Sons, 1998)

[3] Laplace

[4] Poisson

[5] Coulomb