X1-013 (2002/12/08)

چرخش ِ جسم ِ صلب، و فرمول‌بندی یِ فضایِ‌فاز

محمد خرمی mamwad@mailaps.org

جبر ِ مشاهده‌پذیرها یِ یک جسم ِ صلب در چارچوب ِ فضا و چارچوب ِ جسم بررسی می‌شود. با استفاده از آن دینامیک ِ این مشاهده‌پذیرها به دست می‌آید.

1 تکانه یِ زاویه‌ای در چارچوب ِ فضا

یک دست‌گاه ِ ذرات را در نظر بگیرید. تکانه‌یِ‌زاویه‌ای یِ این سیستم را مولد ِ چرخش ِ آن در فضا تعریف می‌کنیم. یعنی تحت ِ چرخش ی با بردار ِ $\mathbf{a}$،

$$A \to A + \{\mathbf{a}\cdot\mathbf{L}\,,\,A\} + o(a), \tag{1}$$

که در آن A تابع ِ دل‌بخواه ی از فضایِ‌فاز ِ دست‌گاه، و $\mathbf{L}$ بردار ِ (سه‌مئلفه‌ای یِ) تکانه یِ زاویه‌ای است. چرخش با بردار ِ $\mathbf{a}$ یعنی چرخش ی به اندازه یِ a در جهت ِ $\hat{\mathbf{a}}$. حالا دو چرخش ِ متناظر با بردارها یِ $\mathbf{a}$ و $\mathbf{b}$ را در نظر بگیرید، که آن‌ها را با ماتریس‌ها یِ $U(\mathbf{a})$ و $U(\mathbf{b})$ نمایش می‌دهیم. به ساده‌گی دیده می‌شود ماتریس ِ

$$\begin{aligned} O(\mathbf{a},\mathbf{b}) &:= U(\mathbf{a})\,U(\mathbf{b})\,U^{-1}(\mathbf{a})\,U^{-1}(\mathbf{b}),\\ &= U(\mathbf{a})\,U(\mathbf{b})\,U(-\mathbf{a})\,U(-\mathbf{b}), \end{aligned} \tag{2}$$

ماتریس ِ یک است، اگر $U(\mathbf{a})$ یا $U(\mathbf{b})$ یک باشند. نتیجه این که اگر $\mathbf{a}$ یا $\mathbf{b}$ صفر باشند، $O(\mathbf{a},\mathbf{b})$ یک است. پس اگر $O(\mathbf{a},\mathbf{b})$ را برا یِ $\mathbf{a}$ و $\mathbf{b}$ ِ کوچک بسط دهیم، اولین جمله یِ جز یک، هم نسبت به $\mathbf{a}$ و هم نسبت به $\mathbf{b}$ خطی است. برا یِ به‌دست‌آوردن ِ این بسط، کافی است بسط ِ ماتریس ِ چرخش تا مرتبه یِ یک نسبت به بردار ِ چرخش را داشته باشیم:

$$\begin{aligned} U(\mathbf{a})\,\mathbf{r} &= \mathbf{r}+\mathbf{a}\times\mathbf{r}+o(a),\\ &= \mathbf{r}+(\mathbf{a}\cdot\mathbf{M})\,\mathbf{r}+o(a), \end{aligned} \tag{3}$$

که در آن $\mathbf{M}$ بردار ی است که مئلفه‌ها یِ آن ماتریس اند:

$$(M_i)^k{}_j := \varepsilon^k{}_{ij}. \tag{4}$$

ε تانسور ِ لِوی‌ـ چیویتا [a] است. از (3) نتیجه می‌شود

$$U(\mathbf{a}) = 1+\mathbf{a}\cdot\mathbf{M}+o(a), \tag{5}$$

و از آن‌جا،

$$\begin{aligned} O(\mathbf{a},\mathbf{b}) &= 1+[\mathbf{a}\cdot\mathbf{M}\,,\,\mathbf{b}\cdot\mathbf{M}]+o(a\,b),\\ &= 1+\varepsilon^k{}_{ij}\,a^i\,b^j\,M_k+o(a\,b), \end{aligned} \tag{6}$$

که در آن از رابطه یِ جابه‌جایی یِ

$$[M_i\,,\,M_j] = \varepsilon^k{}_{ij}\,M_k \tag{7}$$

استفاده شده.

به‌ساده‌گی دیده می‌شود اثر ِ متوالی یِ چهارچرخش ِ کوچک ِ سازنده یِ $O(\mathbf{a},\mathbf{b})$ رو یِ تابع ِ A،

$$\begin{aligned} A &\to A+\{\mathbf{a}\cdot\mathbf{L}\,,\,\{\mathbf{b}\cdot\mathbf{L}\,,\,A\}\}-\{\mathbf{b}\cdot\mathbf{L}\,,\,\{\mathbf{a}\cdot\mathbf{L}\,,\,A\}\}+o(a\,b),\\ &= A+\{\{\mathbf{a}\cdot\mathbf{L}\,,\,\mathbf{b}\cdot\mathbf{L}\}\,,\,A\}\}+o(a\,b) \end{aligned} \tag{8}$$

است، که در آن اتحاد ِ یاکبی [b] هم به کار رفته است. اما اثر ِ چرخش ِ $O(\mathbf{a},\mathbf{b})$ بر A هم از (1) و (6) به دست می‌آید:

$$A \to A + \{\varepsilon^k{}_{ij}\, a^i\, b^j\, L_k\, ,\, A\} + o(a\, b). \tag{9}$$

طرف‌ها یِ راست ـِ رابطه‌ها یِ (8) و (9) باید یک‌سان باشند. از این‌جا،

$$a^i\, b^j \{\{L_i\, ,\, L_j\} - \varepsilon^k{}_{ij}\, L_k\, ,\, A\} = 0, \tag{10}$$

که در آن A تابع ی دل‌بخواه، و $\mathbf{a}$ و $\mathbf{b}$ هم بردارها یی دل‌بخواه اند. به این ترتیب،

$$\{L_i\, ,\, L_j\} = \varepsilon^k{}_{ij}\, L_k + c_{ij}, \tag{11}$$

که در آن کروشه‌یِ پوَسُن [c] ـِ c_{ij} ها با هر تابع ی صفر است، پس c_{ij} ها تابع ـِ ثابت اند.

با تعریف ـِ $\mathbf{L}$ به عنوان ـِ مولد ـِ چرخش، کروشه‌یِ‌پوَسُن [c] ـِ L_i ها با هم به طور ـِ یک‌تا تعیین نمی‌شود. علت این است که اگر به تابع ی مقدار ـِ ثابت ی بیفزاییم هم، کروشه‌یِ‌پوَسُن [c] ـِ آن با تابع‌ها یِ دیگر عوض نمی‌شود. اما توجه کنیم که c_{ij} نسبت به i و j پادمتقارن است. پس c_i ها یی وجود دارند که

$$c_{ij} =: \varepsilon^k{}_{ij}\, c_k. \tag{12}$$

در واقع،

$$c_k = \frac{1}{2}\varepsilon_k{}^{ij} c_{ij}. \tag{13}$$

از این‌جا می‌شود کمیت‌ها یِ جدید ـِ

$$\tilde{L}_i := L_i + c_i \tag{14}$$

را تعریف کرد، و دیده می‌شود این‌ها رابطه یِ

$$\{\tilde{L}_i\, ,\, \tilde{L}_j\} = \varepsilon^k{}_{ij}\, \tilde{L}_k \tag{15}$$

را بر می‌آورند. دیده می‌شود تعریف ـِ تکانه یِ زاویه‌ای به عنوان ـِ مولد ـِ چرخش، آن را به طور ـِ یک‌تا تعیین نمی‌کند.

برا یِ تعیین ـِ کامل ـِ جبر ـِ تکانه‌یِ‌زاویه‌ای، اثر ـِ چرخش بر یک نقطه از فضا یِ فاز را در نظر بگیرید. در اثر ـِ چرخش با زاویه یِ کوچک ـِ $\mathbf{a}$،

$$x^\alpha \to x^\alpha + \{x^\alpha\, ,\, \mathbf{a}\cdot\mathbf{L}\} + o(a), \tag{16}$$

که در آن x^α یک مختصه ی فضای ِفاز است. به اختلاف ِعلامت ِ جمله ی دوم ِ طرف ِ راست ِ این رابطه با جمله ی مشابه ِ طرف ِ راست ِ رابطه ی (1) توجه کنید. به زبان ِ فنی‌تر، رابطه ی (1) اثر ِ پس‌آر ِ وارون ِ چرخش بر یک تابع را نشان می‌دهد، که به این ترتیب حساب می‌شود که تابع را در نقطه ی x' حساب کنیم، که x' تبدیل‌یافته ی x تحت ِ وارون ِ چرخش ِ موردِنظر است. وارون‌کردن ِ تبدیل برا ی این لازم است که پس‌آر ِ حاصل‌ضرب ِ دوتبدیل، برابر باشد با حاصل ِضرب ِ پس‌آر ِ آن دوتبدیل (پی‌وست). به‌ساده‌گی دیده می‌شود هر تابع ِ A از فضا ی فاز، در نقطه ی تبدیل‌یافته ی رابطه ی (16) چنین است.

$$A(x + \{x\,,\,\mathbf{a}\cdot\mathbf{L}\}) = A(x) + \{A\,,\,\mathbf{a}\cdot\mathbf{L}\}(x) + o(a). \tag{17}$$

این رابطه برا ی خود ِ تکانه‌ی‌زاویه‌ای (به جا ی A) هم درست است:

$$\begin{aligned} L_i(x + \{x\,,\,\mathbf{a}\cdot\mathbf{L}\}) &= L_i(x) + \{L_i\,,\,\mathbf{a}\cdot\mathbf{L}\}(x) + o(a), \\ &= L_i(x) + a^j\,(\varepsilon^k{}_{ij}\,L_k + c_{ij}) + o(a). \end{aligned} \tag{18}$$

حالا این شرط ِ طبیعی را اعمال می‌کنیم که اگر تکانه‌ی‌زاویه‌ای ی دست‌گاه ی صفر باشد، در اثر ِ چرخش هم تکانه‌ی‌زاویه‌ای صفر بماند. نتیجه ی این شرط آن است که

$$\forall \mathbf{a}: \qquad a^j\,c_{ij} = 0, \tag{19}$$

که نتیجه می‌دهد c_{ij} ها صفر اند. پس به طور ِ خلاصه، با این دوشرط که

- تکانه ی زاویه‌ای مولد ِ چرخش است،
- تکانه‌ی‌زاویه‌ای ی صفر، در اثر ِ چرخش صفر می‌ماند،

جبر ِ تکانه ی زاویه‌ای می‌شود

$$\{L_i\,,\,L_j\} = \varepsilon^k{}_{ij}\,L_k. \tag{20}$$

2 فضا یِ پیکربندی یِ جسم ـِ صلب، و چارچوب ـِ جسم

حرکت ـِ هر جسم ـِ صلب را می‌شود به یک حرکت ـِ انتقالی و یک چرخش تفکیک کرد [1]. به این ترتیب، وضعیت ـِ هر جسم ـِ صلب نسبت به یک نقطه یِ آن، با یک چرخش مشخص می‌شود. چرخش را می‌شود با یک ماتریس ـِ چرخش ـِ سه‌بعدی مشخص کرد. ماتریس ـِ چرخش ماتریس ی متعامد با دترمینان ـِ یک است. می‌گوییم U متعامد است، اگر ترانهاده اَش با وارون ـَ ش برابر باشد:

$$U\,U^{\mathrm{t}} = U^{\mathrm{t}}\,U = 1, \qquad U^i{}_k\,U_j{}^k = U^k{}_j\,U_k{}^i = \delta^i_j. \tag{21}$$

هر نقطه یِ یک جسم ـِ صلب، با بردار ـِ ثابت ی مثل ـِ $\mathbf{R}$ مشخص می‌شود، که در واقع برچسب ـِ آن نقطه است. این بردار، جا یِ آن نقطه در یک پیکربندی یِ خاص را نشان می‌دهد. جا یِ این نقطه در یک پیکربندی یِ دل‌بخواه

$$\mathbf{r}(\mathbf{R}) = \mathbf{q} + U\,\mathbf{R} \tag{22}$$

است، که در آن $\mathbf{q}$ بردار ی است که حرکت ـِ انتقالی یِ جسم ـِ صلب را تعیین می‌کند، و U ماتریس ی که حرکت ـِ چرخشی یِ آن را نشان می‌دهد. ماتریس ـِ U با سه پارامتر مشخص می‌شود، که می‌شود آن‌ها را مئلفه‌ها یِ بردار ـِ چرخش گرفت، یا مثلاً زاویه‌ها یِ اُیلِر [d].

به هر بردار ـِ $\mathbf{V}$، بردار ـِ دیگر ی مثل ـِ $\mathbf{V}'$ نظیر می‌کنیم و آن را $\mathbf{V}'$ در چارچوب ـِ جسم می‌نامیم:

$$\mathbf{V} =: U\,\mathbf{V}'. \tag{23}$$

با وجود ـِ اسم‌گذاری یِ چارچوبِ‌جسم، تبدیل ـِ بالا یک رابطه یِ صریحاًوابسته‌به‌زمان بین ـِ $\mathbf{V}$ و $\mathbf{V}'$ نیست: بسته‌گی یِ U به زمان فقط از طریق ـِ پیکربندی یِ جسم است. بنابراین، اگر $\mathbf{V}$ یک تابع ـِ فضایِ‌فاز باشد، تبدیل ـِ بالا از نوع ـِ تبدیل‌ها یِ مستقل‌اززمان در فضا یِ فاز است. از جمله، به جا یِ $\mathbf{V}$ می‌شود $\mathbf{L}$ (تکانه یِ زاویه‌ای) گذاشت:

$$\mathbf{L} =: U\,\mathbf{L}'. \tag{24}$$

به بردار ـِ $\mathbf{L}'$ تکانه یِ زاویه‌ای در چارچوب ـِ جسم می‌گوییم.

3 جبر ِ مشاهده‌پذیرها یِ چارچوب ِ فضا و چارچوب ِ جسم

ماتریس ِ U (بخش ی از) پیکربندی یِ جسم ِ صلب را مشخص می‌کند، یعنی مئلفه‌ها یِ آن تابع ِ مختصه‌ها یِ پیکربندی (مکان) اند. پس کروشه‌یِ‌پوَسُن [c] ِ مئلفه‌ها یِ آن با هم صفر است:

$$\{U^i{}_j\,,\,U^k{}_l\} = 0. \tag{25}$$

تکانه یِ زاویه‌ای مولد ِ چرخش است. در اثر ِ چرخش ی با بردارِچرخش ِ $\mathbf{a}$،

$$\mathbf{r}(\mathbf{R}) \to U(\mathbf{a})\,\mathbf{q} + U(\mathbf{a})\,U\,\mathbf{R}, \tag{26}$$

که نتیجه می‌دهد در اثر ِ چرخش،

$$U \to U(\mathbf{a})\,U. \tag{27}$$

حالا فرض کنید $\mathbf{a}$ کوچک باشد. با استفاده از (5) و (17)،

$$(\mathbf{a}\cdot\mathbf{M})U = \{U\,,\,\mathbf{a}\cdot\mathbf{L}\}, \tag{28}$$

یا

$$\{U\,,\,\mathbf{L}\} = \mathbf{M}\,U, \tag{29}$$

که به زبان ِ مئلفه‌ای می‌شود

$$\{U^j{}_k\,,\,L_i\} = \varepsilon^j{}_{il}\,U^l{}_k. \tag{30}$$

رابطه‌ها یِ (20)، (25)، و (30)، جبر ِ تکانه یِ زاویه‌ای در چارچوب ِ فضا، و ماتریس ِ چرخش اند. تکانه یِ زاویه‌ای و ماتریس ِ چرخش، شش پارامتر ِ مستقل دارند و متغیرها یِ مربوط‌به‌چرخش ِ فضا یِ فاز را می‌شود بر حسب ِشان بیان کرد. شش‌پارامتر ِ مستقل را می‌شود مثلاً مئلفه‌ها یِ تکانه‌یِ‌زاویه‌ای و بردارِچرخش گرفت. اما این متغیرها (چنان که از کروشه‌یِ‌پوَسُن [c]ِشان دیده می‌شود) کانونیک نیستند.

با استفاده از (24) و (25)، می‌شود کروشه‌یِ‌پوَسُن [c] ِ $\mathbf{L}'$ با ماتریس ِ U را هم به دست آورد:

$$\begin{aligned}
\{U^j{}_k\, ,\, L'_i\} &= \{U^j{}_k\, ,\, (U^{-1})_i{}^m\, L_m\},\\
&= \varepsilon^j{}_{ml}\, U^l{}_k\, (U^{-1})_i{}^m,\\
&= \varepsilon^j{}_{ml}\, U^l{}_k\, U^m{}_i,\\
&= \varepsilon^s{}_{ik}\, (U^{-1})_s{}^j \det(U),
\end{aligned} \tag{31}$$

که در آن از تعامد ِ U استفاده شده، و این که برا یِ هر ماتریس ِ T،

$$\varepsilon_{ijk}\, T^i{}_l\, T^j{}_m\, T^k{}_n = \varepsilon_{lmn} \det(T). \tag{32}$$

چون دترمینان ِ U هم یک است،

$$\{U^j{}_k\, ,\, L'_i\} = \varepsilon^s{}_{ik}\, U^j{}_s, \tag{33}$$

یا

$$\{U\, ,\, \mathbf{L}'\} = U\, \mathbf{M}. \tag{34}$$

$\mathbf{V}$ را یک نمایش ِ برداری یِ چرخش (ِ چارچوبِ‌فضا) می‌نامیم، اگر

$$\{L_i\, ,\, V_j\} = \varepsilon^k{}_{ij}\, V_k. \tag{35}$$

با روش ی مشابه ِ آن چه برا یِ به‌دست‌آوردن ِ (33) به کار رفت، می‌شود نشان داد $\mathbf{V}$ یک نمایش ِ برداری یِ چرخش است، اگر و تنها اگر کروشه‌یِ‌پوَسُن [c]ِ $\mathbf{V}'$ ($\mathbf{V}$ در چارچوب ِ جسم) با $\mathbf{L}$ صفر باشد. یک راه ِ ساده‌تر ِ دیدن ِ این آن است که توجه کنیم $\mathbf{V}$ یک نمایش ِ برداری یِ چرخش است، اگر و تنها اگر تحت ِ چرخش ی با بردارِچرخش ِ $\mathbf{a}$،

$$\mathbf{V} \to U(\mathbf{a})\, \mathbf{V}. \tag{36}$$

کروشه‌یِ‌پوَسُن [c]ِ $\mathbf{V}'$ با $\mathbf{L}$ هم صفر است، اگر و تنها اگر تحت ِ چرخش،

$$\mathbf{V}' \to \mathbf{V}'. \tag{37}$$

اما از (27) دیده می‌شود (36) و (37) هم‌ارز اند. پس،

$$\{L_i\,,\,V_j\} = \varepsilon^k{}_{ij}\,V_k \quad\Longleftrightarrow\quad \{L_i\,,\,V'_j\} = 0. \tag{38}$$

با استفاده از (33) می‌شود کروشه‌یِ‌پوَسُن [c]ِ $\mathbf{L}'$ با $\mathbf{W}$ را هم به کروشه‌یِ‌پوَسُن [c]ِ $\mathbf{L}'$ با $\mathbf{W}$ مربوط کرد. $\mathbf{W}$ همان $\mathbf{W}'$ در چارچوب ِ فضا است:

$$W'_j = U^k{}_j\,W_k, \tag{39}$$

که در آن از تعامد ِ U استفاده شده. از (33) نتیجه می‌شود

$$\begin{aligned}\{L'_i\,,\,W'_j\} &= \{L'_i\,,\,U^k{}_j\,W_k\},\\ &= -\varepsilon^s{}_{ij}\,U^k{}_s\,W_k + U^k{}_j\{L'_i\,,\,W_k\},\\ &= -\varepsilon^s{}_{ij}\,W'_s + U^k{}_j\{L'_i\,,\,W_k\},\end{aligned} \tag{40}$$

که نتیجه می‌دهد

$$\{L'_i\,,\,W'_j\} = -\varepsilon^k{}_{ij}\,W'_k \quad\Longleftrightarrow\quad \{L'_i\,,\,W_j\} = 0. \tag{41}$$

$\mathbf{W}'$ را یک نمایش ِ برداری یِ چرخش (ِ چارچوبِ‌جسم) می‌نامیم، اگر

$$\{L'_i\,,\,W'_j\} = -\varepsilon^k{}_{ij}\,W'_k. \tag{42}$$

با استفاده از (38) و (41)، کروشه‌یِ‌پوَسُن ِ $\mathbf{L}'$ با $\mathbf{L}'$ و با $\mathbf{L}$ هم به دست می‌آید. از (38) و (20) نتیجه می‌شود

$$\{L_i\,,\,L'_j\} = 0. \tag{43}$$

از این رابطه و (41) هم به دست می‌آید

$$\{L'_i\,,\,L'_j\} = -\varepsilon^k{}_{ij}\,L'_k. \tag{44}$$

رابطه‌ها یِ (25)، (33)، و (44)، جبر ِ مشاهده‌پذیرها یِ چارچوبِ‌جسم اند.

نمایش‌ها یِ برداری یِ چارچوبِ‌فضا و چارچوبِ‌جسم را به‌ساده‌گی می‌شود به نمایش‌ها یِ تانسوری تعمیم داد. مثلاً ماتریس ِ B را یک نمایش ِ تانسوری یِ رتبه‌یِ 2 یِ چرخش (ِ چارچوبِ‌فضا) می‌نامیم، اگر

$$\{L_i\,,\,B_{jk}\}=\varepsilon^l{}_{ij}\,B_{lk}+\varepsilon^l{}_{ik}\,B_{jl}. \tag{45}$$

به همین ترتیب، ماتریس ـ C' را یک نمایش ـ تانسوری یِ رتبه‌یِ 2 یِ چرخش (ـِ چارچوبِ‌جسم) می‌نامیم، اگر

$$\{L'_i\,,\,C'_{jk}\}=-\varepsilon^l{}_{ij}\,C'_{lk}-\varepsilon^l{}_{ik}\,C'_{jl}. \tag{46}$$

ارتباط ـِ مئلفه‌ها یِ تانسوری یِ چارچوبِ‌جسم و چارچوبِ‌فضا هم تعمیم ـِ ساده یِ (23) است:

$$B_{ij}=U_i{}^k\,U_j{}^l\,B'_{kl}. \tag{47}$$

به‌ساده‌گی دیده می‌شود مانسته‌ها یِ (38) و (41) برا یِ نمایش‌ها یِ تانسوری را هم به دست آورد:

$$\begin{aligned}\{L_i\,,\,B_{jk}\}=\varepsilon^l{}_{ij}\,B_{lk}+\varepsilon^l{}_{ik}\,B_{jl}\quad&\Longleftrightarrow\quad\{L_i\,,\,B'_{jk}\}=0,\\ \{L'_i\,,\,C'_{jk}\}=-\varepsilon^l{}_{ij}\,C'_{lk}-\varepsilon^l{}_{ik}\,C'_{jl}\quad&\Longleftrightarrow\quad\{L'_i\,,\,C_{jk}\}=0.\end{aligned} \tag{48}$$

تعمیم ـِ این رابطه‌ها با نمایش‌ها یِ تانسوری یِ رتبه‌یِ n هم کاملاً سرراست است. نمایش ـِ تانسوری یِ رتبه‌یِ‌صفر را نمایش ـِ اسکالر می‌نامیم.

سرانجام، دیده می‌شود اگر $\mathbf{V}$ و $\mathbf{W}$ نمایش‌ها یِ برداری یِ چرخش ـِ چارچوبِ‌فضا باشند، آن‌گاه

$$\{\mathbf{L}\,,\,\mathbf{V}\cdot\mathbf{W}\}=0. \tag{49}$$

یعنی $\mathbf{V}\cdot\mathbf{W}$ نمایش ـِ اسکالر ـِ چارچوبِ‌فضا است. هم‌چنین، به‌ساده‌گی می‌شود دید حاصلِ‌ضرب ـِ یک نمایش ـِ تانسوری یِ رتبه‌یِ n در یک نمایش ـِ تانسوری یِ رتبه‌یِ m، یک نمایش ـِ تانسوری یِ رتبه‌یِ $(n+m)$ است. ضمناً اگر $2k$ شاخص از یک نمایش ـِ تانسوری یِ رتبه‌یِ n را دوبه‌دو با هم ادغام کنیم، یک نمایش ـِ تانسوری یِ رتبه‌یِ $(n-2k)$ به دست می‌آید. این‌ها هم برا یِ نمایش‌ها یِ تانسوری یِ چرخش ـِ چارچوبِ‌فضا برقرار اند، هم برا یِ نمایش‌ها یِ تانسوری یِ چرخش ـِ چارچوبِ‌جسم.

4 دینامیک ِ فرفره درمیدان ِ گرانشی یِ یک‌نواخت

جسم ِ صلب ی را در نظر بگیرید، که یک نقطه یِ آن ثابت است. به این جسم فرفره می‌گوییم. پیکربندی یِ این جسم، با ماتریسِ‌چرخش ِ U کاملاً مشخص می‌شود. بنابراین U و تکانه‌یِ‌زاویه‌ای (در چارچوب ِ جسم یا فضا) برا یِ تعیین ِ وضعیت ِ فرفره در فضا یِ فاز کافی اند.

هر جسم ِ صلب با یک نقطه یِ ثابت، سه مشخصه دارد که در چارچوبِ‌فضا ثابت اند (یعنی به پیکربندی یا سرعت ِ جسم بسته‌گی ندارند). این‌ها عبارت اند از ماتریس ِ لختی‌یِ‌چرخشی (I') [1]، بردار ِ مکان ِ مرکزِجرم نسبت به نقطه یِ ثابت ($\mathbf{a}'$)، و جرم ِ جسم (m). میدان ِ گرانشی هم با یک بردار ِ ثابت در چارچوب ِ فضا مشخص می‌شود، که به آن شتاب ِ میدان ِ گرانشی ($\mathbf{g}$) می‌گویند.

همیلتنی یِ فرفره

$$\begin{aligned} H &= \frac{1}{2}\, K^{ij}\, L_i\, L_j - m\, \mathbf{g}\cdot\mathbf{a}, \\ &= \frac{1}{2}\, K'^{ij}\, L'_i\, L'_j - m\, \mathbf{g}'\cdot\mathbf{a}' \end{aligned} \tag{50}$$

است، که

$$K := I^{-1}. \tag{51}$$

در (50)، شکل ِ اول بر حسب ِ مشاهده‌پذیرها یِ چارچوبِ‌فضا، و شکل ِ دوم بر حسب ِ مشاهده‌پذیرها یِ چارچوبِ‌جسم است. ثابت‌بودن ِ $\mathbf{g}$، $\mathbf{a}'$، و I'، یعنی کروشه‌یِ‌پوَسُن [c] ِ این کمیت‌ها با همه‌چیز صفر است. از این‌جا کروشه‌یِ‌پوَسُن [c] ِ $\mathbf{g}'$ با $\mathbf{L}'$، و کروشه‌یِ‌پوَسُن [c] ها یِ $\mathbf{a}$ و K با $\mathbf{L}$ به دست می‌آید:

$$\begin{aligned} \{L'_i\,,\, g'_j\} &= -\varepsilon^k{}_{ij}\, g'_k, \\ \{L_i\,,\, a_j\} &= \varepsilon^k{}_{ij}\, a_k, \\ \{L_i\,,\, K_{jk}\} &= \varepsilon^l{}_{ij}\, K_{lk} + \varepsilon^l{}_{ik}\, K_{jl}. \end{aligned} \tag{52}$$

به علاوه، کروشه‌یِ‌پوَسُن [c] ِ مئلفه‌ها یِ $\mathbf{a}$، I، و $\mathbf{g}'$ با هم صفر است، چون این‌ها تابع ِ فقط متغیرها یِ فضا یِ پیکربندی اند.

با استفاده از

$$\dot{Q} = \{Q\,,\,H\}, \tag{53}$$

می‌شود معادله یِ حرکت ِ مشاهده‌پذیرها را به دست آورد. برا یِ تکانه یِ زاویه‌ای در چارچوب ِ فضا، مناسب‌تر است از شکل ِ اول ِ (50) استفاده کنیم. انرژی یِ جنبشی اسکالر ِ چارچوبِ‌فضا است. پس کروشه‌یِ‌پوَسُن [c]ِ آن با $\mathbf{L}$ صفر است. $\mathbf{g}$ هم ثابت است. پس،

$$\begin{aligned}\dot{L}_i &= -m\,g^j\{L_i\,,\,a_j\},\\ &= -m\,g^j\,\varepsilon^k{}_{ij}\,a_k,\end{aligned} \tag{54}$$

یا

$$\dot{\mathbf{L}} = m\,\mathbf{a}\times\mathbf{g}. \tag{55}$$

این یعنی تغییر ِ تکانه یِ زاویه‌ای برابر است با گشت‌آور ِ نیرو یِ گرانشی. این معادله برا یِ تعیین ِ $\mathbf{L}$ کافی نیست. چون طرف ِ راست ِ آن شامل ِ $\mathbf{a}$ است، که خود َ‌ش متغیر است. معادله یِ حرکت ِ $\mathbf{a}$ می‌شود

$$\dot{a}_i = \varepsilon^l{}_{ij}\,a_l\,K^{jk}\,L_k, \tag{56}$$

و از آن‌جا

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{a}} &= (K\,\mathbf{L})\times\mathbf{a},\\ &= \boldsymbol{\omega}\times\mathbf{a},\end{aligned} \tag{57}$$

که در آن

$$\boldsymbol{\omega} := K\,\mathbf{L} \tag{58}$$

سرعتِ‌زاویه‌ای در چارچوب ِ فضا است. در (57) باز هم متغیر ِ جدید ی (سرعت ِ زاویه‌ای) ظاهر شده، که معادله یِ حرکت ِ آن هم لازم است. می‌شود به جا یِ سرعتِ‌زاویه‌ای، لختی یِ چرخشی را متغیر گرفت و معادله یِ آن را به دست آورد. کاملاً مشابه با (56)، نتیجه می‌شود

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} K^{ij} = \varepsilon_k{}^{il}\, K^{kj}\, \omega_l + \varepsilon_k{}^{jl}\, K^{ik}\, \omega_l, \tag{59}$$

یا

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} K = \boldsymbol{\omega} \times K - K \times \boldsymbol{\omega}. \tag{60}$$

در طرف ِ چپ، جمله ي اول یعنی شاخص ِ اول ِ K برا يِ ضرب ِ خارجی به کار رفته، و جمله يِ دوم یعنی شاخص ِ دوم ِ K برا يِ ضرب ِ خارجی به کار رفته. (55)، (57)، و (60) یک دست‌گاه ِ خودگردان اند، چون از (58)، $\boldsymbol{\omega}$ بر حسب ِ $\mathbf{L}$ و K به دست می‌آید. معنی يِ (57) و (60) آن است که تغییرات ِ $\mathbf{a}$ و K، فقط ناشی از چرخش ِ فرفره اند.

برا يِ نوشتن ِ تحول در چارچوب ِ جسم، به‌تر است شکل ِ دوم ِ (50) را به کار ببریم. برا ي تکانه يِ زاویه‌ای نتیجه می‌شود

$$\dot{L}'_i = -\varepsilon^l{}_{ij}\, K'^{jk}\, L'_l\, L'_k + m\, \varepsilon^k{}_{ij}\, a'^j\, g'_k, \tag{61}$$

یا

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{L}}' &= -(K'\,\mathbf{L}') \times \mathbf{L}' + m\,\mathbf{a}' \times \mathbf{g}', \\ &= -\boldsymbol{\omega}' \times \mathbf{L}' + m\,\mathbf{a}' \times \mathbf{g}', \end{aligned} \tag{62}$$

که

$$\boldsymbol{\omega}' := K'\,\mathbf{L}', \tag{63}$$

سرعت ِ زاویه‌ای در چارچوب ِ جسم است. یک شکل ِ آشناتر برا يِ (62)

$$\dot{\mathbf{L}}' + \boldsymbol{\omega}' \times \mathbf{L}' = m\,\mathbf{a}' \times \mathbf{g}' \tag{64}$$

است. برا يِ حل ِ این معادله، تحول ِ $\mathbf{g}'$ هم لازم است. به‌ساده‌گی دیده می‌شود

$$\dot{g}'_i = -\varepsilon^k{}_{ij}\, g'_k\, \omega'^j, \tag{65}$$

یا

$$\dot{\mathbf{g}}' = -\boldsymbol{\omega}' \times \mathbf{g}'. \tag{66}$$

این معادله خیل ی شبیه ـِ (57) است. تفاوت ـِ علامت هم به خاطر ـِ این است که از دید ـِ چارچوب ـِ جسم، جسم نمی‌چرخد و بردار ـِ میدان ـِ گرانشی برعکس می‌چرخد. (64) و (66) یک دست‌گاه ـِ خودگردان می‌سازند، چون ω' با یک ماتریس ـِ ثابت (K') به $\mathbf{L}'$ مربوط است.

5 پِی‌وست: نگاشت‌ها یِ وارون‌پذیر و پس‌آر ـِشان

نگاشت ـِ

$$f: M \to N \tag{67}$$

را در نظر بگیرید. مجموعه یِ نگاشت‌ها یِ از M به S و از N به S را به‌ترتیب با $\mathrm{Fun}(M \to S)$ و $\mathrm{Fun}(M \to S)$ نشان می‌دهیم. نگاشت ـِ f^* را به این شکل تعریف می‌کنیم.

$$\begin{aligned} &f^*: \mathrm{Fun}(N \to S) \to \mathrm{Fun}(M \to S), \\ &\forall A \in \mathrm{Fun}(N \to S),\ \forall x \in M:\ [f^*(A)](x) := A[f(x)]. \end{aligned} \tag{68}$$

به نگاشت ـِ f^* پس‌آر ـِ f می‌گوییم. به ساده‌گی دیده می‌شود اگر f و g دو نگاشت باشند چنان که $f \circ g$ معنی داشته باشد (یعنی برد ـِ g بیرون ـِ دامنه یِ f نباشد)، آن‌گاه $(f \circ g)^*$ وجود دارد و

$$(f \circ g)^* = (g^*) \circ (f^*). \tag{69}$$

بنابراین عمل ـِ پس‌آر هم‌ریختی نیست، یعنی ترکیب ـِ تابع‌ها را حفظ نمی‌کند.

حالا فرض کنید f و g وارون‌پذیر باشند. دیده می‌شود

$$\begin{aligned} [(f \circ g)^{-1}]^* &= [(g^{-1}) \circ (f^{-1})]^*, \\ &= [(f^{-1})^*] \circ [(g^{-1})^*]. \end{aligned} \tag{70}$$

پس ترکیب ـِ عمل ـِ پس‌آر با وارون‌کردن ـِ تابع‌ها (یِ وارون‌پذیر)، یک هم‌ریختی یِ ترکیب ـِ تابع‌ها است. از جمله، تابع‌ها یِ وارون‌پذیر از M به M یک گروه می‌سازند (با عمل ـِ ترکیب) و نگاشت ـِ

$$\mathcal{L}: \ \mathcal{L}(f) := (f^{-1})^*, \tag{71}$$

یک هم‌ریختی از این گروه است.

فرض کنید f_s یک خانواده یِ یک‌پارامتری از نگاشت‌ها یِ وارون‌پذیر ِ از M به M باشد. s حقیقی است و منظور از خانواده یِ یک‌پارامتری این است که

$$f_s \circ f_{s'} = f_{s+s'}, \qquad f_0(x) = x, \ \forall x \in M. \tag{72}$$

هم‌چنین فرض کنید M خمینه، و خانواده یِ f_s نسبت به s هم‌وار باشد. در این صورت،

$$[f_s(x)]^\alpha = x^\alpha + s\, X^\alpha(x) + o(s), \tag{73}$$

که در آن،

$$X^\alpha(x) := \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\{[f_s(x)]^\alpha\}|_{s=0}. \tag{74}$$

(16) نظیر ِ (73) است.

تابع ِ حقیقی یِ دیفرانسیل‌پذیر ِ A از M را در نظر بگیرید. داریم

$$\begin{aligned} \{[\mathcal{L}(f_s)](A)\}(x) &= A[(f_s)^{-1}(x)], \\ &= A[f_{-s}(x)], \\ &= A(x - s\,X) + o(s), \\ &= A(x) - s\,X^\alpha\,\partial_\alpha A(x) + o(s). \end{aligned} \tag{75}$$

(1) نظیر ِاین رابطه است.

6 مرجع

[1] S. Neil Rasband; “Dynamics”, (John Wiley & Sons, 1983) chapter 4

7 اسم‌ها یِ خاص

[a] Levi-Civita

[b] Jacobi

[c] Poisson

[d] Euler