X1-017 (2003/06/08)

تقارن و نوسان‌ها یِ کوچک

محمد خرمی mamwad@mailaps.org

تقارن در حرکت‌ها یِ خطی حول ِ نقطه‌ها یِ پای‌دار ِ سیستم‌ها یِ مکانیکی بررسی می‌شود. روش ی ارائه می‌شود که با استفاده از هر تقارن، تعداد ِ مئثر ِ درجه‌ها یِ آزادی در نوسان‌ها یِ کوچک ِ سیستم کم شود (و در نتیجه به‌دست‌آوردن ِ وجه‌ها و نوسان‌ها یِ ویژه ساده‌تر شود).

0 مقدمه

سیستم ی با n درجه یِ آزادی را در نظر بگیرید، که با لَگرانژی یِ L توصیف می‌شود، و فرض کنید

$$L = L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = T(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) - V(\mathbf{q}), \tag{1}$$

که در آن T (انرژی یِ جنبشی) تابع ی هم‌گن و از درجه یِ 2 نسبت به $\dot{\mathbf{q}}$ (سرعت) است. با فرض ِ این که در نقطه یِ $\mathbf{q}_0$، مشتق ِ V (انرژی یِ پتانسیل) صفر است، معادله یِ خطی‌شده یِ حرکت حول ِ $\mathbf{q} = \mathbf{q}_0$ می‌شود

$$-M_{ij}\,\ddot{x}^i - K_{ij}\,x^j = 0. \tag{2}$$

در این‌جا

$$M_{i\,j} := \left.\frac{\partial^2 T}{\partial \dot{q}^i\,\partial \dot{q}^j}\right|_{\mathbf{q}=\mathbf{q}_0},$$

$$K_{i\,j} := \left.\frac{\partial^2 V}{\partial q^i\,\partial q^j}\right|_{\mathbf{q}=\mathbf{q}_0},$$

$$x^i := q^i - q_0^i. \tag{3}$$

x^i ها حقیقی اند، اما برا یِ محاسبه ساده‌تر است بگذاریم مقدارها یِ مختلط هم بگیرند. به این ترتیب، $\mathbf{x}$ برداری در $\mathbb{C}^n$ (فضا یِ برداری یِ n تایی‌ها یِ مختلط) است. T تابع ی هم‌گن و از درجه یِ 2 نسبت به سرعت است؛ پس مشتق ِ دوم ِ T نسبت به سرعت، به خود ِ سرعت بسته‌گی ندارد. M (ماتریس ِ جرم)، و K (ماتریس ِ سختی) متقارن (و با مئلفه‌ها یِ حقیقی) اند، و M مثبت ِ معین است. شرط ِ پای‌داری یِ تعادل حول ِ $\mathbf{q} = \mathbf{q}_0$ هم این است که K مثبت ِ معین باشد. (اگر K مثبت ِ شبهِ‌معین باشد، آن‌گاه برا یِ بررسی یِ پای‌داری مشتق‌ها یِ بالاتر ِ انرژی یِ پتانسیل در $\mathbf{q}_0$ هم لازم اند.) آن چه از این پس در مورد ِ M و K به کار خواهیم برد، این است که M مثبت ِ معین است و

$$M_{j\,i} = (M_{i\,j})^*,$$
$$K_{j\,i} = (K_{i\,j})^*. \tag{4}$$

این رابطه‌ها با تغییرِپایه هم عوض نمی‌شوند.

یک بخش ِ کلیدی یِ بررسی یِ مسئله یِ نوسان‌ها یِ کوچک، به‌دست‌آوردن ِ ویژه‌وجه‌ها و ویژه‌بس‌آمدها یِ سیستم است. این یعنی حل ِ معادله یِ ویژه‌مقداری یِ

$$K\,\mathbf{u}_\lambda = \lambda\,M\,\mathbf{u}_\lambda, \tag{5}$$

برا یِ λ و بردار ِ غیرِصفر ِ $\mathbf{u}_\lambda$ (ویژه‌وجه یا ویژه‌بردار). این بحث‌ها با تفصیل ِ بیش‌تر، در تقریباً هر کتاب ِ مکانیک ِ تحلیلی آمده است (مثلاً [1] را ببینید).

با استفاده از ماتریس ِ M، می‌شود یک ضربِ‌داخلی تعریف کرد:

$$\mathbf{x}\cdot\mathbf{y} := M_{i\,j}\,(x^i)^*\,y^j. \tag{6}$$

به خاطر ِ (4)، و با توجه به این که M مثبت ِ معین است، تعریف ِ بالا ویژه‌گی‌ها یِ ضربِ‌داخلی را بر می‌آورد. با تعریف ِ

$$\mathcal{K} := M^{-1}\,K, \tag{7}$$

(5) می‌شود

$$\mathcal{K}\,\mathbf{u}_\lambda = \lambda\,\mathbf{u}_\lambda. \tag{8}$$

هم‌چنین، به‌ساده‌گی دیده می‌شود به ازا یِ هر دوبردار ِ دل‌بخواه ِ $\mathbf{x}$ و $\mathbf{y}$،

$$(\mathcal{K}\,\mathbf{x})\cdot\mathbf{y} = \mathbf{x}\cdot(\mathcal{K}\,\mathbf{y}) = K_{i\,j}\,(x^i)^*\,y^j. \tag{9}$$

این یعنی $\mathcal{K}$ یک نگاشت ِ خطی یِ اِرمیتی است. چنین‌نگاشت ی قطری‌شدنی است، ویژه‌مقدارها یِ چنین‌نگاشت ی حقیقی اند، ویژه‌بردارها یِ متناظر با ویژه‌مقدارها یِ متمایز َش بر هم عمود اند، و اصولاً می‌شود یک پایه یِ راست‌هنجار یافت که اعضا یَش ویژه‌بردار ِ آن باشند [2]. (ضمناً چون مئلفه‌ها یِ $\mathcal{K}$ در پایه یِ اولیه حقیقی اند، مئلفه‌ها یِ ویژه‌بردارها یِ آن در این پایه را هم می‌شود حقیقی کرد.)

1 تقارن

می‌گوییم ماتریس ِ S یک تقارن ِ این سیستم (در حد ِ نوسان‌ها یِ کوچک) است، اگر

$$[S,\mathcal{K}] = 0. \tag{10}$$

فرض کنید S یک تقارن ِ سیستم، ζ یک ویژه‌مقدار ِ S، و $\mathbb{V}_1$ ویژه‌فضا یِ S متناظر با ویژه‌مقدار ِ ζ است، یعنی

$$\mathbb{V}_1 := \{\mathbf{x} \mid S\,\mathbf{x} = \zeta\,\mathbf{x}\}. \tag{11}$$

از جابه‌جاشدن ِ S و $\mathcal{K}$، دیده می‌شود اگر $\mathbf{x}\in\mathbb{V}_1$، آن‌گاه $(\mathcal{K}\,\mathbf{x})\in\mathbb{V}_1$، یعنی $\mathbb{V}_1$ یک زیرفضا یِ ناوردا یِ $\mathcal{K}$ است. به علاوه، با تعریف ِ

$$\mathbb{V}_2 := \{\mathbf{x} \mid \forall\,\mathbf{y}\in\mathbb{V}_1\ :\ \mathbf{x}\cdot\mathbf{y} = 0\}, \tag{12}$$

دیده می‌شود $\mathbb{V}_2$ هم یک زیرفضا یِ ناوردا یِ $\mathcal{K}$ است. از تعریف ِ (12) ضمناً نتیجه می‌شود کل ِ فضا یِ $\mathbb{C}^n$ حاصلِ‌جمع ِ مستقیم ِ $\mathbb{V}_1$ و $\mathbb{V}_2$ است:

$$\mathbb{C}^n = \mathbb{V}_1 \oplus \mathbb{V}_2. \tag{13}$$

پس اگر پایه یِ $\mathbb{C}$ را اجتماع ِ یک پایه یِ $\mathbb{V}_1$ و یک پایه یِ $\mathbb{V}_2$ بگیریم، نمایش ِ ماتریسی یِ $\mathcal{K}$ در این پایه بلُکی‌ـ قطری می‌شود. به این ترتیب، می‌شود مسئله یِ با n درجه یِ آزادی را به دو مسئله یِ مستقل‌ازهم ِ با n_1 و n_2 درجه یِ آزادی (به‌ترتیب، بعدها یِ $\mathbb{V}_1$ و $\mathbb{V}_2$) تبدیل کرد.

می‌گوییم S یک تقارن ِ انرژی‌یِ‌جنبشی (در حد ِ نوسان‌ها یِ کوچک) است، اگر

$$\tilde{S}\, M\, S = M, \tag{14}$$

که $\tilde{S}$ نگاشت ی است با

$$\tilde{S}_i{}^j := S^j{}_i. \tag{15}$$

هم‌چنین، می‌گوییم S یک تقارن ِ انرژی‌یِ‌پتانسیل (در حد ِ نوسان‌ها یِ کوچک) است، اگر

$$\tilde{S}\, K\, S = K. \tag{16}$$

از تعریف‌ها یِ (14) و (16)، و نیز (10)، به‌ساده‌گی دیده می‌شود اگر S تقارن ِ انرژی‌یِ‌جنبشی و انرژی‌یِ‌پتانسیل باشد، آن‌گاه S تقارن ِ سیستم هم هست، چون

$$S^{-1}\, \mathcal{K}\, S = (\tilde{S}\, M\, S)^{-1} (\tilde{S}\, K\, S). \tag{17}$$

اما عکس ِ این قضیه درست نیست. یعنی ممکن است S تقارن ِ سیستم باشد اما تقارن ِ انرژی‌یِ‌جنبشی و انرژی‌یِ‌پتانسیل نباشد. این که S تقارن ِ انرژی‌یِ‌جنبشی (انرژی‌یِ‌پتانسیل) است، یعنی مقدار ِ انرژی‌یِ‌جنبشی (انرژی‌یِ‌پتانسیل) به ازا یِ x، با مقدار ِ انرژی‌یِ‌جنبشی (انرژی‌یِ‌پتانسیل) به ازا یِ $(S\,\mathrm{x})$ برابر است.

فرض کنید به طریق ی (مثلاً از رو یِ تقارن) بدانیم $\mathbb{V}$ یک زیرفضا یِ ناوردا یِ $\mathcal{K}$ است. می‌خواهیم ویژه‌بردارها یِ $\mathcal{K}$ در این فضا را بیابیم. $\{\mathrm{e}_a \mid a\}$ را یک پایه یِ $\mathbb{V}$ می‌گیریم. (5)، برا یِ ویژه‌بردارها یِ $\mathcal{K}$ در $\mathbb{V}$ می‌شود

$$K\,\mathbf{e}_b\,u^b_\lambda = \lambda\,M\,\mathbf{e}_b\,u^b_\lambda, \tag{18}$$

یا

$$K'_{a\,b}\,u^b_\lambda = \lambda\,M'_{a\,b}\,u^b_\lambda, \tag{19}$$

که

$$\begin{aligned} M'_{a\,b} &:= (e^i_a)^*\,M_{i\,j}\,e^j_b,\\ K'_{a\,b} &:= (e^i_a)^*\,K_{i\,j}\,e^j_b. \end{aligned} \tag{20}$$

به‌ساده‌گی دیده می‌شود

$$\begin{aligned} M'_{b\,a} &= (M'_{a\,b})^*,\\ K'_{b\,a} &= (K'_{a\,b})^*, \end{aligned} \tag{21}$$

و نیز، M' مثبت ِ معین است. پس همان کارها یی که قرار بود با M و K کنیم را می‌شود با M' و K' کرد. به این ترتیب، ویژه‌بردارها یِ $\mathcal{K}$ در $\mathbb{V}$ را می‌شود با استفاده از ماتریس‌ها یِ کوچک‌تر ی به دست آورد.

خواننده‌ها یی که با کوانتم‌مکانیک آشنا یند، لابد متوجه ِ شده اند که در کوانتم‌مکانیک هم برا یِ قطری‌کردن ِ همیلتنی یِ سیستم‌ها یی که تقارن دارند، روش ِ مشابه ی به کار می‌رود. از دید ِ جبرِخطی، این دومسئله یک‌سان اند: قرار است یک ماتریس قطری شود، و در این کار از این که این ماتریس با ماتریس ِ دیگر ی جابه‌جا می‌شود استفاده می‌شود.

2 مثال

سه جرم را در نظر بگیرید که در حالت ِ تعادل رو یِ رئس‌ها یِ یک مثلث ِ متساوی‌الساقین اند. زاویه یِ بین ِ قاعده و هر ساق ِ مثلث θ است. جرم‌ها یِ دوطرف ِ قاعده m، و جرم ِ رو یِ رَئس m' است. رو یِ هر ساق ِ مثلث فنر ی به ضریبِ‌سختی یِ k، و رو یِ قاعده فنر ی به ضریبِ‌سختی یِ k' هست. تنهانیروها یی که به این جرم‌ها وارد می‌شود هم

نیروها یِ ناشی از فنرها است. می‌خواهیم ویژه‌وجه‌ها و ویژه‌بس‌آمدها یِ این سیستم را بیابیم.

این مسئله 9 درجه یِ آزادی دارد. بنابراین اگر مستقیماً ماتریس‌ها یِ جرم و سختی را حساب کنیم و سراغ ِ معادله یِ (7) برویم، باید یک ماتریس ِ 9×9 را قطری کنیم. اما می‌دانیم از 9 ویژه‌وجه ِ این سیستم، 6 تا وجه ِ صفر اند (یعنی ویژه‌بس‌آمد یا ویژه‌مقدار ِ متناظر با آن‌ها صفر است). 3 تا از وجه‌ها یِ صفر انتقال ِ صلب اند، و سه‌تا یِ دیگر چرخش ِ صلب. اگر فضا یِ عمود بر این 6 وجه را در نظر بگیریم، یک بلُک ِ 3×3 از $\mathcal{K}$ می‌ماند که باید قطری شود.

صفحه یِ مثلث در حالت ِ تعادل را صفحه یِ $x\,y$ می‌گیریم. چون فنرها در حالت ِ تعادل کشیده‌نشده اند، حرکت‌ها یِ عمود بر این صفحه متناظر با وجه‌ها یِ صفر اند. به این ترتیب 3 وجه ِ صفر را کنار می‌گذاریم: یک انتقال ِ صلب در راستا یِ محور ِ z (عمود بر صفحه یِ $x\,y$)، یک چرخش حول ِ محور ِ x، و یک چرخش حول ِ محور ِ y. 6 درجه‌یِ آزادی یِ باقی‌مانده، حرکت در صفحه یِ $x\,y$ را توصیف می‌کنند. از این 6 درجه‌یِ آزادی، 3 تا وجه ِ صفر اند: 2 تا انتقال ِ صلب (در راستاها یِ x و y) و یک چرخش در صفحه یِ $x\,y$. وجه‌ها یِ انتقالِ‌صلب در صفحه را هم به‌ساده‌گی می‌شود کنار گذاشت: کافی است شرط ی بین ِ مختصه‌ها یِ ذره‌ها بگذاریم که مرکزِجرم ِ مجموعه در مبدئ بماند. می‌ماند 4 درجه یِ آزادی، که یک ی از آن‌ها هم وجه ِ صفر هم است.

ماتریس‌ها یِ جرم و سختی، برا یِ مسئله یِ ساده‌نشده (9 درجه یِ آزادی) می‌شوند

$$
\begin{aligned}
M_{i\,j}\,(X^i)^*\,X^j &= m(|x_1|^2+|y_1|^2+|z_1|^2+|x_2|^2+|y_2|^2+|z_2|^2)\\
&\quad +m'(|x_3|^2+|y_3|^2+|z_3|^2),
\end{aligned}
\tag{22}
$$

و

$$
\begin{aligned}
K_{i\,j}\,(X^i)^*\,X^j &= k|-(x_1-x_3)\cos\theta-(y_1-y_3)\sin\theta|^2\\
&\quad +k|-(x_3-x_2)\cos\theta+(y_3-y_2)\sin\theta|^2+k'|x_2-x_1|^2,
\end{aligned}
\tag{23}
$$

که (x_i, y_i, z_i) مختصه‌ها یِ انحراف ِ ذره یِ i از حالت ِ تعادل اند، محور ِ x موازی با قاعده یِ مثلث است، ذره‌ها یِ 1 و 2 رو یِ قاعده یِ مثلث اند، و زاویه یِ بردار ِ ذره یِ 1 به ذره یِ 3 با جهت ِ مثبت ِ محور ِ x، در حالت ِ تعادل حاده است. متناظر با هر

ویژه‌مقدار ـ λ یِ $\mathcal{K}$، ویژه‌مقدار ـ بی‌بعد ـ Λ را به شکل ـ

$$\lambda =: \frac{k}{m}\,\Lambda \tag{24}$$

حالا می‌گذاریم $z_i = 0$ (حرکت در صفحه) و

$$m(x_1+x_2)+m'\,x_3 = m(y_1+y_2)+m'\,y_3 = 0 \tag{25}$$

(مرکزِجرم ثابت). نتیجه می‌شود

$$M'_{a\,b}\,(X'^a)^*\,X'^b = m\left(1+\frac{m}{m'}\right)(|x_1|^2+|y_1|^2+|x_2|^2+|y_2|^2)$$
$$+\frac{m^2}{m'}(x_1^*\,x_2+x_2^*\,x_1+y_1^*\,y_2+y_2^*\,y_1), \tag{26}$$

و

$$K'_{a\,b}\,(X'^a)^*\,X'^b = k\left|\left[\left(1+\frac{m}{m'}\right)x_2+\frac{m}{m'}\,x_1\right]\cos\theta\right.$$
$$\left.-\left[\left(1+\frac{m}{m'}\right)y_2+\frac{m}{m'}\,y_1\right]\sin\theta\right|^2$$
$$+k\left|\left[\left(1+\frac{m}{m'}\right)x_1+\frac{m}{m'}\,x_2\right]\cos\theta\right.$$
$$\left.+\left[\left(1+\frac{m}{m'}\right)y_1+\frac{m}{m'}\,y_2\right]\sin\theta\right|^2$$
$$+k'|x_2-x_1|^2. \tag{27}$$

تا این‌جا یک مسئله با 9 درجه یِ آزادی، به یک مسئله با 4 درجه یِ آزادی فرو کاسته شده. با استفاده از تقارن، این مسئله را هم می‌شود به دو مسئله هر یک با دو درجه یِ آزادی فرو کاست. تقارن ی که در نظر می‌گیریم، تبدیل ـ

$$S(x_1,x_2,x_3,y_1,y_2,y_3,z_1,z_2,z_3) := (-x_2,-x_1,-x_3,y_2,y_1,y_3,z_2,z_1,z_3) \tag{28}$$

است. این تبدیل، در واقع انعکاس نسبت به صفحه یِ $y\,z$ است. می‌شد این تبدیل را مستقیماً برا یِ 4 درجه‌یِ آزادی یِ باقی‌مانده نوشت:

$$S'(x_1, x_2, y_1, y_2) := (-x_2, -x_1, y_2, y_1). \tag{29}$$

به‌ساده‌گی دیده می‌شود این تبدیل 2 ویژه‌مقدار ِ متمایز دارد: $\zeta = +1$ و $\zeta = -1$. متناظر با هر یک از این ویژه‌مقدارها هم یک ویژه‌فضا یِ 2 بعدی هست:

$$\zeta = +1 : \qquad x_2 = -x_1 = -x,\ y_2 = y_1 = y, \tag{30}$$

و

$$\zeta = -1 : \qquad x_2 = x_1 = x,\ y_2 = -y_1 = -y. \tag{31}$$

برا یِ $\zeta = +1$،

$$M^{+}_{\alpha\,\beta}\,(X^{+\,\alpha})^*\,X^{+\,\beta} = 2m\,|x|^2 + 2m\left(1 + 2\frac{m}{m'}\right)|y|^2, \tag{32}$$

و

$$K^{+}_{\alpha\,\beta}\,(X^{+\,\alpha})^*\,X^{+\,\beta} = 4k'\,|x|^2 + 2k\left|x\,\cos\theta + \left(1 + 2\frac{m}{m'}\right)y\,\sin\theta\right|^2. \tag{33}$$

پس،

$$M^{+} = 2m\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}, \tag{34}$$

و

$$K^{+} = 2k\begin{pmatrix} \nu + \cos^2\theta & \mu\,\sin\theta\,\cos\theta \\ \mu\,\sin\theta\,\cos\theta & \mu^2\,\sin^2\theta \end{pmatrix}, \tag{35}$$

که

$$\mu :\ =\ 1 + 2\frac{m}{m'},$$

$$\nu := 2\frac{k'}{k}. \tag{36}$$

از این‌جا،

$$\mathcal{K}^+ = \frac{k}{m}\begin{pmatrix} \nu + \cos^2\theta & \mu\,\sin\theta\,\cos\theta \\ \sin\theta\,\cos\theta & \mu\,\sin^2\theta \end{pmatrix}, \tag{37}$$

و ویژه‌مقدارها یِ بی‌بعد ـِ $\mathcal{K}^+$ می‌شوند

$$\Lambda^+_\pm = \frac{\nu + \cos^2\theta + \mu\,\sin^2\theta \pm \sqrt{(\nu + \cos^2\theta + \mu\,\sin^2\theta)^2 - 4\mu\,\nu\,\sin^2\theta}}{2}. \tag{38}$$

متناظر با هر یک از این ویژه‌مقدارها، به‌ساده‌گی می‌شود نسبت ـِ x و y در (30) را به دست آورد، و به این ترتیب 2 تا از ویژه‌بردارها یِ $\mathcal{K}$ هم تعیین می‌شوند.

برا یِ $\zeta = -1$،

$$M^-_{\alpha\,\beta}\,(X^{-\,\alpha})^*\,X^{-\,\beta} = 2m\left(1 + 2\frac{m}{m'}\right)|x|^2 + 2m\,|y|^2, \tag{39}$$

و

$$K^-_{\alpha\,\beta}\,(X^{-\,\alpha})^*\,X^{-\,\beta} = 2k\left|\left(1 + 2\frac{m}{m'}\right)x\,\cos\theta + y\,\sin\theta\right|^2. \tag{40}$$

پس،

$$M^- = 2m\begin{pmatrix} \mu & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \tag{41}$$

و

$$K^- = 2k\begin{pmatrix} \mu^2\,\cos^2\theta & \mu\,\sin\theta\,\cos\theta \\ \mu\,\sin\theta\,\cos\theta & \sin^2\theta \end{pmatrix}. \tag{42}$$

از این‌جا،

$$\mathcal{K}^- = \frac{k}{m}\begin{pmatrix} \mu\,\cos^2\theta & \sin\theta\,\cos\theta \\ \mu\,\sin\theta\,\cos\theta & \sin^2\theta \end{pmatrix}, \tag{43}$$

و ویژه‌مقدارها یِ بی‌بعد ـِ $\mathcal{K}^-$ می‌شوند

$$\begin{aligned} \Lambda^-_- &= 0, \\ \Lambda^-_+ &= \mu\,\cos^2\theta + \sin^2\theta. \end{aligned} \tag{44}$$

متناظر با هر یک از این ویژه‌مقدارها هم، به‌ساده‌گی می‌شود نسبت ـِ x و y در (31) را به دست آورد، و به این ترتیب 2 تا دیگر از ویژه‌بردارها یِ $\mathcal{K}$ هم تعیین می‌شوند.

یک حالت ِ خاص ِ مثال ِ بالا، این است که مثلث متساوی‌الاضلاع است و

$$m' = m, \qquad k' = k. \tag{45}$$

در این حالت،

$$\theta = \frac{\pi}{3}, \qquad \mu = 3, \qquad \nu = 2, \tag{46}$$

که نتیجه می‌دهد

$$\Lambda^+_+ = 3, \qquad \Lambda^+_- = \Lambda^-_+ = \frac{3}{2}. \tag{47}$$

این حالت ِ خاص را با تفصیل ِ بیش‌تر بررسی می‌کنیم. 3 درجه‌یِ آزادی یِ بیرون ِ صفحه را کنار می‌گذاریم و ماتریس‌ها یِ جرم و سختی را می‌نویسیم:

$$\begin{aligned} M_{i\,j}\,(X^i)^*\,X^j &= m(|x_1|^2 + |y_1|^2 + |x_2|^2 + |y_2|^2 + |x_3|^2 + |y_3|^2), \\ &= m(\mathbf{r}_1^* \bullet \mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2^* \bullet \mathbf{r}_2 + \mathbf{r}_3^* \bullet \mathbf{r}_3), \end{aligned} \tag{48}$$

و

$$\begin{aligned} K_{i\,j}\,(X^i)^*\,X^j &= k[|-(x_1 - x_3)\cos\theta - (y_1 - y_3)\sin\theta|^2 \\ &\quad + |-(x_3 - x_2)\cos\theta + (y_3 - y_2)\sin\theta|^2 + |x_2 - x_1|^2], \\ &= k[|\mathbf{n}_{1\,3} \bullet (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_3)|^2 + |\mathbf{n}_{3\,2} \bullet (\mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_2)|^2 \\ &\quad + |\mathbf{n}_{2\,1} \bullet (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1)|^2]. \end{aligned} \tag{49}$$

در این‌جا،

$$\mathbf{r}_i := \begin{pmatrix} x_i \\ y_i \end{pmatrix}, \tag{50}$$

و

$$\mathbf{n}_{1\,3} := \begin{pmatrix} -c \\ -s \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{n}_{2\,1} := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{n}_{3\,2} := \begin{pmatrix} -c \\ s \end{pmatrix}, \tag{51}$$

که

$$c + i\,s = e^{i\,2\pi/3}. \tag{52}$$

هم‌چنین،

$$\begin{pmatrix} u^1 \\ u^2 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} v^1 \\ v^2 \end{pmatrix} := \delta_{\alpha\,\beta}\, u^\alpha\, v^\beta. \tag{53}$$

σ را یک جای‌گشت ِ 3 تا یی بگیرید. متناظر با این جای‌گشت، یک و تنها یک ماتریس ِ R_σ هست که

$$R_\sigma\, \mathbf{n}_{i\,j} = \mathbf{n}_{\sigma(i)\,\sigma(j)}. \tag{54}$$

مئلفه‌ها یِ این ماتریس حقیقی اند. ضمناً این ماتریس متعامد است، یعنی به ازا یِ هر دوبردار ِ $\mathbf{u}$ و $\mathbf{v}$،

$$(R_\sigma\, \mathbf{u}) \bullet (R_\sigma\, \mathbf{v}) = \mathbf{u} \bullet \mathbf{v}. \tag{55}$$

ضمناً به‌ساده‌گی دیده می‌شود به ازا یِ هر دوجای‌گشت ِ 3 تایی یِ σ و τ،

$$R_\sigma\, R_\tau = R_{\sigma\,\tau}. \tag{56}$$

حالا این تبدیل را در نظر بگیرید.

$$\mathbf{r}_i \to \mathbf{r}'_i := R_\sigma\, \mathbf{r}_{\sigma^{-1}(i)}. \tag{57}$$

تحت ِ این تبدیل،

$$\begin{aligned} \mathbf{n}_{i\,j} \bullet (\mathbf{r}'_i - \mathbf{r}'_j) &= \mathbf{n}_{i\,j} \bullet [R_\sigma(\mathbf{r}_{\sigma^{-1}(i)} - \mathbf{r}_{\sigma^{-1}(j)})], \\ &= [R_{\sigma^{-1}}\, \mathbf{n}_{i\,j}] \bullet (\mathbf{r}_{\sigma^{-1}(i)} - \mathbf{r}_{\sigma^{-1}(j)}), \\ &= \mathbf{n}_{\sigma^{-1}(i)\,\sigma^{-1}(j)} \bullet (\mathbf{r}_{\sigma^{-1}(i)} - \mathbf{r}_{\sigma^{-1}(j)}), \end{aligned} \tag{58}$$

و

$$\mathbf{r}'^*_i \bullet \mathbf{r}'_i = \mathbf{r}^*_{\sigma^{-1}(i)} \bullet \mathbf{r}_{\sigma^{-1}(i)}. \tag{59}$$

(58) یعنی این تبدیل تقارن ِ انرژی‌یِ‌پتانسیل است، و (59) یعنی این تبدیل تقارن ِ انرژی‌یِ‌جنبشی است. به این ترتیب، این سیستم متناظر با هر جای‌گشت ِ 3 تایی یک تقارن دارد. این‌ها در واقع تقارن‌ها یِ هندسی یِ مثلث ِ متساوی‌الاضلاع اند.

σ را جای‌گشت ـِ 3 تایی یی می‌گیریم که

$$\sigma(1) = 2, \qquad \sigma(2) = 3, \qquad \sigma(3) = 1. \tag{60}$$

دیده می‌شود R_σ ماتریس ـِ چرخش به اندازه یِ $(2\pi/3)$ است:

$$R := R_\sigma = \begin{pmatrix} c & -s \\ s & c \end{pmatrix}. \tag{61}$$

ویژه‌بردارها یِ تقارن ـِ متناظر با جای‌گشت ـِ σ این رابطه را بر می‌آورند.

$$\mathbf{r}_1 = \mathbf{r} \qquad , \mathbf{r}_2 = \chi^{-1}\, R\, \mathbf{r}, \qquad \mathbf{r}_3 = \chi^{-2}\, R^2\, \mathbf{r}, \qquad \mathbf{r} = \chi^{-3}\, R^3\, \mathbf{r}. \tag{62}$$

χ ویژه‌مقدار ـِ تبدیل است. $\mathbf{r}$ دل‌بخواه است. از این‌جا،

$$\chi^{-3}\, R^3 = 1, \tag{63}$$

و چون R^3 چرخش به اندازه یِ (2π) (یعنی تبدیل ـِ همانی) است،

$$\chi^3 = 1. \tag{64}$$

پس χ ریشه یِ سه‌وم ـِ یک (و در نتیجه فاز) است. برا یِ ویژه‌بردار ـِ متناظر با ویژه‌مقدار ـِ χ،

$$M'_{\alpha\,\beta}\, (X'^{\alpha})^*\, X^\beta = 3m\, \mathbf{r}^* \bullet \mathbf{r}, \tag{65}$$

و

$$\begin{aligned} K'_{\alpha\,\beta}\, (X'^{\alpha})^*\, X^\beta &= 3k|\mathbf{n}_{2\,1} \bullet [(\chi^*\, R - 1)\mathbf{r}]|^2, \\ &= 3k|(\chi^*\, c - 1)x - \chi^*\, s\, y|^2. \end{aligned} \tag{66}$$

از این‌جا،

$$M' = 3m \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \tag{67}$$

و

$$K' = 3k \begin{pmatrix} \chi\, c - 1 \\ -\chi\, s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \chi^*\, c - 1 & -\chi^*\, s \end{pmatrix}. \tag{68}$$

پس،

$$\mathcal{K}' = \frac{k}{m} \begin{pmatrix} \chi\, c - 1 \\ -\chi\, s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \chi^*\, c - 1 & -\chi^*\, s \end{pmatrix}. \qquad (69)$$

ویژه‌مقدارها یِ بی‌بعدشده یِ این ماتریس می‌شوند صفر و

$$\Lambda = 2 + \frac{1}{2}(\chi + \chi^*). \qquad (70)$$

χ ها یِ مجاز عبارت اند از

$$\chi = 1,\ e^{i\,2\pi/3},\ e^{-i\,2\pi/3}. \qquad (71)$$

پس،

$$\Lambda = 3,\ \frac{3}{2},\ \frac{3}{2}, \qquad (72)$$

که همان (47) است.

3 مرجع‌ها

[1] S. Neil. Rasband; "Dynamics", (John Wiley & Sons, 1983) chapter 5

[2] Frederick W. Byron, Jr. & Robert W. Fuller; "Mathematics of classical and quantum mechanics", (Addison-Wesley, 1969) chapter 4