X1-015 (2003/03/21)

تقارن و فرمولبندی یِ لَگرانژی I

محمد خرمی

mamwad@mailaps.org

تقارن و ثابت-ِ-حرکت بررسی میشود. نشان داده میشود هر مولد-ِ-تقارن ِ نُتِری در سیستم ی متناظر با یک کنش ِ از مرتبه یِ دست-ِ-بالا یک، به یک ثابت-ِ-حرکت ِ مُضعی مینجامد؛ و هر ثابت-ِ-حرکت ِ مُضعی در سیستم ی متناظر با یک کنش ِ از مرتبه یِ دست-ِ-بالا یک، به یک مولد-ِ-تقارن ِ نُتِری مینجامد.

1 کنش ِ مُضعی

سیستم ی را در نظر میگیرم که با یک تابع (ِ پیوسته و مشتق‌پذیر) از $\mathbb{R}$ (مجموعه یِ عددها یِ حقیقی) به یک مجموعه (فضا یِ پیکربندی) تُصیف میشود. به هر یک از این تابعها یک مسیر میگویم. هر مسیر یک مجموعه یِ $\{[i,t;q^i(t)] \mid (i,t)\}$ ست. t (زمان) پارامتر ِ پیوسته یِ تحول است. به q^i ها متغیرها یِ دینامیکی یِ سیستم میگویم. برا یِ این سیستم تحول ی با معادله یِ

$$\forall\ (i,t)\ :\ \mathcal{E}_i(t,\boldsymbol{q})=0 \tag{1}$$

(معادله یِ تحول یا معادله یِ حرکت) می‌نویسیم. $\boldsymbol{q}$ یک نماد ِ کلی برا یِ q^i ها ست، و $\mathcal{E}_i$ ها تابعیها یی از $\boldsymbol{q}$ و زمان ند. می‌گویم این سیستم با کنش ِ S تُصیف میشود، اگر

$$\forall\ (i,t,\boldsymbol{q})\ :\ \mathcal{E}_i(t,\boldsymbol{q}) = \lim_{\substack{t_1\to-\infty\\ t_2\to+\infty}} \frac{\delta S_{[t_1,t_2]}(\boldsymbol{q})}{\delta q^i(t)}. \tag{2}$$

$S_{[t_1,t_2]}$ یک تابعی از $\boldsymbol{q}$ ست. اگر حد ِ $S_{[t_1,t_2]}$ در $t_1\to-\infty$ و $t_2\to+\infty$ وجود داشته باشد، و جا یِ مشتقگیری و حدگیری را بشود عوض کرد، آن وقت میشود شکل ِ ساده‌تر ی برا یِ (2) نوشت:

$$\forall\ (i,t,\boldsymbol{q})\ :\ \mathcal{E}_i(t,\boldsymbol{q}) = \frac{\delta S(\boldsymbol{q})}{\delta q^i(t)}, \tag{3}$$

که

$$S := \lim_{\substack{t_1\to-\infty\\ t_2\to+\infty}} S_{[t_1,t_2]}. \tag{4}$$

اگر $S_{[t_1,t_2]}$ در $t_1\to-\infty$ و $t_2\to+\infty$ حد نداشته باشد، یا جا یِ مشتقگیری و حدگیری را نشود عوض کرد هم، از این پس (3) را به عنوان ِ یک نمایش ِ ساده‌تر ِ (2) به کار میبرم. به تابعی یِ S (یا تابعی یِ $S_{[t_1,t_2]}$) تابعی یِ کنش میگویم.

میگویم تابع ِ R از t و $\boldsymbol{q}$ مُضعی ست، اگر n (ِ باپایان) ی باشد که

$$\forall\ (t,\boldsymbol{q})\ :\ R(t,\boldsymbol{q}) = R[t,\boldsymbol{q}(t),\dots,\boldsymbol{q}^{(n)}(t)]. \tag{5}$$

$\boldsymbol{q}^{(k)}$ یعنی مشتق ِ kاُم ِ $\boldsymbol{q}$. اگر (5) برقرار باشد، می‌گویم تابع ِ مُضعی یِ R، از مرتبه یِ دست- ِ-بالا n است.

می‌گویم کنش مُضعی است، اگر تابع ِ مُضعی یِ L ی باشد که

$$\forall\ (t_1,t_2,\boldsymbol{q})\ :\ S_{[t_1,t_2]}(\boldsymbol{q}) = \int_{t_1}^{t_2} \mathrm{d}t\, L(t,\boldsymbol{q}). \tag{6}$$

به تابع ِ L در این رابطه، لَگرانژی میگویم. پس کنش مُضعی است، اگر انتگرال ِ یک لَگرانژی یِ مُضعی باشد.

به ساده‌گی دیده میشود

قضیه یِ 1: گیرم S کنش ِ متناظر با یک سیستم ِ مُضعی است. در این صورت،

$$\forall\ (t_1,t_2,t_3)\ :\ S_{[t_1,t_3]} = S_{[t_1,t_2]} + S_{[t_2,t_3]}, \tag{7}$$

(کنش فزونوَر است) و

$$\forall\ (i,t,\boldsymbol{q})\ :\ \mathcal{E}_i(t,\boldsymbol{q}) = \frac{\delta S_{[t_1,t_2]}(\boldsymbol{q})}{\delta q^i(t)}, \qquad t_1 < t < t_2 \tag{8}$$

یعنی طرفِ چپِ عبارتِ بالا به t_1 و t_2 بسته‌گی ندارد.

اثبات: فزووَربودنِ کنش از (6) نتیجه میشود. برا یِ به-دست-آوردنِ (8) هم، کافی است بگیرم $t_1' < t_1$ و $t_2' > t_2$. دیده میشود وردشِ $S_{[t_1',t_1]}$ و $S_{[t_2,t_2']}$ نسبت به $\boldsymbol{q}(t)$ صفر است، و از آنجا

$$\frac{\delta S_{[t_1',t_2']}(\boldsymbol{q})}{\delta q^i(t)} = \frac{\delta S_{[t_1,t_2]}(\boldsymbol{q})}{\delta q^i(t)}, \tag{9}$$

که نشان میدهد حدِ طرفِ چپ در $t_1' \to -\infty$ و $t_2' \to +\infty$ هم با طرفِ راست برابر است.

■

میگویم یک کنشِ مُضعی از مرتبه یِ دست- ِبالا n است، اگر تابعها یِ مُضعی یِ L و Λ یی باشند که

$$\forall\ (t_1,t_2,\boldsymbol{q})\ :\ S_{[t_1,t_2]}(\boldsymbol{q}) = \int_{t_1}^{t_2} \mathrm{d}t\ \left[L(t,\boldsymbol{q}) + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Lambda(t,\boldsymbol{q})\right], \tag{10}$$

و L از مرتبه یِ دست- ِبالا n باشد.

قضیه یِ 2: کنشِ مُضعی یِ S از مرتبه یِ دست- ِبالا n است، اگر و تنها اگر تابعها یِ L و $\tilde{\Lambda}$ یی باشند که

$$\forall\ (t_1,t_2,\boldsymbol{q})\ :\ S_{[t_1,t_2]}(\boldsymbol{q}) = \tilde{\Lambda}(t_2,t_1,\boldsymbol{q}) + \int_{t_1}^{t_2} \mathrm{d}t\, L(t,\boldsymbol{q}), \tag{11}$$

که L مُضعی و از مرتبه یِ دست- ِبالا n است، و m ی هست که

$$\forall\ (t_1,t_2,\boldsymbol{q})\ :$$
$$\tilde{\Lambda}(t_2,t_1,\boldsymbol{q}) = \tilde{\Lambda}[t_2,\boldsymbol{q}(t_2),\dots,\boldsymbol{q}^{(m)}(t_2);t_1,\boldsymbol{q}(t_1),\dots,\boldsymbol{q}^{(m)}(t_1)]. \tag{12}$$

اثبات: اگر (10) برقرار باشد، آنگاه (11) با

$$\begin{aligned}&\tilde{\Lambda}[t_2,\boldsymbol{q}(t_2),\dots,\boldsymbol{q}^{(m)}(t_2);t_1,\boldsymbol{q}(t_1),\dots,\boldsymbol{q}^{(m)}(t_1)]\\ &:= \Lambda[t_2,\boldsymbol{q}(t_2),\dots,\boldsymbol{q}^{(m)}(t_2)] - \Lambda[t_1,\boldsymbol{q}(t_1),\dots,\boldsymbol{q}^{(m)}(t_1)]\end{aligned} \tag{13}$$

برقرار است. اگر (11) برقرار باشد، آنگاه از فزونوَربودنِ کنش نتیجه میشود

$$\begin{aligned}\forall\ (t_1,t_2,t_3,\boldsymbol{q})\ :\ ,&\tilde{\Lambda}[t_3,\boldsymbol{q}(t_3),\dots,\boldsymbol{q}^{(m)}(t_3);t_1,\boldsymbol{q}(t_1),\dots,\boldsymbol{q}^{(m)}(t_1)]\\ &= \tilde{\Lambda}[t_2,\boldsymbol{q}(t_2),\dots,\boldsymbol{q}^{(m)}(t_2);t_1,\boldsymbol{q}(t_1),\dots,\boldsymbol{q}^{(m)}(t_1)]\\ &\quad + \tilde{\Lambda}[t_3,\boldsymbol{q}(t_3),\dots,\boldsymbol{q}^{(m)}(t_3);t_2,\boldsymbol{q}(t_2),\dots,\boldsymbol{q}^{(m)}(t_2)].\end{aligned} \tag{14}$$

حالا کافی ست یک t_0 ِ ثابت بگیرم و تعریف کنم

$$\Lambda[t, \boldsymbol{q}(t), \dots, \boldsymbol{q}^{(m)}(t)] := \tilde{\Lambda}[t, \boldsymbol{q}(t), \dots, \boldsymbol{q}^{(m)}(t); t_0, \boldsymbol{q}(t_0), \dots, \boldsymbol{q}^{(m)}(t_0)]. \qquad (15)$$

دیده میشود (10) برقرار است.

■

رُشن است که اگر یک کنش ِ مُضعی از مرتبه یِ دست- ِ-بالا n باشد و $n' > n$، آنگاه آن کنش از مرتبه یِ دست- ِ-بالا n' هم هست.

قضیه یِ 3: گیرم کنش ِ مُضعی یِ S از مرتبه یِ دست- ِ-بالا n است. در این صورت معادله یِ حرکت ِ سیستم یک معادله یِ دیفرانسیل ِ از مرتبه یِ دست- ِ-بالا $(2\,n)$ است. (یعنی $\mathcal{E}_i$ یک تابع ِ مُضعی از مرتبه یِ دست- ِ-بالا $(2\,n)$ است.) اگر S به شکل ِ (10) یا (11) باشد، آنگاه،

$$\forall\ (i, t, \boldsymbol{q})\ :\ \mathcal{E}_i(t, \boldsymbol{q}) = \frac{\partial L}{\partial q^i} + (-1)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}\right) + \cdots + (-1)^n \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right)^n \left(\frac{\partial L}{\partial q^{i\,(n)}}\right). \qquad (16)$$

اثبات: میگیرم $t_1 < t < t_2$. دیده میشود وردش ِ انتگرال ِ $(\mathrm{d}\Lambda/\mathrm{d}t)$ در (10)، یا وردش ِ $\tilde{\Lambda}$ در (11)، نسبت به $\boldsymbol{q}(t)$ صفر است. پس،

$$\frac{\delta S(\boldsymbol{q})}{\delta q^i(t)} = \frac{\delta}{\delta q^i(t)} \int_{t_1}^{t_2} \mathrm{d}t\, L(t, \boldsymbol{q}). \qquad (17)$$

از اینجا (16) به ساده‌گی نتیجه میشود [1]. هر یک از جمله‌ها یِ طرف ِ راست ِ (16) (پیش از مشتقگیری نسبت به t) شامل ِ مشتق ِ دست- ِ-بالا n ُم ِ $\boldsymbol{q}$ ست. پس طرف ِ راست ِ (16) شامل ِ مشتق ِ دست- ِ-بالا $(2\,n)$ ُم ِ $\boldsymbol{q}$ ست.

■

2 کنشها یِ هم‌ارز

قضیه یِ 4: گیرم S یک کنش ِ مُضعی ست. در این صورت معادله یِ حرکت ِ سیستم ِ متناظر با S اتحاد است، اگر و تنها اگر تابع ِ مُضعی یِ Λ یی باشد که

$$\forall\ (t_1, t_2, \boldsymbol{q})\ :\ S_{[t_1,t_2]}(\boldsymbol{q}) = \int_{t_1}^{t_2} \mathrm{d}t\, \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Lambda(t, \boldsymbol{q}). \qquad (18)$$

اثبات: اگر S به شکلِ (18) باشد، از قضیه یِ 3 نتیجه میشود

$$\forall\ (i, t, \boldsymbol{q})\ :\ \mathcal{E}_i(t, \boldsymbol{q}) = 0. \tag{19}$$

بر عکس، فرض میکنم (6) و (19) برقرار ند. حالتِ $n > 0$ را در نظر میگیرم. از (16) دیده میشود در وردشِ S نسبت به $\boldsymbol{q}$، فقط توانِ اولِ مشتقِ $(2\,n)$ اُمِ $\boldsymbol{q}$ ظاهر میشود. پس ضریبِ مشتقِ $(2\,n)$ اُمِ $\boldsymbol{q}$ در وردشِ S نسبت به $\boldsymbol{q}$ باید صفر باشد:

$$\frac{\partial^2 L}{\partial q^{i\,(n)}\,\partial q^{j\,(n)}} = 0, \tag{20}$$

و از آنجا نتیجه میشود M_i ها و N ی هستند که

$$L(t, \boldsymbol{q}) = q^{i\,(n)}(t)\,M_i[t, \boldsymbol{q}(t), \dots, \boldsymbol{q}^{(n-1)}(t)] + N[t, \boldsymbol{q}(t), \dots, \boldsymbol{q}^{(n-1)}(t)]. \tag{21}$$

با این شکلِ L، از (16) دیده میشود در وردشِ S نسبت به $\boldsymbol{q}$، فقط توانِ اولِ مشتقِ $(2\,n-1)$ اُمِ $\boldsymbol{q}$ ظاهر میشود. پس ضریبِ مشتقِ $(2\,n-1)$ اُمِ $\boldsymbol{q}$ در وردشِ S نسبت به $\boldsymbol{q}$ باید صفر باشد:

$$\frac{\partial M_i}{\partial q^{j\,(n-1)}} - \frac{\partial M_j}{\partial q^{i\,(n-1)}} = 0, \tag{22}$$

و از آنجا نتیجه میشود M ی هست که

$$M_i[t, \boldsymbol{q}(t), \dots, \boldsymbol{q}^{(n-1)}(t)] = \frac{\partial}{\partial q^{i\,(n-1)}} M[t, \boldsymbol{q}(t), \dots, \boldsymbol{q}^{(n-1)}(t)]. \tag{23}$$

از (21) نتیجه میشود

$$L = \frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}t} + N + K, \tag{24}$$

که

$$K(t, \boldsymbol{q}) = \left[q^{i\,(n)}(t)\,\frac{\partial}{\partial q^{i\,(n-1)}} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right]\ M[t, \boldsymbol{q}(t), \dots, \boldsymbol{q}^{(n-1)}(t)]. \tag{25}$$

طرفِ راست، شاملِ مشتقِ n اُمِ $\boldsymbol{q}$ نیست. از اینجا نتیجه میشود $\tilde{L}$ ی هست که

$$L(t, \boldsymbol{q}) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\,M[t, \boldsymbol{q}(t), \dots, \boldsymbol{q}^{(n)}(t)] + \tilde{L}[t, \boldsymbol{q}, \dots, \boldsymbol{q}^{(n-1)}]. \tag{26}$$

از قضیه یِ 3 نتیجه میشود در محاسبه یِ وردشِ S نسبت به $\boldsymbol{q}$، میشود به جا یِ L از $\tilde{L}$ استفاده کرد. به این ترتیب، با یک استقرا یِ ساده رو یِ n نتیجه میشود Λ یی هست که

$$L = \frac{\mathrm{d}\Lambda}{\mathrm{d}t}. \tag{27}$$

(در واقع برا یِ کامل-کردنِ استقرا، باید حالتِ $n = 0$ را هم تحقیق کرد. این کار بسیار ساده است. اگر L تابعِ فقط t و $\boldsymbol{q}$ باشد، آنگاه از (19) نتیجه میشود مشتقِ L نسبت به $\boldsymbol{q}$ صفر است. پس L

تابع ِ فقط t است. اما هر تابع ِ t مشتق ِ کامل ِ زمانی یِ یک تابع ِ دیگر است.)

■

میگویم کنشها یِ S_1 و S_2 هم‌ارز ند، اگر معادله یِ حرکت ِ ناشی از $(S_2 - S_1)$ اتحاد باشد، یعنی اگر

$$\forall\ (i, t, \boldsymbol{q})\ :\ \mathcal{E}_{2\,i}(t, \boldsymbol{q}) = \mathcal{E}_{1\,i}(t, \boldsymbol{q}). \tag{28}$$

شاخص ِ اول ِ $\mathcal{E}$، نظیر ِ شاخص ِ S است. از قضیه یِ 4، به ساده‌گی دیده میشود

قضیه یِ 5: دُ کنش ِ مُضعی یِ S_1 و S_2 (متناظر با لَگرانژیها یِ L_1 و L_2) هم‌ارز ند، اگر و تنها اگر تابع ِ مُضعی یِ Λ یی باشد که

$$\forall\ (t, \boldsymbol{q})\ :\ L_2(t, \boldsymbol{q}) = L_1(t, \boldsymbol{q}) + \frac{\mathrm{d}\Lambda}{\mathrm{d}t}. \tag{29}$$

★

گیرم $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ یک وابرریختی ست. میگویم کنش ِ S_2، f هم‌ارز با کنش ِ S_1 است، اگر

$$\forall\ (i, t, \boldsymbol{q})\ :\ \mathcal{E}_{2\,i}[f(t), \boldsymbol{q} \circ f^{-1}]\ \left|\frac{\mathrm{d}f(t)}{\mathrm{d}t}\right| = \mathcal{E}_{1\,i}(t, \boldsymbol{q}). \tag{30}$$

قضیه یِ 6: کنش ِ مُضعی یِ S_2 (متناظر با لَگرانژی یِ L_2) f هم‌ارز با کنش ِ مُضعی یِ S_1 (متناظر با لَگرانژی یِ L_1) است، اگر و تنها اگر تابع ِ مُضعی یِ Λ یی باشد که

$$\forall\ (t, \boldsymbol{q})\ :\ L_2[f(t), \boldsymbol{q} \circ f^{-1}]\ \left|\frac{\mathrm{d}f(t)}{\mathrm{d}t}\right| = L_1(t, \boldsymbol{q}) + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Lambda(t, \boldsymbol{q}). \tag{31}$$

اثبات: تعریف میکنم

$$\tilde{L}_2(t, \boldsymbol{q}) := L_2[f(t), \boldsymbol{q} \circ f^{-1}]\ \left|\frac{\mathrm{d}f(t)}{\mathrm{d}t}\right|. \tag{32}$$

به ساده‌گی دیده میشود طرف ِ راست تابع ِ فقط t و $\boldsymbol{q}$ و تعداد ِ باپایان ی از مشتقها یَش در t ست. پس $\tilde{L}_2$ یک تابع ِ مُضعی ست. تعریف میکنم

$$\tilde{S}_{2\,[t_1,t_2]}(\boldsymbol{q}) := \int_{t_1}^{t_2} \mathrm{d}t\, \tilde{L}_2(t, \boldsymbol{q}). \tag{33}$$

به ساده‌گی دیده میشود

$$\tilde{S}_{2\,[t_1,t_2]}(\boldsymbol{q}) = S_{2\,f[t_1,t_2]}(\boldsymbol{q} \circ f^{-1}). \tag{34}$$

از اینجا،

$$
\begin{aligned}
\tilde{\mathcal{E}}_{2\,i}(t,\boldsymbol{q}) &= \frac{\delta \tilde{S}_{2\,[t_1,t_2]}}{\delta q^i(t)},\\
&= \int_{f[t_1,t_2]} \mathrm{d}t'\, \frac{\delta S_{2\,f[t_1,t_2]}}{\delta q^j(t')}\bigg|_{\boldsymbol{q}\to\boldsymbol{q}\circ f^{-1}} \frac{\delta (q^j\circ f^{-1})(t')}{\delta q^i(t)},\\
&= \int_{f[t_1,t_2]} \mathrm{d}t'\, \frac{\delta S_{2\,f[t_1,t_2]}}{\delta q^j(t')}\bigg|_{\boldsymbol{q}\to\boldsymbol{q}\circ f^{-1}} \delta[t-f^{-1}(t')]\,\delta^j_i,\\
&= \int_{f[t_1,t_2]} \mathrm{d}t'\, \frac{\delta S_{2\,f[t_1,t_2]}}{\delta q^i(t')}\bigg|_{\boldsymbol{q}\to\boldsymbol{q}\circ f^{-1}} \delta[f(t)-t']\,\left|\frac{\mathrm{d}f(t)}{\mathrm{d}t}\right|\\
&= \frac{\delta S_{2\,f[t_1,t_2]}}{\delta q^i[f(t)]}\bigg|_{\boldsymbol{q}\to\boldsymbol{q}\circ f^{-1}} \left|\frac{\mathrm{d}f(t)}{\mathrm{d}t}\right|,\\
&= \mathcal{E}_{2\,i}[f(t),\boldsymbol{q}\circ f^{-1}]\,\left|\frac{\mathrm{d}f(t)}{\mathrm{d}t}\right|.
\end{aligned}
\tag{35}
$$

دیده میشود S_2، f هم‌ارز با S_1 است، اگر و تنها اگر $\tilde{S}_2$ با S_1 هم‌ارز باشد. از این‌جا با تعریفِ (32) و با استفاده از قضیه یِ 5، حکم نتیجه میشود.

■

همچنین،

قضیه یِ 7: کنشِ مُضعی یِ S_2، f هم‌ارز با کنشِ مُضعی یِ S_1 است؛ اگر و تنها اگر S_1، f^{-1} هم‌ارز با S_2 باشد.

اثبات: کافی ست در (30)، به جا یِ $\boldsymbol{q}\circ f^{-1}$ بگذارم $\boldsymbol{q}'$، و به جا یِ $f(t)$ بگذارم t'.

■

هم‌ارزی یِ دُ کنش حالتِ خاص ی از f هم‌ارزی ست، که f همانی ست.

f هم‌ارزی یِ S_2 با S_1 نتیجه میدهد $\boldsymbol{q}$ یک جوابِ معادله یِ حرکتِ ناشی از S_1 است، اگر و تنها اگر $\boldsymbol{q}\circ f^{-1}$ یک جوابِ معادله یِ حرکتِ ناشی از S_2 باشد. اما عکسِ این مطلب درست نیست. یعنی از این که ($\boldsymbol{q}$ یک جوابِ معادله یِ حرکتِ ناشی از S_1 است، اگر و تنها اگر $\boldsymbol{q}\circ f^{-1}$ یک جوابِ معادله یِ حرکتِ ناشی از S_2 باشد)، f هم‌ارزی یِ S_2 با S_1 نتیجه نمیشود. یک مثالِ ساده این است که یک کنش برابر باشد با حاصل‌ضربِ یک ثابت در یک کنشِ دیگر. (مثالها یِ پیچیده‌تر ی هم هست، مثلَن مسئله یِ 18 در فصلِ 1 از مرجعِ [2]).

3 تقارن

یک سیستم با متغیرها یِ دینامیکی یِ $\boldsymbol{q}$ و یک معادله یِ تحول را در نظر میگیرم. میگویم $\mathcal{O}$ یک تقارن ِ این سیستم است، اگر $\mathcal{O}$ این ویژه‌گیها را داشته باشد.

a $\mathcal{O}$ یک نگاشت از مجموعه یِ مسیرها یِ سیستم به مجموعه یِ مسیرها یِ سیستم است.

b $\mathcal{O}$ وارونپذیر است.

c $\boldsymbol{q}$ یک جواب ِ معادله یِ حرکت ِ سیستم است، اگر و تنها اگر $\mathcal{O}(\boldsymbol{q})$ هم یک جواب ِ معادله یِ حرکت ِ سیستم باشد.

به ساده‌گی دیده میشود

قضیه یِ 8: مجموعه یِ تقارنها یِ هر سیستم، با عمل ِ ترکیب ِ نگاشتها، یک گروه است.

★

گیرم G^i ها تابعها یی از زمان و مسیر ند. میگویم $\boldsymbol{G}$ یک مولد- ِ-تقارن ِ سیستم است، اگر از

$$\forall\ (i,t)\ :\ \mathcal{E}_i(t,\boldsymbol{q})=0, \tag{36}$$

نتیجه شود

$$\forall\ (i,t)\ :\ \left[\frac{\partial}{\partial s}\mathcal{E}_i(t,\boldsymbol{q}+s\,\boldsymbol{G})\right]_{s=0}=0. \tag{37}$$

به جا یِ اگر (36) آنگاه

$$R(\boldsymbol{q})=0, \tag{38}$$

مینویسم

$$R(\boldsymbol{q})\overset{\text{ns}}{=}0, \tag{39}$$

و میگویم R رو یِ لاک صفر است. در این صورت میشود گفت: $\boldsymbol{G}$ یک مولد- ِ-تقارن ِ سیستم است، اگر

$$\forall\ (i,t)\ :\ \left[\frac{\partial}{\partial s}\mathcal{E}_i(t,\boldsymbol{q}+s\,\boldsymbol{G})\right]_{s=0}\overset{\text{ns}}{=}0. \tag{40}$$

میگویم $\boldsymbol{G}$ یک مولد- ِ-تقارن ِ کنش است، اگر مشتق ِ S_s نسبت به s، با

$$\forall\ (s,\boldsymbol{q})\ :\ S_s(\boldsymbol{q}):=S(\boldsymbol{q}+s\,\boldsymbol{G}), \tag{41}$$

در $s=0$، هم‌ارز با صفر باشد.

میگویم تابع ِ R از t و $\boldsymbol{q}$ جایگزیده است، اگر T یی باشد که

$$[\forall\ (i,t_1,t_2)\mid |t_2-t_1|>T]\ :\ \frac{\delta R(t_1,\boldsymbol{q})}{\delta q^i(t_2)}=0. \qquad (42)$$

رُشن است که هر تابع ِ مُضعی، جایگزیده هم هست.

میگویم $\boldsymbol{G}$ یک مولد- ِ-تقارن ِ جایگزیده (مُضعی) یِ سیستم (کنش) است، اگر $\boldsymbol{G}$ یک مولد- ِ-تقارن ِ سیستم (کنش) باشد، و یک تابع ِ جایگزیده (مُضعی) باشد.

قضیه یِ 9: اگر $\boldsymbol{G}$ یک مولد- ِ-تقارن ِ جایگزیده (مُضعی) یِ کنش باشد، آنگاه $\boldsymbol{G}$ یک مولد- ِ-تقارن ِ جایگزیده (مُضعی) یِ سیستم ِ متناظر با آن کنش است.

اثبات: گیرم $\boldsymbol{G}$ جایگزیده است.

$$\frac{\delta S_{[t_1,t_2]}(\boldsymbol{q}+s\,\boldsymbol{G})}{\delta q^i(t)}=\int_{t-T}^{t+T}\mathrm{d}t'\ \left.\frac{\delta S_{[t_1,t_2]}(\boldsymbol{q})}{\delta q^j(t')}\right|_{\boldsymbol{q}\to(\boldsymbol{q}+s\,\boldsymbol{G})}\frac{\delta(\boldsymbol{q}+s\,\boldsymbol{G})^j(t')}{\delta q^i(t)}. \qquad (43)$$

(بیرون ِ ناحیه یِ انتگرالگیری یِ طرف ِ راست، انتگرالده صفر است.) از این رابطه نسبت به s مشتق میگیرم و s را صفر میگذارم. در حاصل، میگذارم $t_1\to-\infty$ و $t_2\to+\infty$. طرف ِ چپ صفر میشود. پس،

$$\left\{\frac{\partial}{\partial s}\left[\frac{\delta S(\boldsymbol{q})}{\delta q^i(t)}\right]_{\boldsymbol{q}\to(\boldsymbol{q}+s\,\boldsymbol{G})}\right\}_{s=0}+\int_{t-T}^{t+T}\mathrm{d}t'\ \frac{\delta S(\boldsymbol{q})}{\delta q^j(t')}\,\frac{\delta G^j(t')}{\delta q^i(t)}=0, \qquad (44)$$

یا

$$\left[\frac{\partial}{\partial s}\mathcal{E}_i(t,\boldsymbol{q}+s\,\boldsymbol{G})\right]_{s=0}+\int_{t-T}^{t+T}\mathrm{d}t'\,\mathcal{E}_j(t',\boldsymbol{q})\,\frac{\delta G^j(t')}{\delta q^i(t)}=0, \qquad (45)$$

که از آن (40) نتیجه میشود.

■

به یک مولد- ِ-تقارن ِ مُضعی یِ یک کنش ِ مُضعی، یک مولد- ِ-تقارن ِ نُتِری یِ سیستم ِ متناظر با آن کنش هم میگویم.

یک نتیجه یِ ساده یِ قضیه یِ 5 این است که

قضیه یِ 10: $\boldsymbol{G}$ یک مولد- ِ-تقارن ِ نُتِری یِ یک سیستم با کنش ِ مُضعی یِ S متناظر با لگرانژی یِ L است، اگر و تنها اگر تابع ِ مُضعی یِ Λ یی باشد که

$$\forall\ (t,\boldsymbol{q})\ :\ \left[\frac{\partial}{\partial s}L(t,\boldsymbol{q}+s\,\boldsymbol{G})\right]_{s=0}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Lambda(t,\boldsymbol{q}). \qquad (46)$$

★

4 ثابتِ حرکت

میگویم تابعی یِ I از t و $\boldsymbol{q}$ یک ثابتِ حرکت است، اگر

$$\forall\, t\ :\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\, I(t,\boldsymbol{q}) \overset{\text{ns}}{=} 0. \tag{47}$$

قضیه یِ 11: گیرم I یک ثابت-ِ-حرکتِ سیستم ی است، که معادله یِ حرکتِ آن به شکلِ (1) است، $\mathcal{E}_i$ ها مُضعی و از مرتبه یِ دست-ِ-بالا n ند، و رتبه یِ ماتریسِ D با

$$\forall\, (t,\boldsymbol{q})\ :\ D^i{}_j(t,\boldsymbol{q}) := \frac{\partial \mathcal{E}_i(t,\boldsymbol{q})}{\partial q^{j\,(n)}(t)} \tag{48}$$

ثابت (مثلَن m) است. در این صورت، اگر I یک تابعِ مُضعی باشد، آنگاه یک تابعِ مُضعی یِ دیگرِ $\tilde{I}$ هست که از مرتبه یِ دست-ِ-بالا $(n-1)$ است، و

$$\forall\, t\ :\ I(t,\boldsymbol{q}) \overset{\text{ns}}{=} \tilde{I}(t,\boldsymbol{q}). \tag{49}$$

(تساوی یِ بالا به طَرِ مُضعی درست است. ممکن است $\tilde{I}$ ی نباشد که در کلِ فضا یِ مسیرها رابطه یِ بالا را برقرار کند.)

اثبات: گیرم I از مرتبه یِ دست-ِ-بالا r است. اگر $r < n$، آنگاه $\tilde{I}$ را خودِ I میگیرم. گیرم $r \geq n$. تعدادِ متغیرها یِ دینامیکی یِ سیستم را با l نشان میدهم. تعریف میکنم

$$\forall\, (t,\boldsymbol{q})\ :\ R_i(t,\boldsymbol{q}) := \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right)^{r-n} \mathcal{E}_i(t,\boldsymbol{q}). \tag{50}$$

رُشن است که

$$\forall\, t\ :\ \boldsymbol{R}(t,\boldsymbol{q}) \overset{\text{ns}}{=} 0, \tag{51}$$

و $\boldsymbol{R}$ یک تابعِ مُضعی و از مرتبه یِ دست-ِ-بالا r است. از (48) نتیجه میشود رتبه یِ ماتریسِ مشتقِ $\boldsymbol{R}$ نسبت به $\boldsymbol{q}^{(r)}$ هم m است. به این ترتیب، از (51) نتیجه میشود مُضعَن $(l-m)$ متغیرِ x^1 تا x^{l-m} هست که

$$\forall\, t\ :\ q^{i\,(r)}(t) \overset{\text{ns}}{=} f^i[t,\boldsymbol{q}(t),\dots,\boldsymbol{q}^{(r-1)}(t),\boldsymbol{x}(t)]. \tag{52}$$

این عبارت را در I میگذارم و از آن مشتقِ کاملِ زمانی میگیرم. نتیجه میشود

$$\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} \overset{\text{ns}}{=} A + \frac{\partial I}{\partial x^a}\, \dot{x}^a. \tag{53}$$

A شامل ِ جمله‌ها یی مستقل از $\dot{x}^a$ ها ست. طرف ِ چپ ِ رابطه ی ِ بالا، مستقل از مقدار ِ $\dot{x}^a$ ها صفر است. پس ضریب ِ $\dot{x}^a$ ها در طرف ِ راست، باید صفر باشد:

$$\frac{\partial I}{\partial x^a} \stackrel{\text{ns}}{=} 0. \qquad (54)$$

تعریف میکنم

$$\forall\ (t, \boldsymbol{q})\ :\ J(t, \boldsymbol{q}) := I\{t, \boldsymbol{q}(t), \dots, \boldsymbol{q}^{(r-1)}(t), \boldsymbol{f}[t, \boldsymbol{q}(t), \dots, \boldsymbol{q}^{(r-1)}(t), \boldsymbol{x}_0(t)]\}, \qquad (55)$$

که $\boldsymbol{x}_0(t)$ یک مقدار ِ دلبخاه است. از (54) دیده میشود طرف ِ راست، رو ی ِ لاک به $\boldsymbol{x}_0$ بسته‌گی ندارد. پس رو ی ِ لاک، به جا ی ِ $\boldsymbol{x}_0$ میشود $\boldsymbol{x}$ یی گذاشت که $\boldsymbol{f}$ با $\boldsymbol{q}^{(r)}$ برابر شود. در این صورت رو ی ِ لاک، J با I برابر است. J از مرتبه ی ِ دست- ِ-بالا $(r-1)$ است. حالا با یک استقرا ی ِ ساده رو ی ِ r، حکم ثابت میشود.

■

معنی ی ِ این قضیه آن است که اگر معادله ی ِ حرکت ِ سیستم ی یک معادله ی ِ دیفرانسیل از مرتبه ی ِ n باشد، آنگاه هر ثابت- ِ-حرکت ِ مُضعی ی ِ آن سیستم را میشود با تابع ی مُضعی از مرتبه ی ِ دست- ِ-بالا $(n-1)$ نمایش داد. از این پس وقت ی از یک ثابت- ِ-حرکت ِ مُضعی برا یِ سیستم ی که معادله ی ِ حرکت َش یک معادله ی ِ دیفرانسیل ِ از مرتبه ی ِ n است حرف میزنم، منظور این است که آن ثابت- ِ-حرکت یک تابع ِ مُضعی از مرتبه ی ِ دست- ِ-بالا $(n-1)$ است.

5 تقارن و ثابت- ِ-حرکت

S را یک کنش ِ از مرتبه ی ِ دست- ِ-بالا میگیرم. تکانه ی ِ $\boldsymbol{p}$ را به این شکل تعریف می‌کنم.

$$\forall\ (i, t, \boldsymbol{q})\ :\ p_i(t, \boldsymbol{q}) := \frac{\partial L[t, \boldsymbol{q}(t), \dot{\boldsymbol{q}}(t)]}{\partial \dot{q}^i(t)}, \qquad (56)$$

که در آن، L لَگرانژی ی ِ متناظر با S است. (در واقع L تابع ی ست که در (10) یا (11) ظاهر شده. ممکن است لَگرانژی ی ِ سیستم به مثلَن مشتق ِ دوم ِ $\boldsymbol{q}$ هم بسته‌گی داشته باشد. اما در این صورت میشود یک مشتق ِ کامل ِ زمانی از آن بیرون کشید، چنان که باقیمانده یک تابع ِ مُضعی ی ِ از مرتبه ی ِ

دست- ِ-بالا یک شود.) دیده میشود

$$\forall\ (i,t,\boldsymbol{q})\ :\ \mathcal{E}_i = \frac{\partial L}{\partial q^i} - \frac{\mathrm{d}p_i}{\mathrm{d}t}. \tag{57}$$

قضیه یِ 12: گیرم $\boldsymbol{G}$ یک مولد- ِ-تقارن ِ نُتِری یِ یک سیستم با کنش ِ S است، که S از مرتبه یِ دست- ِ-بالا یک است. در این صورت I با

$$\forall\ (t,\boldsymbol{q})\ :\ I(t,\boldsymbol{q}) := p_i(t,\boldsymbol{q})\, G^i(t,\boldsymbol{q}) - \Lambda(t,\boldsymbol{q}), \tag{58}$$

یک ثابت ِ حرکت است. L لگرانژی یِ (از مرتبه یِ دست- ِ-بالا یک ِ) کنش است، و Λ هم ان تابع ی است که در (46) ظاهر شده.

اثبات: از (46) نتیجه میشود

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}\Lambda}{\mathrm{d}t} &= \frac{\partial L}{\partial q^i}\, G^i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}\, \dot{G}^i,\\ &= \mathcal{E}_i\, G^i + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}\right) G^i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}\, \dot{G}^i,\end{aligned} \tag{59}$$

و از آنجا،

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(p_i\, G^i - \Lambda) \overset{\mathrm{ns}}{=} 0. \tag{60}$$

■

تابع ِ f از $\boldsymbol{x}$ را در نظر میگیرم، و فرض میکنم

$$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{R}(\boldsymbol{x}). \tag{61}$$

ممکن است تابعیت ِ $\boldsymbol{y}$ از $\boldsymbol{x}$ موضعَن وارونپذیر نباشد. می‌گویم f یک شبه- ِ-تابع ِ $\boldsymbol{y}$ است، اگر تابعها یِ G_i ی از $\boldsymbol{x}$ باشند که

$$\forall\ (\boldsymbol{x},\mathrm{d}\boldsymbol{x})\ :\ \mathrm{d}f = G_i\, \mathrm{d}y^i = G_i\, \frac{\partial R^i(\boldsymbol{x})}{\partial x^a}\, \mathrm{d}x^a. \tag{62}$$

در این صورت به G_i شبه- ِ-مشتق ِ f نسبت به y^i میگویم. G_i ها لزومَن یکتا نیستند. در واقع اگر y^i ها، به عنوان ِ تابع ِ $\boldsymbol{x}$ مستقل نباشند، g_i ها یی هستند که

$$\forall\ (\boldsymbol{x},\mathrm{d}\boldsymbol{x})\ :\ g_i(\boldsymbol{x})\, \mathrm{d}y^i = 0. \tag{63}$$

در این صورت رُشن است که (62)، اگر با G_i ها برقرار باشد، با $\tilde{G}_i$ ها با

$$\tilde{G}_i := G_i + \alpha\, g_i \tag{64}$$

هم برقرار است، که α تابع ی دلبخاه است. همچنین، رُشن است که اگر $\tilde f$ ی باشد که تابع ِ $\boldsymbol{y}$ باشد و

$$\forall\ \boldsymbol{x}\ :\ \tilde f[\boldsymbol{R}(\boldsymbol{x})] = f(\boldsymbol{x}), \tag{65}$$

آنگاه G_i را میشود مشتق ِ $\tilde f$ نسبت به y^i گرفت.

قضیه یِ 13: گیرم $I[t,\boldsymbol{q}(t),\dot{\boldsymbol{q}}(t)]$ یک ثابت- ِ-حرکت ِ سیستم ی متناظر با یک کنش ِ مُضعی یِ از مرتبه یِ دست- ِ-بالا یک است، و معادله یِ حرکت ِ سیستم برا یِ هر شرط ِ اولیه یِ $\boldsymbol{q}(t_0)$ و $\dot{\boldsymbol{q}}(t_0)$ جواب دارد (نَ لزومَن جواب ِ یکتا). در این صورت I یک شبهِتابع ِ t و $\boldsymbol{q}(t)$ و $\boldsymbol{p}(t)$ است. از جمله G^i ها یی هستند که

$$\forall\ (t,\boldsymbol{q})\ :\ \frac{\partial I[t,\boldsymbol{q}(t),\dot{\boldsymbol{q}}(t)]}{\partial \dot q^i(t)} = G^j[t,\boldsymbol{q}(t),\dot{\boldsymbol{q}}(t)]\,\frac{\partial p_j[t,\boldsymbol{q}(t),\dot{\boldsymbol{q}}(t)]}{\partial \dot q^i(t)}. \tag{66}$$

اثبات: معادله یِ حرکت

$$\frac{\partial p_i}{\partial \dot q^j}\,\ddot q^j = F_i[t,\boldsymbol{q}(t),\dot{\boldsymbol{q}}(t)] \tag{67}$$

است. $\boldsymbol{n}$ را در هسته یِ ماتریس ِ مشتق ِ $\boldsymbol{p}$ نسبت به $\dot{\boldsymbol{q}}$ میگیرم:

$$\forall\ (i,t,\boldsymbol{q})\ :\ \frac{\partial p_i[t,\boldsymbol{q}(t),\dot{\boldsymbol{q}}(t)]}{\partial \dot q^j}\,n^j[t,\boldsymbol{q}(t),\dot{\boldsymbol{q}}(t)] = 0. \tag{68}$$

دیده میشود اگر $\ddot{\boldsymbol{q}}$ رابطه یِ (67) را براورَد، آنگاه $(\ddot{\boldsymbol{q}}+\alpha\,\boldsymbol{n})$ هم این رابطه را بر میآورَد. از سو یِ دیگر،

$$\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial I}{\partial \dot q^j}\,\ddot q^j + A[t,\boldsymbol{q}(t),\dot{\boldsymbol{q}}(t)]. \tag{69}$$

طرف ِ راست باید رو یِ لاک صفر باشد. از جمله، اگر t و $\boldsymbol{q}(t)$ و $\dot{\boldsymbol{q}}(t)$ ثابت باشند و $\ddot{\boldsymbol{q}}(t)$ چنان تغییر کند که معادله یِ حرکت برقرار بماند، طرف ِ راست نباید تغییر کند. پس،

$$\forall\ (t,\boldsymbol{q})\ :\ \frac{\partial I[t,\boldsymbol{q}(t),\dot{\boldsymbol{q}}(t)]}{\partial \dot q^j(t)}\,n^j[t,\boldsymbol{q}(t),\dot{\boldsymbol{q}}(t)] = 0. \tag{70}$$

یعنی هر $\boldsymbol{n}$ که (68) را براورَد، باید (70) را هم براورَد. این نشان میدهد مشتق ِ I نسبت به $\dot{\boldsymbol{q}}$، یک ترکیب ِ خطی از مشتق ِ p_i ها نسبت به $\dot{\boldsymbol{q}}$ ست. ضرایب ِ این ترکیب را G^i مینامم. نتیجه میشود

$$\begin{aligned}\mathrm{d}I &= \frac{\partial I}{\partial t}\,\mathrm{d}t + \frac{\partial I}{\partial q^i}\,\mathrm{d}q^i + G^j\,\frac{\partial p_j}{\partial \dot q^i}\,\mathrm{d}\dot q^i,\\ &= \left(\frac{\partial I}{\partial t} - G^j\,\frac{\partial p_j}{\partial t}\right)\mathrm{d}t + \left(\frac{\partial I}{\partial q^i} - G^j\,\frac{\partial p_j}{\partial q^i}\right)\mathrm{d}q^i + G^j\,\mathrm{d}p_j,\end{aligned} \tag{71}$$

که حکم را نشان میدهد.

■

قضیه یِ 14: سیستم ی متناظر با یک کنش ِ مُضعی یِ از مرتبه یِ دست- ِ-بالا یک در نظر میگیرم. گیرم $I[t,\boldsymbol{q}(t),\dot{\boldsymbol{q}}(t)]$ یک شبه- ِ-تابع ِ t و $\boldsymbol{q}(t)$ و $\boldsymbol{p}(t)$ ست. در این صورت،

$$\forall\ (t,\boldsymbol{q})\ :\ \frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}+G^i\,\mathcal{E}_i=G^i\,\frac{\partial L}{\partial q^i}+\frac{\partial I}{\partial t}-G^j\,\frac{\partial p_j}{\partial t}+\left(\frac{\partial I}{\partial q^i}-G^j\,\frac{\partial p_j}{\partial q^i}\right)\dot{q}^i. \quad (72)$$

$\boldsymbol{G}$ شبه- ِ-مشتق ِ I نسبت به $\boldsymbol{p}$، و L لَگرانژی یِ سیستم است.

اثبات:

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}&=\frac{\partial I}{\partial t}+\frac{\partial I}{\partial q^i}\,\dot{q}^i+G^j\,\frac{\partial p_j}{\partial \dot{q}^i}\,\ddot{q}^i,\\&=\frac{\partial I}{\partial t}-G^j\,\frac{\partial p_j}{\partial t}+\left(\frac{\partial I}{\partial q^i}-G^j\,\frac{\partial p_j}{\partial q^i}\right)\dot{q}^i+G^i\,\frac{\mathrm{d}p_i}{\mathrm{d}t},\\&=\frac{\partial I}{\partial t}-G^j\,\frac{\partial p_j}{\partial t}+\left(\frac{\partial I}{\partial q^i}-G^j\,\frac{\partial p_j}{\partial q^i}\right)\dot{q}^i+G^i\,\frac{\partial L}{\partial q^i}-G^i\,\mathcal{E}_i, \qquad (73)\end{aligned}$$

که حکم را نتیجه میدهد.

■

از اینجا به ساده‌گی دیده میشود

قضیه یِ 15: سیستم ی متناظر با یک کنش ِ مُضعی یِ از مرتبه یِ دست- ِ-بالا یک در نظر میگیرم، که معادله یِ حرکت ِ آن برا یِ هر شرط ِ اولیه یِ $\boldsymbol{q}(t_0)$ و $\dot{\boldsymbol{q}}(t_0)$ جواب دارد (نَ لزومَن جواب ِ یکتا). در این صورت، اگر $I[t,\boldsymbol{q}(t),\dot{\boldsymbol{q}}(t)]$ یک ثابت- ِ-حرکت ِ این سیستم باشد، آنگاه

$$\forall\ (t,\boldsymbol{q})\ :\ G^i\,\frac{\partial L}{\partial q^i}+\frac{\partial I}{\partial t}-G^j\,\frac{\partial p_j}{\partial t}+\left(\frac{\partial I}{\partial q^i}-G^j\,\frac{\partial p_j}{\partial q^i}\right)\dot{q}^i=0. \qquad (74)$$

L لَگرانژی یِ سیستم، و $\boldsymbol{G}$ شبه‌مشتق ِ I نسبت به $\boldsymbol{p}$ است.

بر عکس، اگر $I[t,\boldsymbol{q}(t),\dot{\boldsymbol{q}}(t)]$ یک شبه- ِ-تابع ِ t و $\boldsymbol{q}(t)$ و $\boldsymbol{p}(t)$ باشد، و (74) برقرار باشد، آنگاه I یک ثابت- ِ-حرکت ِ این سیستم است.

همچنین، $I[t,\boldsymbol{q}(t),\dot{\boldsymbol{q}}(t)]$ یک ثابت- ِ-حرکت است، اگر و تنها اگر

$$\forall\ (t,\boldsymbol{q})\ :\ \frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}=-G^i\,\mathcal{E}_i. \qquad (75)$$

★

قضیه یِ 16: گیرم $I[t,\boldsymbol{q}(t),\dot{\boldsymbol{q}}(t)]$ یک ثابت- ِ-حرکت ِ سیستم ی متناظر با یک کنش ِ مُضعی یِ از مرتبه یِ دست- ِ-بالا یک است، و معادله یِ حرکت ِ سیستم برا یِ هر شرط ِ اولیه یِ $\boldsymbol{q}(t_0)$ و $\dot{\boldsymbol{q}}(t_0)$ جواب دارد (نَ لزومَن جواب ِ یکتا). در این صورت شبه- ِ-مشتق ِ I نسبت به $\boldsymbol{p}$، یک مولد- ِ-تقارن ِ

نُتِری یِ سیستم است.

اثبات:

$$\left[\frac{\partial}{\partial s}L(t,\boldsymbol{q}+s\,\boldsymbol{G})\right]_{s=0}=G^i\,\frac{\partial L}{\partial q^i}+\dot{G}^i\,p_i,$$
$$=G^i\,\mathcal{E}_i+G^i\,\dot{p}_i+\dot{G}^i\,p_i,$$
$$=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(p_i\,G^i-I). \tag{76}$$

حکم از قضیه یِ 15 نتیجه میشود.

■

قضیه یِ 17: گیرم I یک شبه- ِ-تابع ِ t و $\boldsymbol{q}$ و $\boldsymbol{p}$ و S یک کنش ِ از مرتبه یِ دست- ِ-بالا یک است. در این صورت،

$$\forall\ (i,t,\boldsymbol{q})\ :\ \frac{\partial P_i}{\partial s}(0)=-\left(\frac{\partial I}{\partial q^i}-G^j\,\frac{\partial p_j}{\partial q^i}\right)-\frac{\partial G^j}{\partial \dot{q}^i}\,\mathcal{E}_j+\frac{\partial}{\partial \dot{q}^i}\left(\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}+G^j\,\mathcal{E}_j\right), \tag{77}$$

که $\boldsymbol{G}$ شبه- ِ-مشتق ِ I نسبت به $\boldsymbol{p}$ است، و

$$P_i(s):=p_i[t,(\boldsymbol{q}+s\,\boldsymbol{G})(t),(\dot{\boldsymbol{q}}+s\,\dot{\boldsymbol{G}})(t)]. \tag{78}$$

دیده میشود اگر $\tilde{I}$ تابع ی از t و $\boldsymbol{q}(t)$ و $\boldsymbol{p}(t)$ باشد که مقدار َش با I برابر است، پرانتز ِ اول ِ طرف ِ راست مشتق ِ $\tilde{I}$ نسبت به q_i است.

از جمله، اگر I ثابت ِ حرکت باشد، آنگاه

$$\frac{\partial P_i}{\partial s}(0)\stackrel{\mathrm{ns}}{=}-\left(\frac{\partial I}{\partial q^i}-G^j\,\frac{\partial p_j}{\partial q^i}\right). \tag{79}$$

اثبات:

$$\frac{\partial P_i}{\partial s}(0)=\frac{\partial p_i}{\partial q^j}\,G^j+\frac{\partial p_i}{\partial \dot{q}^j}\,\dot{G}^j,$$
$$=\frac{\partial p_i}{\partial q^j}\,G^j+\frac{\partial p_i}{\partial \dot{q}^j}\,\left(\frac{\partial G^j}{\partial t}+\frac{\partial G^j}{\partial q^k}\,\dot{q}^k+\frac{\partial G^j}{\partial \dot{q}^k}\,\ddot{q}^k\right),$$
$$=\frac{\partial p_i}{\partial q^j}\,G^j+\frac{\partial p_j}{\partial \dot{q}^i}\,\left(\frac{\partial G^j}{\partial t}+\frac{\partial G^j}{\partial q^k}\,\dot{q}^k+\frac{\partial G^j}{\partial \dot{q}^k}\,\ddot{q}^k\right). \tag{80}$$

در آخرین تساوی از این استفاده شده که

$$\begin{aligned}\frac{\partial p_i}{\partial \dot{q}^j} &= \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^j\,\partial \dot{q}^i},\\ &= \frac{\partial p_j}{\partial \dot{q}^i}.\end{aligned} \tag{81}$$

از

$$\begin{aligned}\frac{\partial p_j}{\partial \dot{q}^i}\,\frac{\partial G^j}{\partial \dot{q}^k} &= \frac{\partial}{\partial \dot{q}^k}\left(G^j\,\frac{\partial p_j}{\partial \dot{q}^i}\right) - G^j\,\frac{\partial^2 p_j}{\partial \dot{q}^i\,\partial \dot{q}^k},\\ &= \frac{\partial^2 I}{\partial \dot{q}^i\,\partial \dot{q}^k} - G^j\,\frac{\partial^2 p_j}{\partial \dot{q}^i\,\partial \dot{q}^k},\end{aligned} \tag{82}$$

دیده میشود طرفِ چپ نسبت به i و k متقارن است. پس میشود جا یِ i و k را عوض کرد. به این ترتیب، (80) میشود

$$\frac{\partial P_i}{\partial s}(0) = \frac{\partial p_i}{\partial q^j}\,G^j + \frac{\partial p_j}{\partial \dot{q}^i}\,\left(\frac{\partial G^j}{\partial t} + \frac{\partial G^j}{\partial q^k}\,\dot{q}^k\right) + \frac{\partial p_j}{\partial \dot{q}^k}\,\frac{\partial G^j}{\partial \dot{q}^i}\,\ddot{q}^k. \tag{83}$$

با استفاده از

$$\begin{aligned}\frac{\partial p_j}{\partial \dot{q}^k}\,\ddot{q}^k &= \frac{\mathrm{d}p_j}{\mathrm{d}t} - \frac{\partial p_j}{\partial t} - \frac{\partial p_j}{\partial q^k}\,\dot{q}^k,\\ &= -\mathcal{E}_j + \frac{\partial L}{\partial q^j} - \frac{\partial p_j}{\partial t} - \frac{\partial p_j}{\partial q^k}\,\dot{q}^k,\end{aligned} \tag{84}$$

دیده میشود

$$\begin{aligned}\frac{\partial P_i}{\partial s}(0) = \frac{\partial p_i}{\partial q^j}\,G^j + \frac{\partial p_j}{\partial \dot{q}^i}\,\left(\frac{\partial G^j}{\partial t} + \frac{\partial G^j}{\partial q^k}\,\dot{q}^k\right) + \frac{\partial G^j}{\partial \dot{q}^i}\,\left(\frac{\partial L}{\partial q^j} - \frac{\partial p_j}{\partial t} - \frac{\partial p_j}{\partial q^k}\,\dot{q}^k\right)\\ - \frac{\partial G^j}{\partial \dot{q}^i}\,\mathcal{E}_j.\end{aligned} \tag{85}$$

همچنین

$$\begin{aligned}\frac{\partial p_i}{\partial q^j}\,G^j + \frac{\partial G^j}{\partial \dot{q}^i}\,\frac{\partial L}{\partial q^j} &= \frac{\partial^2 L}{\partial q^j\,\partial \dot{q}^i}\,G^j + \frac{\partial G^j}{\partial \dot{q}^i}\,\frac{\partial L}{\partial q^j},\\ &= \frac{\partial}{\partial \dot{q}^i}\left(G^j\,\frac{\partial L}{\partial q^j}\right),\end{aligned} \tag{86}$$

و،

$$\frac{\partial p_j}{\partial \dot q^i}\,\frac{\partial G^j}{\partial t}-\frac{\partial G^j}{\partial \dot q^i}\,\frac{\partial p_j}{\partial t}=\frac{\partial p_j}{\partial \dot q^i}\,\frac{\partial G^j}{\partial t}-\frac{\partial}{\partial \dot q^i}\left(G^j\,\frac{\partial p_j}{\partial t}\right)+G^j\,\frac{\partial^2 p_j}{\partial t\,\partial \dot q^i},$$
$$=\frac{\partial}{\partial t}\left(G^j\,\frac{\partial p_j}{\partial \dot q^i}\right)-\frac{\partial}{\partial \dot q^i}\left(G^j\,\frac{\partial p_j}{\partial t}\right),$$
$$=\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial I}{\partial \dot q^i}\right)-\frac{\partial}{\partial \dot q^i}\left(G^j\,\frac{\partial p_j}{\partial t}\right),$$
$$=\frac{\partial}{\partial \dot q^i}\left(\frac{\partial I}{\partial t}-G^j\,\frac{\partial p_j}{\partial t}\right). \qquad (87)$$

کاملَن مشابه دیده میشود

$$\frac{\partial p_j}{\partial \dot q^i}\,\frac{\partial G^j}{\partial q^k}-\frac{\partial G^j}{\partial \dot q^i}\,\frac{\partial p_j}{\partial q^k}=\frac{\partial}{\partial \dot q^i}\left(\frac{\partial I}{\partial q^k}-G^j\,\frac{\partial p_j}{\partial q^k}\right), \qquad (88)$$

و از آنجا،

$$\left(\frac{\partial p_j}{\partial \dot q^i}\,\frac{\partial G^j}{\partial q^k}-\frac{\partial G^j}{\partial \dot q^i}\,\frac{\partial p_j}{\partial q^k}\right)\dot q^k=\frac{\partial}{\partial \dot q^i}\left[\left(\frac{\partial I}{\partial q^k}-G^j\,\frac{\partial p_j}{\partial q^k}\right)\dot q^k\right]$$
$$-\frac{\partial \dot q^k}{\partial \dot q^i}\left(\frac{\partial I}{\partial q^k}-G^j\,\frac{\partial p_j}{\partial q^k}\right),$$
$$=\frac{\partial}{\partial \dot q^i}\left[\left(\frac{\partial I}{\partial q^k}-G^j\,\frac{\partial p_j}{\partial q^k}\right)\dot q^k\right]$$
$$-\left(\frac{\partial I}{\partial q^i}-G^j\,\frac{\partial p_j}{\partial q^i}\right). \qquad (89)$$

(86)، (87)، و (89) را در (85) میگذارم. نتیجه میشود

$$\frac{\partial P_i}{\partial s}(0)=-\left(\frac{\partial I}{\partial q^i}-G^j\,\frac{\partial p_j}{\partial q^i}\right)-\frac{\partial G^j}{\partial \dot q^i}\,\mathcal{E}_j$$
$$+\frac{\partial}{\partial \dot q^i}\left[G^j\,\frac{\partial L}{\partial q^j}+\frac{\partial I}{\partial t}-G^j\,\frac{\partial p_j}{\partial t}+\left(\frac{\partial I}{\partial q^k}-G^j\,\frac{\partial p_j}{\partial q^k}\right)\dot q^k\right], \qquad (90)$$

که حکم را نشان میدهد.

■

اگر $\tilde I$ ی باشد که

$$\forall\;(t,\boldsymbol{q})\;:\;I[t,\boldsymbol{q}(t),\dot{\boldsymbol{q}}(t)]=\tilde I[t,\boldsymbol{q}(t),\boldsymbol{p}(t)], \qquad (91)$$

I ثابت ِ حرکت باشد، $\boldsymbol{G}$ مشتق ِ $\tilde I$ نسبت به $\boldsymbol{p}$ باشد، و تعریف کنم

$$Q_i(s):=q_i+s\,G_i, \qquad (92)$$

نتیجه میشود

$$\frac{\partial P_i}{\partial s}(0) \overset{\text{ns}}{=} -\frac{\partial \tilde{I}}{\partial q^i},$$
$$\frac{\partial Q_i}{\partial s}(0) = +\frac{\partial \tilde{I}}{\partial p^i}, \tag{93}$$

که کاملَن شبیه ِ یک تبدیل ِ کانونیک با مولد ِ $\tilde{I}$ است (فصل ِ 9 ِ [2]).

6 پانوشتها

[1] I. M. Gelfand & S. V. Fomin; "Calculus of variations" (Prentice Hall, 1963) section 11

[2] Herbert Goldstein; "Classical mechanics" 2nd edition (Addison-Wesley, 1980)