X1-014 (2003/02/12)

یک حباب بین ِ دو مرز ِ دایره‌ای: یک گذارِفاز ِ ساده

محمد خرمی

mamwad@mailaps.org

شکل ِ حباب ی بررسی می‌شود، که مرز ِ آن دو دایره یِ یک‌سان با محورِتقارن ِ یک‌سان اند. شکل ِ حباب فقط به شرایط ِ مرزی بسته‌گی دارد، و با کمینه‌کردن ِ مساحت ِ آن به دست می‌آید و به اندازه یِ کششِ‌سطحی بسته‌گی ندارد. معادله یِ این شکل به دست می‌آید و دیده می‌شود اگر نسبت ِ شعاع ِ دایره‌ها یِ مرزی به فاصله یِ مرکز ِ دودایره از هم، از حد ِ معین ی کوچک‌تر باشد، حباب دوپاره می‌شود.

0 مقدمه

حباب ی را در نظر بگیرید که مرز ِ آن مشخص است، مثلاً حباب ِ صابون ی که به یک یا چند خم ِ بسته یِ سیمی متصل است. انرژی یِ سطحی یِ چنین حباب ی

$$E = 2\tau\, A \tag{1}$$

است، که τ کشش ِ سطحی، و A مساحت ِ حباب است. ضریب ِ 2 به خاطر ِ این است که حباب دو سطح دارد، یک سطح ِ بیرونی و یک سطح ِ درونی. اگر اثر ِ برهم‌کنش‌ها یِ دیگر ِ حباب کوچک باشد، حباب به شکل ی در می‌آید که این انرژی‌یِ‌سطحی کمینه

شود. شرط ِ تعادل ِ حباب این است که انرژی یِ سطحی فرینه یِ موضعی شود. اما برا یِ این که این تعادل موضعاً پای‌دار باشد، انرژی یِ سطحی باید کمینه یِ موضعی باشد. منظور از پای‌داری یِ موضعی این است که پیکربندی، اگر اندک ی از حالت ِ تعادل منحرف شود، به سو یِ حالت ِ تعادل رانده شود.

در حالت ِ کلی، با یک مرز ِ معین ممکن است بیش از یک کمینه یِ موضعی برا یِ مساحت (و در نتیجه انرژی یِ سطحی) وجود داشته باشد. ممکن است تپولوژی یِ این سطح‌ها هم با هم فرق کند. سطح ی که مساحت َ ش کمینه یِ مطلق است (یعنی بین ِ کمینه‌ها یِ موضعی از همه کوچک‌تر است) تعادل ِ پای‌دار ِ سراسری دارد. کشش ِ سطحی مثبت است، بنابراین فرینه (کمینه) کردن ِ انرژی یِ سطحی با فرینه (کمینه) کردن ِ مساحت هم‌ارز است، و شکل ِ تعادلی یِ حباب به مقدار ِ کششِ‌سطحی بسته‌گی ندارد. البته این به شرط ِ آن است که کشش ِ سطحی به حد ِ کافی بزرگ باشد، که بشود از برهم‌کنش‌ها یِ دیگر ِ حباب چشم پوشید.

کمینه‌کردن ِ یک سطح با مرز ِ مشخص، مسئله یِ ساده ای نیست. در واقع مشکل به‌دست‌آوردن ِ معادله یِ دیفرانسیل ِ سطح نیست، بل که حل ِ آن با در نظرگرفتن ِ شرایط ِ مرزی و تپولوژی‌ها یِ متفاوت است. آن چه در این‌جا به آن می‌پردازیم، مرز ِ ساده ای است که از دو دایره به شعاع ِ R تشکیل شده. صفحه‌ها یِ شامل ِ این دودایره با هم موازی، و خط‌المرکزین ِ این دودایره بر این صفحه‌ها عمود است. فاصله یِ مرکزها یِ دودایره از هم L است. سطح ِ حباب را سمتی‌متقارن (نسبت به خط‌المرکزین) می‌گیریم، و فقط دو حالت را بررسی می‌کنیم که این سطح یک‌پارچه است، یا از دو قرص تشکیل شده که مرز ِ هر یک یک ی از دایره‌ها است.

1 معادله یِ سطح ِ حباب

خط‌المرکزین را محور ِ x، و مبدئ را وسط ِ خط‌المرکزین می‌گیریم. سطح ِ دوار ی را در نظر بگیرید که از چرخش ِ خم ِ $y(x)$ (با $x \in [-L/2, L/2]$) نسبت به محور ِ x به دست می‌آید. مساحت ِ این سطح

$$A = 2\pi \int_{-L/2}^{L/2} \mathrm{d}x \; y \, \sqrt{1 + y'^2},$$

$$= : \int_{-L/2}^{L/2} \mathrm{d}x\, a(y, y', x) \tag{2}$$

است، که y' مشتق ِ y نسبت به x است. معادله یِ خم ِ y از فرینه‌کردن ِ این مساحت به دست می‌آید. خم‌ها یی که در نظر می‌گیریم، شرط‌ها یِ مرزی یِ

$$y(-L/2) = y(L/2) = R \tag{3}$$

را بر می‌آورند. معادله یِ دیفرانسیل ِ y می‌شود

$$\frac{\partial a}{\partial y} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\partial a}{\partial y'}\right) = 0. \tag{4}$$

این معادله را در هر کتاب ِ حساب ِ وردش یا مکانیک ِ تحلیلی می‌توان یافت، از جمله در فصل ِ 5 ِ [1].

رابطه یِ بالا یک معادله یِ دیفرانسیل ِ مرتبه‌یِ‌دو برا یِ $y(x)$ است. اما از آن‌جا که a در (2) مستقل از x است، این معادله یک انتگرال ِ اول دارد (فصل‌ها یِ 5 و 6 ِ [1]):

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(a - y'\frac{\partial a}{\partial y'}\right) = 0, \tag{5}$$

یا

$$a - y'\frac{\partial a}{\partial y'} = \alpha, \tag{6}$$

که α ثابت است. با جاگذاری یِ a از (2)،

$$\frac{y}{\sqrt{1+y'^2}} = \alpha, \tag{7}$$

و از آن‌جا،

$$y' = \pm\sqrt{(y/\alpha)^2 - 1}, \tag{8}$$

که نتیجه می‌دهد

$$y(x) = \alpha\,\cosh\left(\frac{x-c}{\alpha}\right). \tag{9}$$

c ثابت ِ دیگر ی است، که هم‌راه با α از شرایط ِ مرزی یِ (3) به دست می‌آید:

$$c = 0, \tag{10}$$

و

$$\alpha \cosh\left(\frac{L}{2\alpha}\right) = R. \tag{11}$$

با تعریف ِ متغیرها یِ بی‌بعد ِ

$$u := \frac{\alpha}{L}, \qquad v := \frac{R}{L}, \tag{12}$$

و

$$X := \frac{x}{L}, \qquad Y := \frac{y}{L}, \qquad S := \frac{A}{\pi L^2}, \tag{13}$$

داریم

$$Y = u \cosh\left(\frac{X}{u}\right), \tag{14}$$

و

$$u \cosh\left(\frac{1}{2u}\right) = v. \tag{15}$$

با جاگذاری یِ این‌ها در (2)،

$$S(u) = u + u^2 \sinh\left(\frac{1}{u}\right). \tag{16}$$

پس روش ِ کار این است که با داشتن ِ v باید u را از (15) به دست آورد. به این ترتیب شکل ِ سطح ِ یک‌پارچه معلوم می‌شود. مساحت ِ (بی‌بعدشده یِ) این سطح هم از (16) به دست می آید.

2 شکل ِ حباب ِ یک‌پارچه بر حسب ِ نسبت ِ شعاع به فاصله یِ مرکزها

رابطه یِ (15)، به ازا یِ همه یِ مقدارها یِ مثبت ِ v برا یِ u جواب ندارد؛ جا یی هم که جواب دارد، این جواب یک‌تا نیست. برا یِ دیدن ِ این، تابع ِ f را در نظر بگیرید:

$$f(u) := u \cosh\left(\frac{1}{2u}\right). \tag{17}$$

مقدار ِ این تابع در $u \to 0^+$ و $u \to +\infty$ به $+\infty$ می‌گراید. مشتق ِ این تابع می‌شود

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}u} &= \cosh\left(\frac{1}{2u}\right) - \frac{1}{2u}\,\sinh\left(\frac{1}{2u}\right),\\ &= \cosh\left(\frac{1}{2u}\right)\left[1 - \frac{1}{2u}\tanh\left(\frac{1}{2u}\right)\right].\end{aligned} \tag{18}$$

عبارت ِ درون ِ کروشه، تابع ی صعودی از u است (در u ها یِ مثبت)، و در $u \to +\infty$ به 1 و در $u \to 0^+$ به $-\infty$ می‌گراید. ضریب ِ کروشه هم مثبت است. پس مشتق ِ f در یک و تنها یک u یِ مثبت صفر می‌شود:

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}u}(u_B) = 0. \tag{19}$$

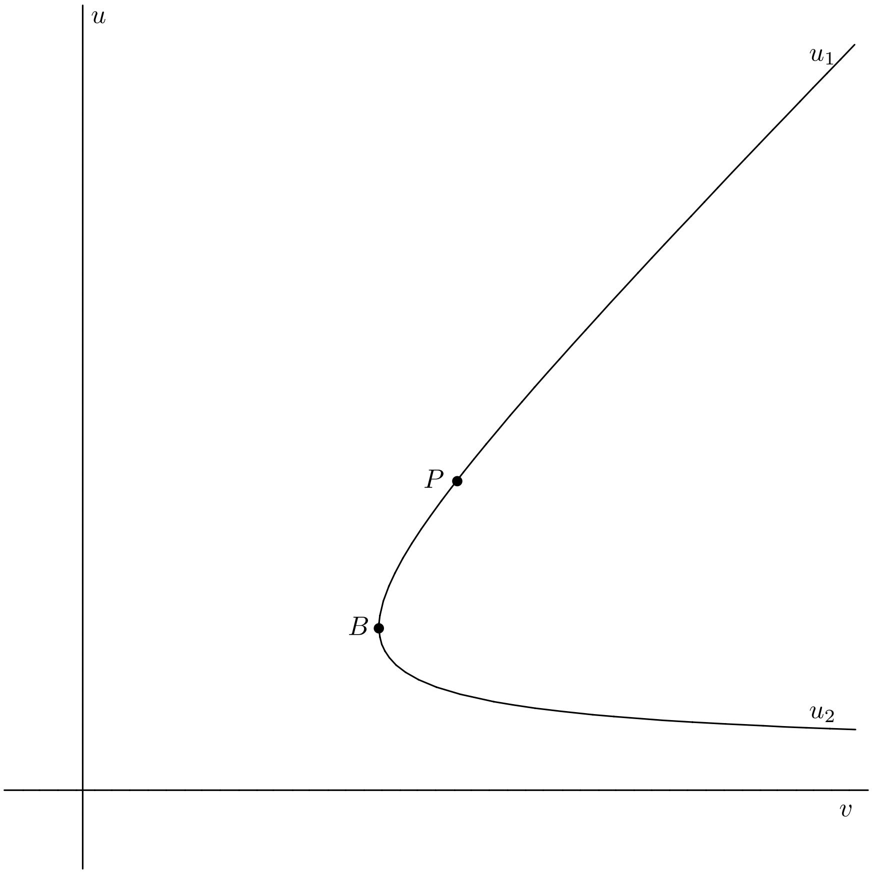
به این ترتیب، با تعریف ِ

$$v_B := f(u_B), \tag{20}$$

معلوم می‌شود اگر $v < v_B$، معادله یِ (15) برا یِ u جواب ندارد. اگر $v > v_B$، معادله یِ (15) دو جواب برا یِ u دارد. از (19) و (20)، (v_B, u_B) به دست می‌آید:

$$(v_B, u_B) = (0.75444, 0.41678). \tag{21}$$

شکل ِ 1 خم ِ $f^{-1}(v)$ را نشان می‌دهد.



شکل ِ 1 دوشاخه یِ $f^{-1}(v)$

به این ترتیب، به ازا یِ $v > v_B$ دو جواب برا یِ u به دست می‌آید. جواب ِ بزرگ‌تر را u_1 و جواب ِ کوچک‌تر را u_2 می‌نامیم. پس به ازا یِ $v > v_B$، حباب دو شکل ِ تعادلی یِ یک‌پارچه دارد، که مساحت (ِ بی‌بعد) ِشان S_1 و S_2 است:

$$S_i(v) := S[u_i(v)], \qquad i = 1, 2. \tag{22}$$

شکل ِ تعادلی یِ سراسری‌پای‌دار، شکل ی است که مساحت ِ آن کمینه یِ مطلق است. ببینیم S_1 کوچک‌تر است یا S_2. داریم

$$S_1(v_B) = S_2(v_B), \tag{23}$$

چون $u_1(v_B) = u_2(v_B)$. حالا مشتق ِ S_i ها را در نظر بگیرید:

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}S_i}{\mathrm{d}v} &= \frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}u}\frac{\mathrm{d}u_i}{\mathrm{d}v},\\ &= \left[1 + 2u_i \sinh\left(\frac{1}{u_i}\right) - \cosh\left(\frac{1}{u_i}\right)\right]\left[\cosh\left(\frac{1}{2u_i}\right) - \frac{1}{2u_i}\sinh\left(\frac{1}{2u_i}\right)\right]^{-1},\\ &= 4u_i \sinh\left(\frac{1}{2u_i}\right),\\ &= 4v \tanh\left(\frac{1}{2u_i}\right).\end{aligned} \tag{24}$$

برا یِ به‌دست‌آوردن ِ مشتق ِ v نسبت به u، رابطه یِ (15) به کار رفته. اما $\tanh$ یک تابع ِ صعودی است. پس،

$$\frac{\mathrm{d}S_1}{\mathrm{d}v} < \frac{\mathrm{d}S_2}{\mathrm{d}v}, \qquad v > v_B. \tag{25}$$

از ترکیب ِ این رابطه با (23) نتیجه می‌شود

$$S_1(v) < S_2(v), \qquad v > v_B. \tag{26}$$

پس حباب ِ با u یِ بزرگ‌تر پای‌دارتر است. u یِ بزرگ‌تر متناظر با حباب ی است که شکل ِ آن به استوانه نزدیک‌تر است، یعنی خمیده‌گی یِ کم‌تر ی دارد.

3 حباب ِ یک‌پارچه و حباب ِ دوپارچه

دیدیم اگر $v < v_B$، حباب ِ یک‌پارچه یِ درحالِ‌تعادل ی وجود ندارد. شکل ِ تعادلی یِ حباب ِ دوپارچه ساده است: دو قرص، که مرز ِ هر یک یک ی از دایره‌ها است. در واقع به‌ساده‌گی دیده می‌شود هر سطح ی که مرز َ ش یک دایره باشد را، اگر در جهت ِ عمود بر دایره منقبض کنیم، مساحت َ ش کم می‌شود. پس تنهاسطح ی که مساحت َ ش کمینه یِ موضعی است، قرص ی است که مرز َ ش آن دایره است. مساحت ِ بی‌بعد ِ شکل ِ دوپارچه یِ شامل ِ دوقرص،

$$S_0(v) := 2v^2 \tag{27}$$

است. به ازا یِ $v < v_B$، این تنهاشکل ِ تعادلی یِ حباب است. مساحت ِ این شکل را با S_1 و S_2 (در $v \ge v_B$) مقایسه کنیم. داریم

$$\frac{\mathrm{d}S_0}{\mathrm{d}v} = 4v. \tag{28}$$

از مقایسه یِ این با (24)،

$$\frac{\mathrm{d}S_0}{\mathrm{d}v} > \frac{\mathrm{d}S_i}{\mathrm{d}v}, \qquad v \ge v_B,\ i = 1, 2. \tag{29}$$

رفتار ِ u_2 در حد ِ $v \to +\infty$ را بررسی کنیم. از (15) نتیجه می‌شود

$$\lim_{v\to+\infty} u_2 = 0. \tag{30}$$

$S(u)$ را می‌شود به این شکل نوشت.

$$S(u) = u + 2v\sqrt{v^2 - u^2}, \tag{31}$$

که در آن (15) به کار رفته است. از این‌جا،

$$\lim_{v\to+\infty}[S_2(v) - 2v^2] = 0, \tag{32}$$

یا

$$\lim_{v\to+\infty}[S_2(v) - S_0(v)] = 0, \tag{33}$$

از مقایسه یِ این رابطه با (29)،

$$S_2(v) > S_0(v), \qquad v \ge v_B. \tag{34}$$

از (15) نتیجه می‌شود در $v \to +\infty$، u_1 هم بزرگ و به v نزدیک می‌شود. می‌گیریم

$$u_1 =: \frac{v}{t}, \tag{35}$$

و (15) می‌شود

$$t = \cosh\left(\frac{t}{2v}\right). \tag{36}$$

طرف ِ راست را برا یِ v ها یِ بزرگ بسط می‌دهیم، و نتیجه می‌شود

$$t = 1 + O(v^{-2}), \tag{37}$$

و از آن‌جا،

$$u_1 = v + O(v^{-1}). \tag{38}$$

$S(u)$ را می‌شود به این شکل نوشت.

$$S(u) = u + 2u\,v \sinh\left(\frac{1}{2u}\right), \tag{39}$$

که در آن (15) به کار رفته است. از این‌جا،

$$\lim_{v\to+\infty}[S_1(v) - 2v] = 0, \tag{40}$$

که نتیجه می‌دهد

$$\exists v_M \mid [v > v_M \;\Rightarrow\; S_1(v) < S_0(v)]. \tag{41}$$

اما

$$S_1(v_B) = S_2(v_B) > S_0(v_B). \tag{42}$$

پس $S_0 - S_1$ در v_B منفی، و در v ها یِ به حد ِ کافی بزرگ مثبت است. به این ترتیب، نقطه ای هست که $S_0 - S_1$ صفر می‌شود. این نقطه یک‌تا است، چون از (29) نتیجه می‌شود مشتق ِ $S_0 - S_1$ مثبت است. این نقطه را v_P می‌نامیم:

$$2v_P^2 = S_1(v_P). \tag{43}$$

با استفاده از (15) و (16)، رابطه یِ بالا می‌شود

$$2u_P^2\,\cosh^2\left(\frac{1}{2u_P}\right) = u_P + u_P^2\,\sinh\left(\frac{1}{u_P}\right), \tag{44}$$

که از آن نتیجه می‌شود

$$(v_P, u_P) = (0.94751, 0.78219). \tag{45}$$

به طور ِ خلاصه، نتیجه می‌شود شکل ِ تعادلی یِ حباب سه فاز دارد: در $v < v_B$ حباب فقط یک شکل ِ تعادلی دارد، که دوپارچه است و مساحت ِ آن $S_0(v)$ است. در

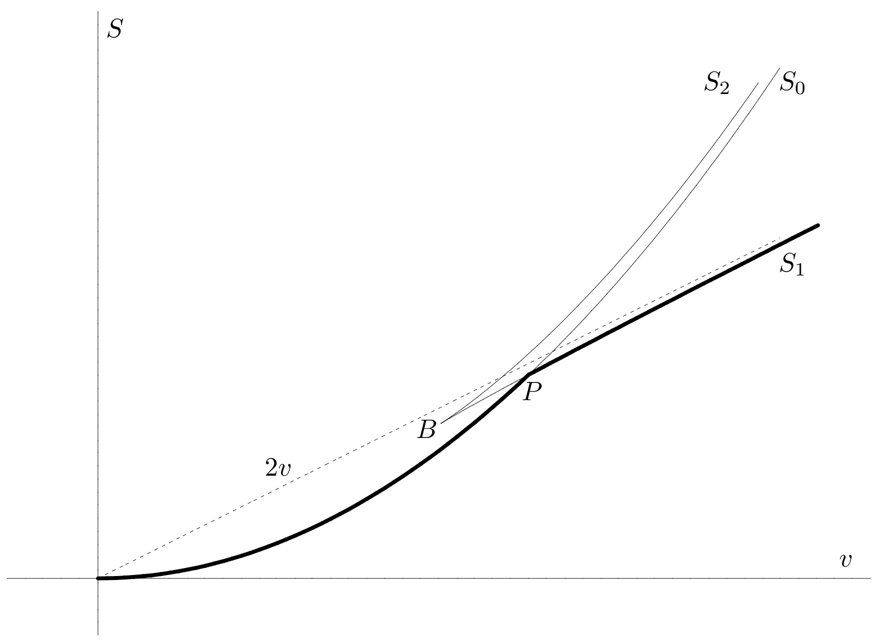
$v_B < v < v_P$ سه شکل ِ تعادلی هست، یک شکل ِ دوپارچه و دو شکل ِ یک‌پارچه، و حالت ِ سراسری‌پای‌دار شکل ِ دوپارچه است:

$$S_0(v) < S_1(v) < S_2(v), \qquad v_B < v < v_P. \tag{46}$$

در $v > v_P$ هم سه شکل ِ تعادلی هست، یک شکل ِ دوپارچه و دو شکل ِ یک‌پارچه، و شکل ِ یک‌پارچه یِ با $u = u_1$ سراسری‌پای‌دار است:

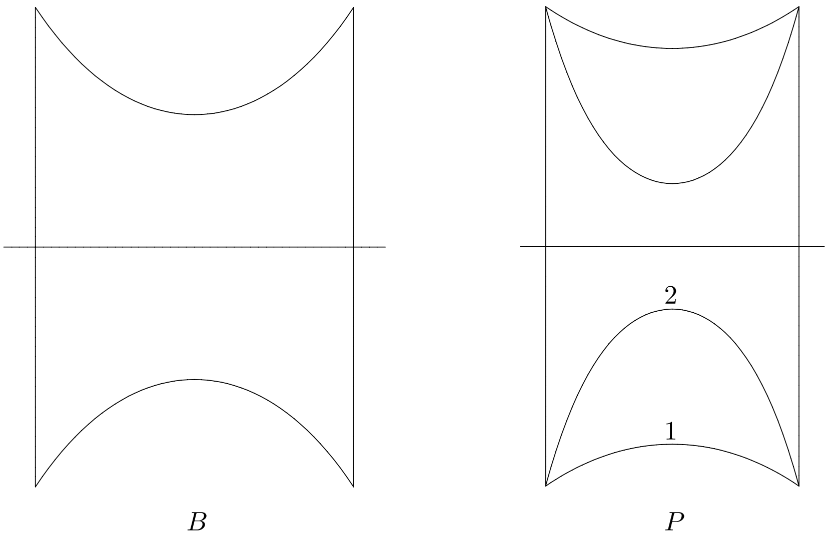
$$S_1(v) < S_0(v) < S_2(v), \qquad v_P < v. \tag{47}$$

شکل ِ 2 نمودارها یِ S_0 و S_1 و S_2 را نشان می‌دهد.



شکل ِ 2 مساحت ِ شکل‌ها یِ تعادلی: خم ِ سیاه کمینه یِ مطلق ِ مساحت، و خط‌چین مجانب ِ $S_1(v)$ است. مقیاس ِ محورها یِ افقی و عمودی یک‌سان نیست.

شکل ِ 3 حالت‌ها یِ تعادل ِ حباب در نقطه‌ها یِ B و P را نشان می‌دهد.



شکل ـ 3 حالت‌ها یِ تعادل ـِ حباب در نقطه‌ها یِ B و P

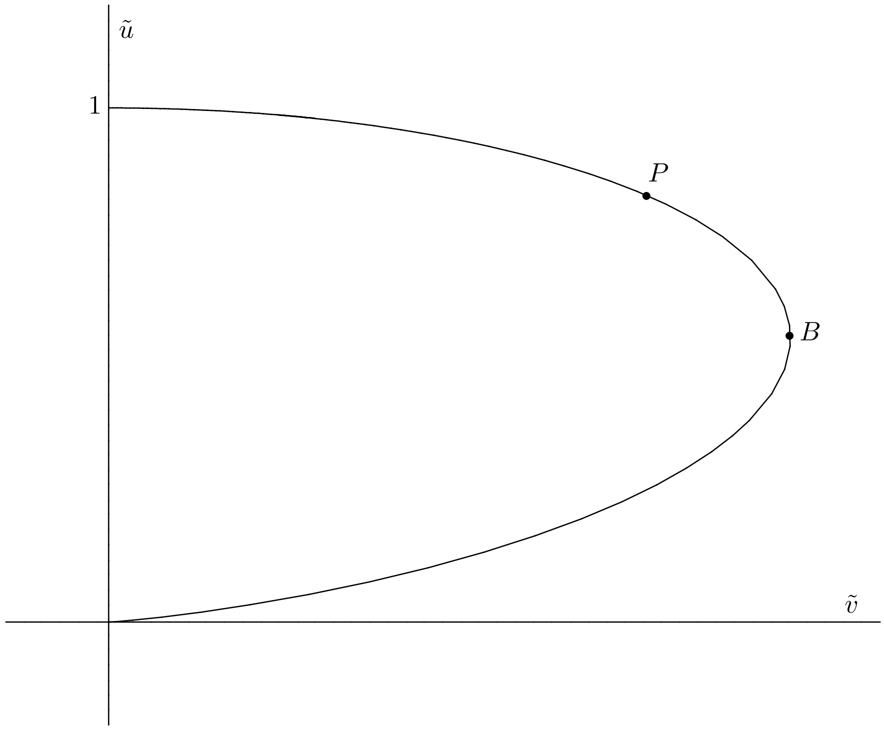
در پارامترها یی که تا کنون به کار رفتند، کمیت‌ها یِ بی‌بعد با استفاده از L تعریف می‌شد. این تعریف‌ها برا یِ محاسبه ساده‌تر است. اما برا یِ آزمایش ساده‌تر این است که شعاع ـِ حلقه‌ها ثابت باشد و فاصله پشان تغییر کند. در این صورت به‌تر است کمیت‌ها با شعاع ـِ حلقه‌ها بی‌بعد شوند. از این‌جا سه کمیت ـِ بی‌بعد ـِ جدید تعریف می‌شود:

$$\tilde{v} := \frac{L}{R} = \frac{1}{v},$$

$$\tilde{u} := \frac{\alpha}{R} = \frac{u}{v} = \tilde{v}\, u,$$

$$\tilde{S} := \frac{A}{\pi R^2} = \frac{S}{v^2} = \tilde{v}^2\, S. \qquad (48)$$

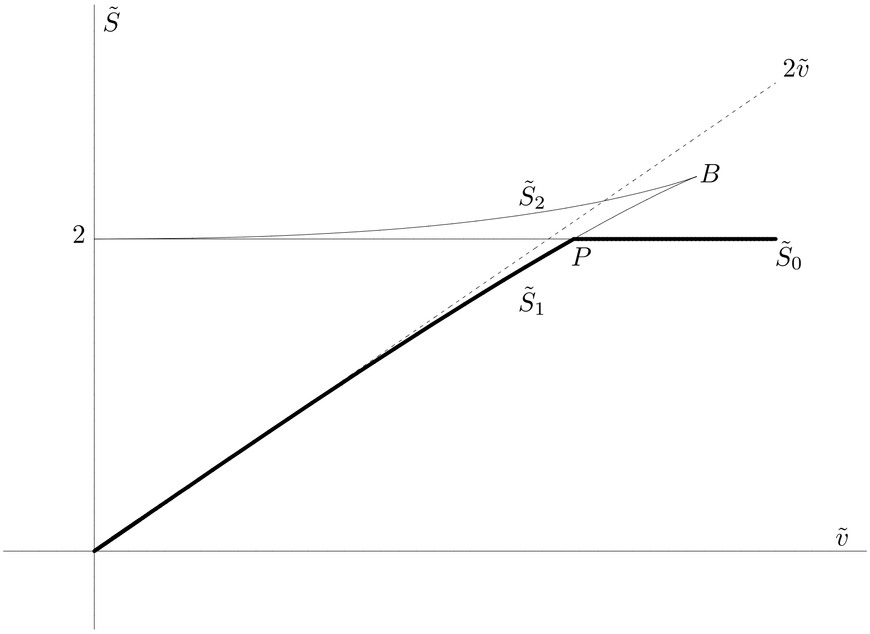
بر حسب ـِ این کمیت‌ها، شکل‌ها یِ 1 به شکل ـِ 4 تبدیل می‌شود:



شکل ِ 4 $\tilde{u}$ بر حسب ِ $\tilde{v}$. مختصات ِ نقطه‌ها یِ B و P این‌ها است. $(\tilde{v}_B, \tilde{u}_B) = (1.3255, 0.55244)$، و $(\tilde{v}_P, \tilde{u}_P) = (1.0554, 0.82552)$.

$\tilde{u}$ نسبت کوچک‌ترین فاصله یِ حباب با محور ِ تقارن، به شعاع ِ حلقه‌ها است.

شکل ِ 2 هم به شکل ِ 5 تبدیل می‌شود:



شکل ـ 5 مساحت ِ شکل‌ها ي تعادلی: خم ِ سیاه کمینه يِ مطلق ِ مساحت، و خط‌چین خط ِ مماس بر $\tilde{S}_1(v)$ در مبدئً است. مقیاس ِ محورها يِ افقی و عمودی یک‌سان نیست.

4 مرجع

[1] Jerry B. Marion & Stephen T. Thornton; "Classical dynamics of particles & systems", 3rd edition (Harcourt Brace Jovanovich, 1988)