X1-016 (2003/05/12)

تقارن و فرمول‌بندی یِ لَگرانژی II

محمد خرمی
mamwad@mailaps.org

مولدِتقارن ِ پیمانه‌ای و اتحاد ِ آفین ِ پیمانه‌ای در معادله یِ حرکت بررسی می‌شود. نشان داده می‌شود هر مولدِتقارن ِ پیمانه‌ای یِ کنش به یک اتحاد ِ آفین ِ پیمانه‌ای در معادله یِ حرکت منجر می‌شود؛ و هر اتحاد ِ آفین ِ پیمانه‌ای در معادله یِ حرکت به یک مولدِتقارن ِ پیمانه‌ای یِ کنش منجر می‌شود.

0 مقدمه

این مقاله ادامه یِ [1] است. نمادگذاری‌ها و تعریف‌ها یِ [1]، در این‌جا هم به کار می‌رود. در [1] دیدیم در سیستم‌ها یِ متناظر با کنش‌ها یِ از مرتبه‌یِ دستِ‌بالا یک، هر مولدِتقارن ِ نُتِری به یک ثابتِ‌حرکت ِ موضعی منجر می‌شود، و هر ثابتِ‌حرکت ِ موضعی به یک مولدِتقارن ِ نُتِری منجر می‌شود.

سیستم‌ها یی هستند که گروهِ‌تقارن ِ بزرگ ی دارند، بزرگ به این معنی که اعضا یِ این گروه نَه با یک یا چند پارامتر ِ حقیقی، بل که با یک یا چند تابع ِ دل‌بخواه ِ زمان مشخص می‌شوند. به تبدیل‌ها یی که پارامتر ِشان یک یا چند تابع ِزمان است، تبدیل ِ پیمانه‌ای می‌گویند.

سیستم‌ها یی هستند که یک ترکیب ـِ خطی از معادله یِ حرکت ـِشان صفر (یا یک تابع ـِ زمان، مستقل از مسیر) است. در این حالت می‌گوییم معادله یِ حرکت شامل ـِ یک اتحاد ـِ آفین ـِ پیمانه‌ای است. نشان می‌دهیم وجود ـِ یک اتحاد ـِ آفین ـِ پیمانه‌ای، با وجود ـِ یک مولدِتقارن ـِ پیمانه‌ای هم‌ارز است.

هم‌چنین، نشان می‌دهیم اگر سیستم ی متناظر با یک کنش ـِ از مرتبه یِ دستِ‌بالا یک، یک مولدِتقارن ـِ پیمانه‌ای داشته باشد، ثابتِ‌حرکت ـِ متناظر با این تقارن بدیهی است، یعنی مقدار ـَش برا یِ همه یِ مسیرها یک‌سان است.

می‌گوییم تابع ـِ (یا تابع ـِ تعمیم‌یافته یِ) R از دو زمان نواری است، اگر

$$\exists\, T \mid \{\forall\, (t,t')\ :\ [|t-t'|>T \Rightarrow R(t,t')=0]\}. \tag{1}$$

مولدِتقارن‌ها یِ پیمانه‌ای و اتحادها یِ آفین ـِ پیمانه‌ای را با چنین‌تابع‌ها یی می‌سازیم.

فرض کنید f یک تابع ـِ زمان، و R تابع ی از دو زمان است. تعریف می‌کنیم

$$\forall\, t'\ :\ [f(R)](t') := \int \mathrm{d}t\ f(t)\, R(t,t'). \tag{2}$$

1 مولدِتقارن ـِ پیمانه‌ای

فرض کنید G^i ها تابع‌ها یی (یا تابع‌ها یی تعمیم‌یافته) از مسیر و دو زمان اند، و نسبت به دوزمان نواری اند. می‌گوییم $\mathbf{G}$ یک مولدِتقارن ـِ پیمانه‌ای یِ یک سیستم است، اگر به ازا یِ هر t تابع ـِ $\hat{\mathbf{G}}_t$ با

$$\forall\, (i,t',\mathbf{q})\ :\ \hat{G}^i_t(t',\mathbf{q}) := G^i(t,t',\mathbf{q}), \tag{3}$$

یک مولدِتقارن ـِ آن سیستم باشد. تعریف ـِ مولدِتقارن ـِ پیمانه‌ای یِ کنش، مولدِتقارن ـِ پیمانه‌ای یِ نُتِری، و مولدِتقارن ـِ پیمانه‌ای یِ جای‌گزیده (موضعی) هم کاملاً مشابه با [1] است: کافی است در هر مورد تعریف را برا یِ $\hat{\mathbf{G}}_t$ به کار ببریم. از قضیه یِ 9 ـِ مرجع ـِ [1]، به‌ساده‌گی نتیجه می‌شود

قضیه یِ 1: اگر $\mathbf{G}$ یک مولدِتقارن ـِ پیمانه‌ای یِ جای‌گزیده (موضعی) یِ یک کنش باشد، آن‌گاه $\mathbf{G}$ یک مولدِتقارن ـِ پیمانه‌ای یِ جای‌گزیده (موضعی) یِ سیستم ـِ متناظر با

آن کنش است.

★

هم‌چنین، به‌ساده‌گی می‌شود نشان داد

قضیه یِ 2: فرض کنید $\mathbf{G}$ تابع ی نواری از مسیر و دو زمان است. در این صورت $\mathbf{G}$ یک مولدِتقارن ـِ پیمانه‌ای است، اگر و تنها اگر به ازا یِ هر تابع ـِ f از زمان، که مقدار ـَش بیرون ـِ یک ناحیه یِ باپایان صفر باشد، $f(\mathbf{G})$ یک مولدِتقارن ـِ باشد. (این قضیه در مورد ـِ مولدِتقارن ـِ کنش، سیستم، جای‌گزیده، و موضعی درست است.)

★

2 اتحاد ـِ آفین ـِ پیمانه‌ای

می‌گوییم معادله یِ حرکت ـِ یک سیستم شامل ـِ یک اتحاد ـِ آفین است، اگر G^i ها یی تابع ـِ زمان و مسیر، و C یی ثابت (مستقل از مسیر) باشند که

$$\forall\ \mathbf{q}\ :\ \int \mathrm{d}t\ G^i(t,\mathbf{q})\,\mathcal{E}_i(t,\mathbf{q}) = C. \tag{4}$$

می‌گوییم معادله یِ حرکت ـِ یک سیستم شامل ـِ یک اتحاد ـِ خطی است، اگر G^i ها یی تابع ـِ زمان و مسیر باشند که

$$\forall\ \mathbf{q}\ :\ \int \mathrm{d}t\ G^i(t,\mathbf{q})\,\mathcal{E}_i(t,\mathbf{q}) = 0. \tag{5}$$

این که معادله یِ حرکت شامل ـِ یک اتحاد ـِ خطی است، یعنی مجموعه یِ مئلفه‌ها یِ معادله یِ حرکت خطی‌مستقل نیست: یک مئلفه را می‌شود به شکل ـِ ترکیب ـِ خطی یِ مئلفه‌ها یِ دیگر نوشت. وجود ـِ یک اتحاد ـِ آفین (با $C\neq 0$) در یک معادله یِ حرکت، نتیجه می‌دهد آن معادله یِ حرکت جواب ندارد.

می‌گوییم معادله یِ حرکت ـِ یک سیستم شامل ـِ یک اتحاد ـِ آفین ـِ پیمانه‌ای است، اگر G^i ها یی نواری تابع ـِ مسیر و دو زمان، و C یی تابع ـِ زمان باشند که

$$\forall\ (t,\mathbf{q})\ :\ \int \mathrm{d}t'\ G^i(t,t',\mathbf{q})\,\mathcal{E}_i(t',\mathbf{q}) = C(t). \tag{6}$$

می‌گوییم معادله یِ حرکت ـِ یک سیستم شامل ـِ یک اتحاد ـِ خطی یِ پیمانه‌ای است، اگر G^i ها یی نواری تابع ـِ مسیر و دو زمان باشند که

$$\forall\ (t,\mathbf{q})\ :\ \int \mathrm{d}t'\ G^i(t,t',\mathbf{q})\,\mathcal{E}_i(t',\mathbf{q})=0. \tag{7}$$

به‌ساده‌گی می‌شود نشان داد

قضیه یِ 3: فرض کنید $\mathbf{G}$ تابع ی نواری از مسیر و دو زمان است. در این صورت G^i ها ضریب‌ها یِ یک اتحاد ِ آفین ِ (خطی یِ) پیمانه‌ای در معادله یِ حرکت اند، اگر و تنها اگر به ازا یِ هر تابع ِ f از زمان، که مقدار َش بیرون ِ یک ناحیه یِ باپایان صفر باشد، $f(G^i)$ ها ضریب‌ها یِ یک اتحاد ِ آفین (خطی) در معادله یِ حرکت باشند.

★

3 اتحاد ِ آفین ِ پیمانه‌ای، و مولدِتقارن ِ پیمانه‌ای

قضیه یِ 4: فرض کنید معادله یِ حرکت ِ سیستم ی متناظر با کنش ِ S، شامل ِ یک اتحاد ِ آفین ِ پیمانه‌ای است، اگر و تنها اگر کنش ِ S یک مولدِتقارن ِ پیمانه‌ای داشته باشد. در این صورت مئلفه‌ها یِ این مولدِتقارن ِ پیمانه‌ای، ضریب‌ها یی اند که در اتحاد ِ آفین ِ پیمانه‌ای ظاهر می‌شوند.

اثبات: G^i ها یی تابع ِ مسیر و دو زمان در نظر بگیرید. تعریف می‌کنیم

$$\forall\ (t_1,t_2,t,\mathbf{q})\ :\ \int \mathrm{d}t'\ G^i(t,t',\mathbf{q})\,\frac{\delta S_{[t_1,t_2]}(\mathbf{q})}{\delta q^i(t')}=:C_{[t_1,t_2]}(t,\mathbf{q}). \tag{8}$$

حالا فرض کنید G^i ها نواری اند. نتیجه می‌شود

$$\forall\ (t_1,t_2,t,\mathbf{q})\ :\ C_{[t_1,t_2]}(t,\mathbf{q})=\int_{t-T}^{t+T}\mathrm{d}t'\ G^i(t,t',\mathbf{q})\,\frac{\delta S_{[t_1,t_2]}(\mathbf{q})}{\delta q^i(t')}. \tag{9}$$

تعریف می‌کنیم

$$\forall\ (t,\mathbf{q})\ :\ C(t,\mathbf{q}):=\lim_{\substack{t_1\to-\infty\\ t_2\to+\infty}} C_{[t_1,t_2]}(t,\mathbf{q}), \tag{10}$$

و

$$\forall\ (s,t,t_1,t_2,\mathbf{q})\ :\ S_{s,t,[t_1,t_2]}(\mathbf{q}):=S_{[t_1,t_2]}(\mathbf{q}+s\,\hat{\mathbf{G}}_t). \tag{11}$$

دیده می‌شود

$$\forall\ (t,t_1,t_2,\mathbf{q})\ :\ \left[\frac{\partial S_{s,t,[t_1,t_2]}(\mathbf{q})}{\partial s}\right]_{s=0}=C_{[t_1,t_2]}(t,\mathbf{q}). \qquad (12)$$

$\mathbf{G}$ یک مولدِتقارن ـ پیمانه‌ای است، اگر و تنها اگر

$$\forall\ (i,t,t',\mathbf{q})\ :\ \lim_{\substack{t_1\to-\infty\\ t_2\to+\infty}}\frac{\delta}{\delta q^i(t')}\left[\frac{\partial S_{s,t,[t_1,t_2]}(\mathbf{q})}{\partial s}\right]_{s=0}=0 \qquad (13)$$

معادله یِ حرکت شامل ـ یک اتحاد ـ آفین ـ پیمانه‌ای با ضریب‌ها یِ برابر با G^i ها است، اگر و تنها اگر C مستقل از $\mathbf{q}$ باشد. اما این همان (13) است (به شرط ـ این که بشود جا یِ مشتق‌گیری و حدگیری را عوض کرد).

■

4 تقارن ـ پیمانه‌ای و ثابت ـ حرکت

در [1] دیدیم وجود ـ یک تقارن ـ نُتِری در یک سیستم با کنش ی از مرتبه یِ دستِ‌بالا یک، به وجود ـ یک ثابت ـ حرکت می‌انجامد. به نظر می‌رسد اگر این تقارن پیمانه‌ای باشد، باید یک خانواده یِ ثابتِ‌حرکت داشته باشیم، خانواده ای با پارامتر ـ t، که I_t ثابتِ‌حرکت ـ متناظر با $\hat{\mathbf{G}}_t$ است. می‌خواهیم نشان دهیم اگر $\mathbf{G}$ یک ویژه‌گی یِ اضافی داشته باشد، این ثابتِ‌حرکت‌ها بدیهی اند، یعنی مقدار ـِشان برا یِ همه یِ مسیرها یک‌سان است.

فرض کنید $\mathbf{G}$ این ویژه‌گی را دارد که برا یِ تابع‌ها یِ f از زمان، $f(\mathbf{G})$ نسبت به f موضعی است، یعنی عدد ی (n) هست که

$$\forall\ (i,t',\mathbf{q})\ :\ [f(G^i)](t',\mathbf{q})=\sum_{k=0}^{n}f^{(k)}(t')\,g^{i\,k}(t',\mathbf{q}). \qquad (14)$$

معنی یِ رابطه یِ بالا این است که

$$\forall\ (i,t,t',\mathbf{q})\ :\ G^i(t,t',\mathbf{q})=\sum_{k=0}^{n}\delta^{(k)}(t'-t)\,g^{i\,k}(t',\mathbf{q}), \qquad (15)$$

یا

$$\forall\ (i,t,t',\mathbf{q})\ :\ G^i(t,t',\mathbf{q})=\sum_{k=0}^{n}\delta^{(k)}(t'-t)\,\tilde{g}^{i\,k}(t,\mathbf{q}). \qquad (16)$$

حالا ثابتِ‌حرکت ـ I_t (ناشی از مولدِتقارن ـ $\hat{\mathbf{G}}_t$) را در نظر بگیرید. چون $\hat{\mathbf{G}}_t$ یک مولدِتقارن ـ کنش است، Λ_t هایی هستند که

$$\forall\ (t', t, \mathbf{q})\ :\ \left[\frac{\partial L(t', \mathbf{q} + s\,\hat{\mathbf{G}}_t)}{\partial s}\right]_{s=0} = \frac{\mathrm{d}\Lambda_t(t', \mathbf{q})}{\mathrm{d}t'}. \tag{17}$$

طرف ـِ چپ ـِ عبارت ـِ بالا، یک ترکیب ـِ خطی از $\delta(t' - t)$ و تعداد ـِ باپایان ی از مشتق‌ها یِ آن است. ضریب‌ها یِ این ترکیب، تابع ـِ t و مسیر اند. $\Lambda_t(t', \mathbf{q})$ را هم می‌شود بر حسب ـِ $\delta(t' - t)$ و تعداد ـِ باپایان ی از مشتق‌ها یَش بسط داد. البته ممکن است در $\Lambda_t(t', \mathbf{q})$ جمله ای باشد که شامل ـِ دلتا یا مشتق‌ها یَش نباشد. در این صورت آن جمله نمی‌تواند به مسیر بسته‌گی داشته باشد، چون در غیر ـِ این صورت در مشتق ـِ زمانی یِ آن جمله ای ظاهر می‌شود که ضریب ـِ دلتا یا مشتق ـِ دلتا ندارد، و این جمله با هیچ یک از جمله‌ها یِ دیگر ـِ تساوی یِ بالا حذف نمی‌شود.

I_t (ثابتِ‌حرکت ـِ ناشی از $\mathbf{G}_t$) به شکل ـِ

$$\forall\ (t', \mathbf{q})\ :\ I_t(t', \mathbf{q}) = G_t^i(t', \mathbf{q})\, p_i(t', \mathbf{q}) - \Lambda_t(t', \mathbf{q}) \tag{18}$$

است. به این ترتیب، $I_t(t', \mathbf{q})$ را می‌شود بر حسب ـِ $\delta(t' - t)$ و تعداد ـِ باپایان ی از مشتق‌ها یَش بسط داد. ضریب‌ها یِ بسط تابع ـِ t و مسیر اند. فقط ممکن است یک جمله باقی بماند که ضریب ـِ دلتا (یا مشتق ـَ ش) نباشد. این جمله از Λ_t می‌آید و تابع ـِ مسیر نیست. فرض کنید بالاترین مشتق ـِ دلتا در I_t، مشتق ـِ m اُم باشد:

$$\forall\ (t, t', \mathbf{q})\ :\ I_t(t', \mathbf{q}) = J(t, t') + \sum_{k=0}^{m} J^k(t, \mathbf{q})\, \delta^{(k)}(t' - t). \tag{19}$$

در مشتق ـِ I_t نسبت به t' رو یِ لاک، ضریب ـِ $\delta^{(m+1)}(t' - t)$ برابر است با $J^m(t, \mathbf{q})$. از این‌جا نتیجه می‌شود J^m صفر است. با یک استقرا یِ ساده نتیجه می‌شود همه یِ J^k ها صفر اند. پس I_t برابر است با J، که مستقل از مسیر است.

5 مثال

لَگرانژی یِ

$$L = \frac{1}{2}(\alpha\, \dot{q}^1 + \beta\, q^2)^2 \tag{20}$$

را در نظر بگیرید. دیده می‌شود

$$\mathcal{E}_1 = -\alpha \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\alpha\,\dot q^1 + \beta\, q^2),$$

$$\mathcal{E}_2 = \beta\,(\alpha\,\dot q^1 + \beta\, q^2). \tag{21}$$

به این ترتیب،

$$\forall\ (t,\mathbf{q})\ :\ \beta\,\mathcal{E}_1(t,\mathbf{q}) + \alpha\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathcal{E}_2(t,\mathbf{q}) = 0. \tag{22}$$

این یک اتحاد ِ خطی یِ پیمانه‌ای برا یِ معادله یِ حرکت است: با تعریف ِ

$$\begin{aligned} G^1(t,t',\mathbf{q}) &= \beta\,\delta(t'-t),\\ G^2(t,t',\mathbf{q}) &= -\alpha\,\delta'(t'-t), \end{aligned} \tag{23}$$

به

$$\forall\ (t',\mathbf{q})\ :\ \int \mathrm{d}t'\ G^i(t,t',\mathbf{q})\,\mathcal{E}_i(t',\mathbf{q}) = 0. \tag{24}$$

می‌رسیم. ضمناً دیده می‌شود

$$\forall\ (s,t,t',\mathbf{q})\ :\ L(t',\mathbf{q}+s\,\hat{\mathbf{G}}_t) = L(t',\mathbf{q}). \tag{25}$$

پس این سیستم یک تقارن ِ پیمانه‌ای (یِ کنش) هم دارد. ثابتِ‌حرکت ِ متناظر با $\hat{\mathbf{G}}_t$ را حساب کنیم:

$$\forall\ (t,t',\mathbf{q})\ :\ I_t(t',\mathbf{q}) = \alpha\,\delta(t'-t)\,[\alpha\dot q^1(t') + \beta\,q^2(t')]. \tag{26}$$

عبارت ِ درون ِ کروشه $\mathcal{E}_2$ است. پس I_t برا یِ همه یِ مسیرها صفر است.

برا یِ لَگرانژی یِ

$$L = q, \tag{27}$$

دیده می‌شود

$$\mathcal{E} = 1, \tag{28}$$

که یعنی یک اتحاد ِ آفین ِ پیمانه‌ای با

$$G(t,t',q)=\delta(t'-t),\qquad C(t)=1 \tag{29}$$

برقرار است. داریم

$$\forall\,(s,t,t',\mathbf{q})\ :\ L(t',q+s\,\hat G_t)=L(t',q)+s\,\delta(t'-t),$$

$$=L(t',q)+s\,\frac{\mathrm{d}\Lambda_t(t',q)}{\mathrm{d}t'}, \tag{30}$$

که

$$\Lambda_t(t',q)=\theta(t'-t), \tag{31}$$

و θ تابع ِ پله ی ِ واحد است. به این ترتیب، ثابت‌ِحرکت ِ متناظر با $\hat G_t$ می‌شود

$$I_t(t,q)=-\theta(t'-t). \tag{32}$$

البته مشتق ِ I_t نسبت به t' صفر نیست. اما اشکال ی ندارد، چون قرار است مشتق ِ I_t نسبت به t'، رو ی ِ لاک صفر شود، و به خاطر ِ وجود ِ اتحاد ِ آفین سیستم نمی‌تواند رو ی ِ لاک باشد.

سرانجام، لَگرانژی ی ِ

$$L=\dot q \tag{33}$$

را در نظر بگیرید. دیده می‌شود

$$\mathcal{E}=0. \tag{34}$$

که یعنی یک اتحاد ِ خطی ی ِ پیمانه‌ای با

$$G(t,t',q)=\delta(t'-t) \tag{35}$$

برقرار است. داریم

$$\forall\,(s,t,t',\mathbf{q})\ :\ L(t',q+s\,\hat G_t)=L(t',q)+s\,\delta'(t'-t),$$

$$= L(t', q) + s\,\frac{\mathrm{d}\Lambda_t(t', q)}{\mathrm{d}t'}, \qquad (36)$$

که

$$\Lambda_t(t', q) = \delta(t' - t). \qquad (37)$$

از این‌جا ثابتِ‌حرکت ِ متناظر با $\hat{G}_t$ می‌شود صفر.

6 مرجع

[1] محمد خرمی؛ " تقارن و فرمول‌بندی یِ لَگرانژی I"، X1-015 (2003/03/21)